بِسمِ اللّه الرَّحمنِ الرَّحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

(شاخهٔ جبر)

عنوان:

خاصیتهای کوهمولوژی مدول‌ها با نمایش‌های ثانویه

استادراهنما:

دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

نگارش:

محمّد محمودی

۱۳۸۱

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

واحد ....

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه آقای محمد محمودی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

عنوان خاصیت‌های کوهمولوژی مدول‌ها با نمایش‌های ثانویه

در روز چهارشنبه مورخهٔ ۸۱/۷/۱۷ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون نوزده تمام می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده	دکتر سیداحمد موسوی	دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

۴۵۸۱۹

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیم به

پدرم روشنگر راهم، او که تنها آرزویش عبورم از مرزهای توانستن و رسیدن به اوج بلندترین قله‌های عزت است.

مادرم مشوق هدفم، آینهٔ افتادگی و عاطفه، که زندگی‌ام برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر، او که کوشید تا در مکتب امید به من الفبای بهاران، درس توکل و مشق رویش بیاموزد.

تقدیر و سپاس

سپاس خدای را که توفیق گام نهادن در راه مقدس علم و دانش نصیبم فرمود و دلم را با نور علم جلا بخشید. در اینجا لازم می‌دانم از تمام کسانی که در مراحل مختلف تحصیل به خصوص در تدوین این پایان‌نامه مشوق و راهنمای من بوده و مرا یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمایم.

از استاد گرانقدر و فرزانه جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده که در کمال فروتنی و تواضع، بدون کمترین مضایقه‌ای وقت گرانبهای خویش را در اختیار این حقیر قرار داده و بحق راهنمای من بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم. بی‌شک بدون راهنمایی‌های ایشان انجام این کار میسر نبود.

از استاد ارجمند و بزرگوار جناب آقای دکتر محمدحسن بیژن‌زاده (داور داخلی) که عنایت فرموده و مطالعه و تصحیح این پایان‌نامه را متقبل شدند، قدردانی می‌نمایم. از استاد گرامی و فرهیخته جناب آقای دکتر سیداحمد موسوی (داور خارجی) که بنده را مشمول مراحم خویش قرار داده و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند و راهنمایی‌های لازم را مبذول فرمودند، سپاسگزارم.

در خاتمه بر خود وظیفه می‌دانم از استاد عزیز و دانشمند جناب آقای دکتر حسین ذاکری که در طول تحصیل از وجود گرانمایه ایشان بهره‌مند بوده‌ام، قدردانی نمایم.

چکیده

A حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری در نظر گرفته می‌شود. نظریهٔ مدولهای نمایش‌پذیر از جهات بسیاری دوگان تجزیهٔ اوّلیه است. مدول ناصفر M روی حلقهٔ A ثانویه نامیده می‌شود اگر برای هر عضو x در A، نگاشت ضرب در x روی M پوشایاپوچتوان باشد. رادیکال پوچساز M ایده‌ال اوّلی مانند P است و گوئیم M، P- ثانویه است. یک نمایش ثانویه برای یک مدول نمایشی از آن به صورت جمع متناهی از زیرمدولهای ثانویهٔ آن است. اگر A- مدول M نمایش ثانویه داشته باشد آن را نمایش‌پذیر گوئیم. مدول M را با بعد گلدی متناهی گوئیم در صورتی که M شامل جمع مستقیم تعداد نامتناهی از زیرمدولهای ناصفر خود نباشد و یا E(M) به جمع مستقیم تعداد متناهی از زیرمدولهای انژکتیو تجزیه نشدنی خود، تجزیه شود. در فصل اوّل قضایای مقدماتی از جبر جابه‌جایی را که در فصل‌های آینده مورد نیاز است، یادآوری می‌کنیم. در فصل دوّم نشان می‌دهیم نمایش‌پذیری یک مدول با بعد گلدی متناهی، مشخصه‌ای برای صفر شدن کوهمولوژی موضعی آن می‌باشد. در فصل سوّم نمایش‌پذیری $\Gamma_a(M)$ در جایی که M یک مدول نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی و a ایده‌الی از A است، توصیف می‌شود. ساختمان مدولهای نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی در فصل چهارم تعیین می‌شوند و نشان داده می‌شود که اعداد باس چنین مدولهایی متناهی است. در فصل پنجم نمایش‌پذیری $\mathrm{Hom}_A(N,M)$، در جایی که N با تولید متناهی و M نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی است، بررسی می‌شود. سرانجام در فصل آخر برخی خواص مدولهایی به فرم $\mathrm{Hom}_A(F,M)$ به طوری که F یکدست و M نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی است، بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اعداد باس، بعد گلدی متناهی، کوهمولوژی موضعی، نمایش‌پذیر.

