دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض—گرایش جبر

موضوع:

بررسی حلقه های n —کوهرنت و (n,d) —حلقه ها

نگارش:

مهدی یعقوبی

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد نیک مهر

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: بررسی حلقه های $n-$کوهرنت و $(n,d)-$حلقه ها

استاد راهنما: دکتر محمد جواد نیک مهر

نام دانشجو: مهدی یعقوبی

شماره دانشجویی: ۸۸۰۳۳۱۴

اینجانب مهدی یعقوبی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

چکیده

در این پایان‌نامه ما مفاهیم (n,d)−انژکتیو و (n,d)−یکدست را براساس مفاهیم مدول انژکتیو و مدول یکدست تعمیم داده و از این مفاهیم، برای مشخص کردن بعضی خصوصیات حلقه های n−منسجم و (n,d)−حلقه های (ضعیف) راست استفاده می کنیم.

کلمات کلیدی : (n,d)−انژکتیو ، (n,d)−یکدست ، (n,d)−حلقه، حلقه های n−منسجم (n−کوهرنت)

فهرست مندرجات

مقدمه

در این پایان نامه پس از بیان چند تعریف و قضیه ی مقدماتی در فصل ۱ به عنوان مقدمات، مفاهیمی چون مدول های $(n,d)-$انژکتیو و $(n,d)-$یکدست و $(n,d)-$حلقه های(ضعیف) راست را در فصل ۲ معرفی کرده و بعضی از خصوصیات اصلی $(n,d)-$حلقه های(ضعیف) راست را مشخص می کنیم. در فصل ۳ ابتدا مفهوم حلقه های $n-$منسجم را بر اساس مفاهیم حلقه ی نوتری وحلقه ی منسجم تعمیم داده و سپس به بررسی خصوصیات ابن نوع از حلقه ها می پردازیم. در فصل ۴، با استفاده ار مفاهیم پیش پوشِ $(n,d)-$یکدست و پیش پوششِ$(n,d)-$انژکتیو، نشان می دهیم که چطور از طریق اثبات وجود این پیش پوش ها و پیش پوشش ها، می توان به وجود حلقه های $n-$منسجم و $(n,d)-$حلقه های راست پی برد و در فصل ۵ نشان می دهیم اگر $S \leq R$ یک توسیع تقریبا عالی باشد، آنگاه R یک $(n,d)-$حلقه ی (ضعیف)راست است اگر وتنها اگر S یک $(n,d)-$حلقه ی (ضعیف)راست باشد.

فصل ۱

مقدمات

دراین فصل به بیان چند مفهوم مقدماتی می پردازیم و علاوه بر آن چند قضیه ی مهم و کاربردی درباره ی این مفاهیم را بیان و اثبات می کنیم. دراین بحث همه ی حلقه ها را شرکت پذیر همراه با عنصر یکانی فرض می کنیم. لازم به ذکر است که همه ی تعاریف، قضایا و گزاره های این فصل (به غیر از قضایا و تعاریف با ذکر مرجع) برگرفته شده از مرجع با ارزش [۱۴] هستند.

۱.۱ رسته وتابعگون

تعریف ۱.۱ رسته ای[۱] مثل $\mathcal{C}$، خانواده ای است متشکل از اشیائی که معمولا با $A, B, C, D, \cdots$ نمایش می دهیم، با این ویژگی که

۱. به ازای هر دو شی مثل A, B، مجموعه ای متناظر می شود که با $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان داده می شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی مثل A, B, C, D که $(A,B) \neq (C,D)$،

[۱] category

$Hom_C(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset$،

۲. به ازای هر سه شی مثل C, B, A، تابع

$$Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(g,f) \longrightarrow gf$$

موجود است که

i) به ازای هر چهار شی مثل D, C, B, A، اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$، آنگاه $h(gf) = (hg)f$،

ii) به ازای هر شی مثل A، عضوی از $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ مثل ۱_A موجود است که به ازای هر عضو از $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ مثل f و هر عضو $Hom_{\mathcal{C}}(C,A)$ مثل g، $f۱_A = f$ و $۱_A g = g$.

هر عضو از $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ را یک ریختار[۲] از A به B می نامند. نماد $f : A \longrightarrow B$ هم یعنی این که f ریختار از A به B است.

تعریف ۲.۱ در رسته ای مثل $\mathcal{C}$، یک ریختار مثل $f : A \longrightarrow B$ را هم ارزی می نامیم اگر ریختاری مثل $g : B \longrightarrow A$ از $\mathcal{C}$ موجود باشد که $fg = ۱_B$ و $gf = ۱_A$.