فهرست مطالب

مقدمه ... ج

فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز ... ۱

فصل دوم صفر شدن کوهمولوژی موضعی ... ۳۳

فصل سوم نمایش‌پذیری $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ ... ۵۷

فصل چهارم اعداد باس برای مدولهای نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی ... ۶۴

فصل پنجم نمایش‌پذیری $Hom_A(N,M)$ ۷۹

فصل ششم ارتباط مدولهای یکدست با مدولهای نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی ۹۴

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۱۰۸

فهرست علائم ۱۱۳

مقدمه

مفهوم نمایش ثانویه برای یک مدول از جهاتی دوگان تجزیه اوّلیه است. مدول ناصفر M روی حلقهٔ A (در این پایان‌نامه حلقه‌ها جابه‌جایی و نوتری می‌باشند) ثانویه نامیده می‌شود اگر برای هر عضو x در A، نگاشت ضرب در x روی M پوشا یا پوچتوان باشد. رادیکال پوچساز M ایده‌آل اوّلی مانند P است و گوئیم M، Pـ ثانویه است. یک نمایش ثانویه برای یک مدول، نمایشی از آن به صورت جمع متناهی از زیرمدولهای ثانویهٔ آن است. اگر Aـ مدول M نمایش ثانویه داشته باشد آن را نمایش‌پذیر گوئیم. مطالب اساسی نظریه نمایش‌های ثانویه در [۵] و ضمیمهٔ ۶ از [۶] بیان شده است. می‌دانیم مدولهای آرتینی نمایش‌پذیرند. شارپ در [۱۴] نشان داده که هر مدول انژکتیو نمایش‌پذیر است. همچنین در [۸] نشان داده شده که اگر E انژکتیو و N با تولید متناهی باشد آنگاه $\mathrm{Hom}_A(N,E)$ نمایش‌پذیر است.

مدول M را با بعد گلدی متناهی گوئیم در صورتی که M شامل جمع مستقیم تعداد نامتناهی از

زیرمدولهای ناصفر خود نباشد و یا $E(M)$ به جمع مستقیم تعداد متناهی از زیرمدولهای انژکتیو تجزیه نشدنی خود، تجزیه شود. (مدولهای انژکتیو تجزیه نشدنی، مدولهایی به شکل $E(\frac{A}{P})$ هستند که P ایده‌آل اول A است) در این حالت $\mathrm{Ass}_A(M)$ مجموعه‌ای متناهی است. مدولهای آرتینی، با تولید متناهی و حتی مدولهایی که ساختار آرتینی روی موضعی سازی‌ای از A دارند با بعد گلدی متناهی می‌باشند.

در فصل اول قضایای مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های بعد، مطرح می‌شود.

در فصل دوم نشان می‌دهیم که نمایش‌پذیری مدولهای با بعد گلدی متناهی مشخصه‌ای برای صفر شدن کوهمولوژی موضعی آنهاست. برای Aـ مدولها، کوهمولوژی موضعی وابسته به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از A را به صورت فانکتور $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$ که $i = ۰, ۱, ۲, \ldots$، نشان می‌دهیم که فانکتور مشتق شدهٔ راست برای فانکتور دقیق چپ $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ می‌باشند به طوری که برای Aـ مدول M، $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ زیرمدولی از M شامل اعضایی است که توسط توانی از $\mathfrak{a}$ صفر می‌شوند. ضمناً یکریختی طبیعی بین $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ و $\varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(\frac{A}{\mathfrak{a}^n}, M)$ موجود است که دنباله‌های دقیق مرتبط با کوهمولوژی موضعی، برای نشان دادن نتایجی در مورد نمایش‌پذیری مدولهای با بعد گلدی متناهی به کار می‌رود. همچنین در ارتباط با $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ مدولهای $D^i_{\mathfrak{a}}(M) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(\mathfrak{a}^n, M)$ برای $i = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و دنبالهٔ دقیق $۰ \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow D^{۰}_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^{۱}_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow ۰$ موجود است که اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌آل اصلی تولید شده توسط s باشد $D^{۰}_{\mathfrak{a}}(M)$ به طور طبیعی با M_s یکریخت است. در فصل سوم نمایش‌پذیری $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ برای ایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$ از A مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ساختار مدولهای نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی در فصل چهارم بررسی شده و خاصیت‌های اعداد باس برای یک انژکتیو رزلوشن مینیمال آن بررسی می‌شود. در فصل پنجم بررسی می‌کنیم که چه موقع $\mathrm{Hom}_A(N, M)$ برای Aـ مدول با تولید متناهی N و A ـ مدول نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی M، نمایش‌پذیر است.

سرانجام در فصل آخر نتایجی در مورد برخی خواص مدولهایی به شکل $\mathrm{Hom}_A(F, M)$ خواهیم گرفت در جایی که M نمایش‌پذیر و با بعد گلدی متناهی و F یکدست می‌باشد.

در این پایان‌نامه مقالهٔ

Melkersson, L. Cohomological Properties of Modules with Secondary Representations, Math. Scand. 77(1995), 197-208.

مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز

در سراسر این پایان‌نامه منظور از حلقه، حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است. همواره عضو یکهٔ حلقه مخالف صفر فرض شده است.

(۱_۱) قضیه: فرض کنیم که M_1 زیرمدول M باشد. تناظری یک به یک بین زیرمدولهای $\frac{M}{M_1}$ و زیرمدولهای M که شامل M_1 هستند، برقرار است.

برهان: تمرین ۶.۲۴ از [۱۵].

(۱ـ۲) قضیه: فرض کنیم که M_1 و M_2 زیرمدول‌های M باشند که $M_1 \subseteq M_2$. در این صورت مدول‌های $\frac{M}{M_2}$ و $\frac{\frac{M}{M_1}}{\frac{M_2}{M_1}}$ یکریخت می‌باشند.

برهان: قضیهٔ ۶.۳۷ از [۱۵].

(۱ـ۳) قضیه: فرض کنیم که M یک Aـ مدول باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(آ) $M = 0$؛

(ب) به‌ازای هر $P \in \mathrm{Spec}(A)$، $M_P = 0$؛

(پ) به‌ازای هر $m \in \mathrm{Max}(A)$، $M_m = 0$.

برهان: گزارهٔ ۳.۸ از [۱].

(۱ـ۴) قضیه: فرض کنیم که P ایده‌آل اول حلقهٔ A و I_1، ...، I_n ایده‌آل‌هایی از A باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(آ) به‌ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $P \supseteq I_j$.

(ب) $P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

(پ) $P \supseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$.

برهان: لم ۳.۵۵ از [۱۵].

(۱ـ۵) قضیه: فرض کنیم که P_1 ، ... ، P_n ایده‌آلهای اولی از حلقهٔ A و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل مشمول در $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ باشد در این صورت $1 \leq i \leq n$ موجود است به طوری که $\mathfrak{a} \subseteq P_i$.

برهان: گزارهٔ ۱.۱۱ از [۱].

(۱ـ۶) قضیه: دیاگرام جابه‌جایی زیر از Aـ مدول‌ها و Aـ همریختی‌ها را در نظر می‌گیریم. اگر f' و f و f'' یکریختی بوده و سطر بالای دیاگرام دقیق باشد آنگاه سطر پایین دیاگرام دقیق است.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\phi} & M & \xrightarrow{\psi} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow[\theta]{} & N & \xrightarrow[\eta]{} & N'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

برهان: فرض کنیم که $n' \in N'$ چنان باشد که $\theta(n') = 0$. در این صورت $m' \in M'$ موجود است که $f'(m') = n'$ و در نتیجه

$$f\phi(m') = \theta f'(m') = \theta(f'(m')) = \theta(n') = 0$$

لذا چون f یکریختی است، $\phi(m') = 0$ و چون ϕ یک به یک است $m' = 0$ و لذا $n' = f'(m') = 0$ و بنابراین θ یک به یک است. فرض کنیم $n'' \in N''$. در این صورت $m'' \in M''$ موجود است که $f''(m'') = n''$ و $m \in M$ موجود است که $\psi(m) = m''$ و لذا $f''\psi(m) = n''$ و لذا چون دیاگرام جابه‌جایی است، $\eta(f(m)) = n''$ و در نتیجه η پوشا است. برای هر $n' \in N'$، $m' \in M$ موجود است که $f'(m') = n'$ در نتیجه

$$\eta\theta(n') = \eta\theta f'(m') = \eta f\phi(m') = f''\psi\phi(m') = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im}\theta \subseteq \ker\eta$$