تعریف ۳.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون[۳] همورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شی که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $F(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد، و دیگری تابع ریختار، که آن را هم با F نشان می دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ ، ریختاری از $\mathcal{D}$ مثل

[۲] morphism

[۳] functor

$F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ نسبت می دهد، با این ویژگی که

۱. به‌ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $F(1_A) : 1_{F(A)}$،

۲. به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$، $F(gf) = F(g)F(f)$.

تعریف ۴.۱ فرض کنید$\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون پادورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شی که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $F(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد، و دیگری تابع ریختار، که آن را هم با F نشان می دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ ، ریختاری از $\mathcal{D}$ مثل $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ نسبت می دهد، با این ویژگی که

۱. به‌ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $F(1_A) = 1_{F(A)}$،

۲. به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$، $F(gf) = F(f)F(g)$.

مثال ۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ خانواده ی تمام گروه ها باشد. به ازای هر دو گروه مثل H, G، $Hom_{\mathcal{C}}(H, G)$ را همان $Hom(H, G)$ متداول در نظریه ی گروه ها، یعنی مجموعه ی تمام همریختی[۴] های گروهی از H به G، بگیرید و تابع . را نیز به صورت

$$. : Hom_C(H, K) \times Hom_C(G, H) \longrightarrow Hom_C(G, K)$$

$$(g, f) \longrightarrow g.f$$

تعریف می کنیم که در آن، $g.f$ ترکیب متداول دو همریختی گروهی f و g است. در این صورت $\mathcal{C}$ رسته است. در این رسته، هر همریختی گروهی G به H، ریختار محسوب می شود و نماد $f : G \longrightarrow H$، یعنی $f \in Hom_C(G, H)$. این رسته را رسته ی گروه ها می نامیم و آن را با $\mathbb{G}rp$

[۴] Homomorphism

نمایش می دهیم. اگر به جای گروه ها در اینجا، گروه های آبلی را قرار دهیم، به رسته ی گروه های آبلی یعنی $\mathbb{A}b$ می رسیم.

۲.۱ Hom و $\otimes$

۱.۲.۱ مدول ها

در این بخش ابتدا به تعریف مفاهیمی مانند مدول، رسته ی مدول ها و زیرمدول می پردازیم و سپس سه قضیه ی اساسی درباره ی یکریختی را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۵.۱ فرض کنید که R یک حلقه و M مجموعه ای ناتهی باشد. M را، همراه با عمل جمع $+ : M \times M \longrightarrow M$ و ضرب اسکالر $. : R \times M \longrightarrow M$، R-مدول چپ یکانی می نامیم اگر

۱. $(M,+)$ گروهی آبلی باشد،

۲. به ازای هر دو عضو x,y از M و هر عضو r از R، $r(x+y)=rx+ry$،

۳. به ازای هر عضو x از M و هر دو عضو s,r از R، $(r+s)x=rx+sx$،

۳. به ازای هر عضو x از M و هر دو عضو s,r از R، $(rs)x=r(sx)$،

۴. به ازای هر عضو x از M، $1x=x$.

مشابه بالا می توان R-مدول راست یکانی را نیز تعریف کرد. از این به بعد همه ی مدول های موجود دراین رساله را یک مدول یکانی اختیار می کنیم.

تعریف ۶.۱ فرض کنید M,N دو R-مدول باشند. تابع $f : M \longrightarrow N$ را R-همریختی مدول هامی نامیم هر گاه

۱. برای هر $x,y \in M$، $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

۲. برای هر $x \in M$ و هر $r \in R$، $f(rx)=r(f(x))$.

اگر R-همریختی $f : M \longrightarrow N$ پوشا باشد، به f یک R-بروریختی[۵] می گوییم واگر R-همریختی یک به یک باشد، به f یک R-تکریختی[۶] می گوییم. اگر f هم پوشا و هم یک به یک باشد، به آن یک R-یکریختی[۷] از M به N می گوییم و در صورت وجود، گوییم M و N به عنوان R-مدول با یکدیگر یکریختند و می نویسیم $M \cong N$.

از این به بعد برای راحتی کار، به جای کلمه ی R-همریختی، از کلمه ی همریختی استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ خانواده ی تمام R-مدول های چپ (راست) باشد. به ازای هر دو R-مدول چپ (راست) مثل M, N، $Hom_{\mathcal{C}}(M,N)$ را همان $Hom_R(M,N)$ متداول در نظریه ی مدول ها، یعنی مجموعه ی تمام همریختی های مدولی از M به N در نظر می گیریم. این همریختی یک ریختار محسوب می شود و نماد $f : G \longrightarrow H$، یعنی $f \in Hom_{\mathcal{C}}(G,H)$، به این معنی است که f، همریختی مدولی از M به N است. این رسته را رسته ی R-مدول چپ (راست) می نامند و آن را با ${}_R\mathbb{M}$ $(\mathbb{M}_R)$ نمایش می دهند.

تعریف ۷.۱ یک تابعگون $T :{}_R \mathbb{M} \longrightarrow {}_R \mathbb{M}$ که هم می تواند هموردا و هم می تواند پادوردا باشد را یک تابعگون جمعی می گویند اگر برای هر زوج از نگاشت های در R مانند $f, g : A \longrightarrow B$ داشته باشیم

$$T(f+g) = T(f) + T(g).$$

[۵] R-epimorphism

[۶] R-monomorphism

[۷] R-isomorphism

تعریف ۸.۱ اگر R یک حلقه باشد، آنگاه مرکز حلقه را به صورت زیر تعریف می کنیم و آن را با $Z(R)$ نشان می دهیم.

$$Z(R) = \{a \in R : ar = ra \ , r \in R \text{ برای هر }\}$$

حلقه ی R جابجایی است اگر وتنهااگر $Z(R) = R$.

گزاره ۲.۱ فرض می کنیم که R یک حلقه باشد، و B', B, A، سه R-مدول چپ باشند.

i) $Hom_R(A, -)$ یک تابعگون جمعی از $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{A}b$ است.

ii) اگر A را یک R-مدول چپ بگیریم، آنگاه $Hom_R(A, B)$ یک $Z(R)$-مدول است، که در آن $Z(R)$ مرکز حلقه است. اگر $q : B \longrightarrow B'$ را یک همریختی بین دو R-مدول بگیریم، آنگاه همریختی $q_* : Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(A, B')$ یک همریختی بین دو $Z(R)$-مدول است، و $Hom_R(A, -)$ مقادیرش را در${}_{Z(R)}\mathbb{M}$ اختیار می کند. به خصوص اگر R جابجایی باشد، آنگاه $Hom_R(A, -)$ یک تابعگون همورد از ${}_R\mathbb{M}$ به ${}_R\mathbb{M}$ است.

مشابه این گزاره، برای تابعگون پادورد $Hom_R(-, A)$ نیز برقرار است.

تعریف ۹.۱ فرض کنید M یک R-مدول و N یک زیر مجموعه ی ناتهی از M باشد. می گوییم N زیر مدول M است و می نویسیم $N \leq M$، هر گاه به ازای هر دو عضو x, y از N و هر عضو r از R، $x + y \in N$ و $rx \in N$.

مثال ۲.۱ فرض کنید M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مدول های M باشد. اگر I ناتهی باشد، مجموعه $\sum_{i\in I} M_i$ را به صورت

$$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{k=۱}^{n} x_k : n \geq ۱, k \in I, x_k \in M_k\}$$

نمایش می دهیم و اگر I تهی باشد، قرار می دهیم

$$\sum_{i\in I} M_i = ۰.$$

با توجه به تعریف بالا به راحتی می توان ثابت کرد که $\sum_{i\in I} M_i$ یک زیر مدول از M است.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای ناتهی از زیر مدول های M باشد. در این صورت اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای مستقل باشد یعنی به ازای هر i، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مثل x_{i_k}، از $\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} = ۰$ نتیجه بشود که به ازای هر k و n $۱ \leq k \leq n$ ،$x_{i_k} = ۰$ ، آنگاه مجموعه ی $\sum_{i\in I} M_i$ را جمع مستقیم[۸] می نامند و آن را با نماد $\oplus_{i\in I} M_i$ نشان می دهند. درحالتی که $I = \{۱, ..., n\}$، این جمع مستقیم را با $\oplus_{i\in I}^{n} M_i$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۱.۱ یک زیر مدول N از $R-$مدول M را یک جمعوند مستقیم[۹] از M می نامیم هرگاه زیر مدول T از M وجود داشته باشد به طوریکه $M = S \oplus T$.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و $(A_i)_{i\in I}$ یک خانواده ی ناتهی از $R-$مدولهای چپ باشند. ضرب مستقیم[۱۰] $\prod_{i\in I} A_i$ عبارتست از حاصلضرب دکارتی این خانواده یعنی

[۸] direct sum

[۹] direct summand

[۱۰] direct product

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i) : x_i \in M_i, i \in I \text{برای هر}\}$$

جمع و ضرب اسکالر را نیز به صورت

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$

$$r(x_i) = (rx_i),$$

تعریف می کنیم. به سادگی دیده می شود که $\prod_{i\in I} A_i$ به همراه این جمع و ضرب در اسکالر به R-مدول تبدیل می شود. اگر خانواده ی داده شده تهی باشد، قرار می دهیم $\prod_{i\in I} A_i = 0$.