حال فرض کنیم $n \in \ker \eta$. در این صورت $n \in N$ و $\eta(n) = 0$. لذا $m \in M$ موجود است که $f(m) = n$. در نتیجه $\eta f(m) = \eta(n) = 0$ و لذا $f''\psi(m) = 0$. لذا $\psi(m) = 0$ و $m \in \ker \psi$.
بنابراین $m \in \ker \psi = \operatorname{Im} \phi$ و لذا $m' \in M'$ موجود است که $\phi(m') = m$. در نتیجه

$$\theta f'(m') = f\phi(m') = f(m) = n \Longrightarrow n \in \operatorname{Im} \theta \Longrightarrow \ker \eta \subseteq \operatorname{Im} \theta$$

(۱ـ۷) قضیه: اگر برای هر $i = 1, \ldots, n$، دنباله‌های $0 \longrightarrow M'_i \longrightarrow M_i \longrightarrow M''_i \longrightarrow 0$ از Aـ مدول‌ها دقیق باشد آنگاه دنبالهٔ زیر دقیق است:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M'_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M''_i \longrightarrow 0$$

برهان: بدیهی است.

(۱ـ۸) قضیه: فرض کنیم که $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ یک دنبالهٔ دقیق از Aـ مدول‌ها و Aـ همریختی‌ها باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(آ) یک همریختی Aـ مدولی مانند $h : M'' \longrightarrow M$ وجود دارد که $gh = 1_{M''}$.

(ب) یک همریختی Aـ مدولی مانند $k : M \longrightarrow M'$ وجود دارد که $kf = 1_{M'}$.

(پ) دنبالهٔ داده شده شکافته شده است.

برهان: قضیهٔ ۴.۱.۱۸ از [۴].

(۱ـ۹) تعریف: فرض کنیم که M یک Aـ مدول باشد در این صورت

$$\operatorname{supp}_A(M) = \{P \in \operatorname{Spec}(A) | M_P \neq 0\}$$

(۱ـ۱۰) قضیه: فرض کنیم که A ـ مدول M با تولید متناهی باشد در این صورت

$$\mathrm{supp}_A(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) | P \supseteq (0 \underset{A}{:} M)\}$$

برهان: لم ۹.۲۰ از [۱۵].

(۱ـ۱۱) تعریف: فرض کنیم که M یک Aـ مدول و $P \in \mathrm{Spec}(A)$ و $0 \neq x \in M$ چنان باشد که $P = (0 \underset{A}{:} x)$. در این صورت P را یک ایده‌آل وابسته به M می‌نامیم. مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های وابسته به M را با $\mathrm{Ass}_A(M)$ نمایش می‌دهیم.

(۱ـ۱۲) تعریف: فرض کنیم که M مدولی روی حلقهٔ A باشد. گوئیم $a \in A$ مقسوم‌علیه صفر روی M است اگر $m \in M$ای وجود داشته باشد که $m \neq 0$ ولی $am = 0$. عضوی از A را که مقسوم‌علیه صفر روی M نباشد، غیرمقسوم‌علیه صفر روی M می‌گوئیم. مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر روی M را با $Z(M)$ (یا اگر بخواهیم بر حلقهٔ مربوطه تأکید کنیم با $Z_A(M)$) نمایش می‌دهیم.

(۱ـ۱۳) قضیه: هرگاه M یک Aـ مدول و A حلقه‌ای نوتری باشد آنگاه

$$M \neq 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \mathrm{Ass}_A(M) \neq \phi$$

برهان: نتیجهٔ ۹.۳۵ از [۱۵].

(۱ـ۱۴) قضیه: فرض کنیم که A حلقه‌ای نوتری و $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از Aـ مدول‌ها و Aـ همریختی‌ها باشد در این صورت

$$\mathrm{Ass}_A(L) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \mathrm{Ass}_A(L) \cup \mathrm{Ass}_A(N)$$