تعریف ۱۳.۱ اگر N یک زیرمدول مدول چپ M باشد، آنگاه مدول خارج قسمتی، یک گروه خارج قسمتی M/N است که توسط ضرب اسکالر زیر تعریف شده است:

$$r(m+N) = rm + N.$$

به نگاشت $M/N \longrightarrow M$ با ضابطه ی $m \longrightarrow m+N$، نگاشت طبیعی[۱۱] می گوییم.

تعریف ۱۴.۱ یک R-مدول چپ M را متناهی مولد می گویند هر گاه M توسط یک مجموعه ی متناهی تولید شود. یعنی، یک زیرمجموعه متناهی مانند $X = \{x_1, ..., x_n\}$ وجود داشته باشد که $M = \langle X \rangle$.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید M, N دو R-مدول و $f : M \longrightarrow N$ یک R-همریختی باشد. آنگاه تعریف می کنیم

[۱۱] natural map

(۱) $\ker f = \{m \in M : f(m) = 0\}$

(۲) $\mathrm{im}\ f = \{n \in N : f(m) = n$ وجود داشته باشد که $m \in M\}$

(۳) $\mathrm{coker}(f) = N/\ \mathrm{im}\ f$.

قضیه ۱.۱ فرض کنید M, N دو R-مدول باشند و $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی. دراین صورت،

۱. اگر M متناهی مولد باشد، $\mathrm{im}\ f$ نیز متناهی مولد است.

۲. اگر $\mathrm{im}\ f$ و $\ker f$ متناهی مولد باشند، M نیز متناهی مولد است.

قضیه ۲.۱ (قضیه ی اول یکریختی) فرض کنید M, N دو R-مدول باشند و $f : M \longrightarrow N$ یک R-همریختی. در این صورت، $M/\ker f \cong \mathrm{im} f$. بالاخص، اگر f یک بروریختی باشد آنگاه $M/\ker f \cong N$.

قضیه ۳.۱ (قضیه ی دوم یکریختی) فرض کنید M، R-مدول باشد و N, K دو زیر مدول از M. دراین صورت، $N/(N \cap K) \cong (N + K)/K$.

قضیه ۴.۱ (قضیه ی سوم یکریختی) فرض کنید M، R-مدول باشد و N, K دو زیرمدول از M با این ویژگی که $N \subseteq K$. در این صورت، K/N زیر مدولی از M/N است و $\frac{M/N}{K/N} \cong M/K$.

۲.۲.۱ ضرب تانسوری

ضرب تانسوری از مهمترین مفاهیم اساسی استفاده شده در این پایان نامه است. در این بخش به معرفی این مفهوم اساسی می پردازیم.

فرض کنید M, N دو مجموعه ناتهی باشند. $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را مجموعه تمام حاصل جمع های صوری مثل $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i)$ در نظر می گیریم که در آن $t \geq 1$، $n_i \in \mathbb{Z}$ و $(x_i, y_i) \in M \times N$؛ یعنی $\mathbb{Z}^{(M\times N)} = \{\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i) : t \geq 1, n_i \in \mathbb{Z}, (x_i, y_i) \in M \times N\}$. هر دو عضو دلخواه از $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را می توانیم به صورت $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i)$ و $\sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i)$ در نظر بگیریم. تساوی دو عضو از $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را به طور طبیعی، تساوی ضرایب متناظر آنها تعریف می کنیم، یعنی دو عضو دلخواه از $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ مثل $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i)$ و $\sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i)$ را مساوی می نامیم و می نویسیم $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i)$ اگر و فقط اگر برای هر i که $1 \leq i \leq t$، $n_i = n'_i$. اکنون می خواهیم عمل جمعی روی $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ تعریف کنیم که آن را به گروه آبلی آزاد ($\mathbb{Z}-$مدول) تبدیل کند. این کار نیز به صورت طبیعی انجام می شود: کافی است عمل $+ : \mathbb{Z}^{(M\times N)} \times \mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را به صورت

$$\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{t} (n_i + n'_i)(x_i, y_i)$$

تعریف کنیم. به راحتی دیده می شود که $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ با این عمل جمع به گروه آبلی آزاد($\mathbb{Z}-$مدول) تبدیل می شود.

تعریف ۱.۱۶ فرض کنید M، $R-$مدول راست باشد و N، $R-$مدول چپ و F را نیز گروه آبلی $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ باشد. گیریم K زیر گروهی از F باشد که توسط اعضای

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y),$$

$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),$$

$$(xr, y) - (x, ry),$$

تولید می شود که در آن $x, x' \in M$، $y, y' \in N$ و $r \in R$. در این صورت، گروه آبلی آزاد ($\mathbb{Z}$—مدول) F/K را حاصل ضرب تانسوری M و N می نامیم و آن را با $M \otimes_R N$ نشان می دهیم.

اگر M، R—مدول راست و N، R—مدول چپ باشد، عضو $(x, y) + K$ از گروه آبلی آزاد ($\mathbb{Z}$—مدول) $M \otimes_R N = F/K$ را با $x \otimes y$ نشان می دهیم.

قضیه ۵.۱ فرض کنید R حلقه ای جابجایی باشد. در این صورت حاصل ضرب تانسوری دارای خاصیت های زیر است:

(۱) اگر M یک R-مدول چپ و N یک R-مدول راست باشد، آنگاه $M \otimes_R N$ ساختار R-مدولی دارد.

(۲) اگر $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده ای از R-مدول های راست و N یک R-مدول چپ باشد، آنگاه $(\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \oplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.

(۳) فرض کنید S یک حلقه باشد، M یک R-مدول راست و یک S-مدول چپ و N یک R-مدول چپ. در این صورت $M \otimes_R N$ ساختار S-مدولی چپ دارد.

(۴) فرض می کنیم S یک حلقه باشد، M یک R-مدول راست و N یک R-مدول چپ و یک S-مدول راست باشد. در این صورت $M \otimes_R N$ ساختار S-مدولی راست دارد.

(۵) اگر M یک R-مدول راست، N یک R-مدول چپ و یک S-مدول راست و L را یک S-مدول راست فرض کنیم، آنگاه

$$Hom_S(M \otimes_R N, L) \overset{\mathbb{Z}}{\cong} Hom_R(M, Hom_S(N, L)).$$

(٦) اگر M یک R-مدول چپ و N یک R-مدول راست باشد، آنگاه $R \otimes_R M \cong M$ و $N \otimes_R R \cong N$.

برهان : اثبات کلیه ی قسمت ها در [۲۳] آمده است. □

۳.۱ دستگاه های مستقیم و حد های مستقیم

تعریف ۱۷.۱ یک مجموعه ی جزئا مرتب I[۱۲] و یک رسته مانند $\mathcal{C}$ را در نظر می گیریم. یک دستگاه مستقیم [۱۳] در $\mathcal{C}$ را یک زوج مرتب مانند $((M_i)_{i\in I}, (\phi^i_j)_{i\leq j})$ در نظر می گیریم، که می توانیم به طور خلاصه بنویسیم $\{M_i, \phi^i_j\}$. در تعریف بالا $((M_i)_{i\in I})$ یک خانواده ی اندیس گذاری[۱۴] از اشیاء در $\mathcal{C}$ هستند. $(\phi^i_j : M_j \longrightarrow M_i)_{i\leq j}$ نیز یک خانواده اندیس گذاری از ریختار ها هستند به طوری که در آن برای هر i، $\phi^i_i = 1_{M_i}$ و در هر دیاگرامی به شکل زیر به ازای هر $i \leq j \leq k$، تساوی $\phi^j_k \phi^i_j = \phi^i_k$ برقرار می شود.

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi^i_k & & \\ M_i & & ------\longrightarrow & & M_k \\ & \phi^i_j \searrow & & \nearrow \phi^j_k & \\ & & M_j & & \end{array}$$

مثال ۳.۱ اگر $I = \{1, 2, 3\}$ یک مجموعه ی جزئاً مرتب باشد که در آن $2 \leq 1$ و $3 \leq 2$، آنگاه یک دستگاه مستقیم روی I یک دیاگرام به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g\downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید I یک مجموعه ی جزئاً مرتب باشد و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. جفت مرتب های $\{M_i, \phi^i_j\}$ را به عنوان یک دستگاه مستقیم در $\mathcal{C}$ بر روی I در نظر می گیریم. یک حد مستقیم[۱۵]

[۱۲] partial ordered set

[۱۳] directed system

[۱۴] indexed family

[۱۵] direct limit