بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده ریاضی

پایان نامه جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی توابع فوق هندسی و q – توسیع های آن

نگارش

فاطمه بوتیمار

اساتید راهنما

دکتر محمد مسجدجامعی

دکتر محمود هادیزاده یزدی

بهمن ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

اسطوره های عشق، محبّت، صبر، تلاش، فداکاری و از جان گذشتگی، پدر و مادر عزیزم که

نور شمع وجودشان امید بخش زندگی ام

گوهر سخنشان آرام بخش ذهنم

دست نوازشگرشان درمان دردهایم

ونگاه مهربانشان قوت قلبم می باشد

****

اساتید و معلمانی که افتخار شاگردیشان را داشته ام

****

و همه دوستان عزیزم که همواره به بنده لطف داشته و دارند

«من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق»

حمد و سپاس به درگاه آن یکتای بی‌همتا که قلم را قداست و انسان را کرامت بخشید و توانایی پیمودن راهی نه آسان را به بنده‌ی حقیر عنایت فرمود و شوق آموختن در گستره‌ی لایتناهی هستی را عطایم نمود. هیچ راهی آغاز نخواهد شد مگر با امید به همدلی همراهان، طی نخواهد شد جز با همپایان خستگی‌ناپذیر و به نهایت نخواهد رسید مگر به یاری دستان یاری‌گر. دشواری راه را بزرگانی آسان نمودند که دیدنشان افتخاری و حضور در خدمتشان در تصورات آرزو بود. این چند سطر فرصتی است کوتاه اما مغتنم جهت سپاس از این سروران گرامی. از آقای دکتر محمد مسجد جامعی، استاد فرهیخته‌ای که بی‌دانشی مرا با صبوری نواخت و رسم معلمی به رنج خود کفایت کرد، سپاس‌گزارم و سلامتی و توفیق روز افزون ایشان را از درگاه ایزد منان مسئلت دارم. درنهایت منت‌دار آنانم که نخست حق را بر من دارند، شرمسار رنج و خستگی نهفته در دیدگان پدر، مادر، برادر و خواهرانم هستم. زبان واژه قاصر است از تقدیر سخاوت بی‌منتهای پدر و مادر عزیزم که همواره صبورانه رنج‌های مرا به دوش می‌کشند. دست‌های گرم و مهربان آن‌ها را می‌بوسم، هرچند نثار آن‌ها به وجود حقیرم تا همیشه مهر است و مهر و پیشکش من به پای آن‌ها همه شرم است و شرم. در پایان، عذر تقصیر از دوستان و هم‌دوره‌ای‌های عزیزم و همه عزیزانی که صمیمانه دست‌هایم را فشردند و یاری‌گر من بودند اما نامی از آن‌ها در اینجا ذکر نشده است.

فاطمه بوتیمار
بهمن ماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا به تعریف رابطه تعامد بین چند جمله‌ای ها و معرفی چندجمله‌ای های متعامد کلاسیک پرداخته‌ایم. سپس توابع فوق هندسی و q - فوق هندسی را معرفی نموده و روابط تعامد، روابط بازگشتی، معادلات دیفرانسیل مرتبط با این توابع و نمایش فوق هندسی و q - فوق هندسی برخی توابع خاص از جمله توابع کلاس هان و q- هان را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در انتها گذر مختصری بر مسائل خطی سازی و مسائل اتصال بین چندجمله‌ای ها و ضرایب آنها در این کلاس از توابع داشته‌ایم. تحقیقات اصلی این پایان نامه بر اساس مراجع [۲] و [۳] و [۴] و [۶] و [۹] و [۱۶] و [۲۱] و [۲۸] صورت گرفته است.

کلمات کلیدی: چندجمله‌ای های متعامد، سری و توابع فوق هندسی و q - فوق هندسی، معادلات فوق هندسی و q- فوق هندسی، q - انتگرال و q - مشتق، ضرایب و مسائل خطی سازی، ضرایب اتصال چند جمله‌ای ها.

فهرست مطالب

مقدمه

اکثر توابع مقدماتی و بسیاری از توابع غیر مقدماتی که در ریاضیات و فیزیک مطرح می‌شوند، دارای نمایشی به صورت توابع فوق هندسی و q - فوق هندسی و یا کسری از این توابع می باشند. در این پایان نامه به بررسی و مطالعه‌ی توابع فوق هندسی و q - فوق هندسی پرداخته‌ایم. در فصل اول، به ارائه تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این پایان نامه می‌پردازیم.

در فصل دوم، چندجمله‌ای های متعامد را مطرح کرده و به بررسی چند جمله‌ای های متعامد کلاسیک و توابع کلاس هان پرداخته ایم. [۲] و [۹] و [۱۴] و [۱۵] و [۲۳].

در فصل سوم، توابع فوق هندسی و نمایش فوق هندسی از برخی توابع را بیان نموده و در انتها معادلات فوق هندسی را مطرح نموده ایم.[۱] و [۲] و [۷] و [۱۱] و [۱۳].

در فصل چهارم، توابع q - فوق هندسی و ویژگی های آن را بررسی نموده ایم و چندجمله ای های کلاس q - هان را معرفی کرده ایم.[۳] و [۶] و [۱۲] و [۱۹].

در فصل پنجم، مسائل خطی سازی و اتصال بین چندجمله ای های متعامد کلاسیک و چندجمله ای های کلاس q - هان را بیان نموده و برای برخی از توابع، ضرایب این مسائل را محاسبه کرده ایم.[۱۰] و [۱۱] و [۱۷] و [۲۰] و [۲۳].[۲۵] و [۲۶]

تاریخچه توابع فوق هندسی

سری

$$1+\frac{ab}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+\dots \qquad (۱)$$

سری گاوس[۱] یا سری فوق هندسی عادی نامیده می‌شود. این سری معمولاً با نماد زیر نمایش داده می‌شود:

$${}_2F_1[a,b;c;z].$$

که z متغیر تابع و a و b و c پارامترهای تابع نامیده می شوند. اگر هرکدام از کمیت های a یا b یک عدد صحیح منفی $-n$ باشد، آنگاه سری تعداد متناهی جمله دارد و به صورت یک چندجمله ای خواهد بود.

برای مثال، فرض کنید $a=-2$ بنابراین داریم:

$${}_2F_1[-2,b;c;z]=1+\frac{(-2)b}{c}\frac{z}{1!}+\frac{(-2)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+0$$

چون جملات چهارم به بعد برابر صفر هستند،

$${}_2F_1[-2,b;c;z]=1-\frac{2b}{c}\frac{z}{1!}+\frac{b(b+1)}{c(c+1)}z^2$$

پروفسور والیس [۲] از دانشگاه آکسفورد اولین بار عبارت "فوق هندسی" را برای هر سری که فراتر ازسری

هندسی عادی

$$1+x+x^2+...$$

باشد، مورد استفاده قرار داد. در حقیقت پروفسور والیس سری های به فرم

$$1+a+a(a+1)+a(a+1)(a+2)+....$$

[۱] C. F. Gauss (1777-1855)

[۲] J. Wallis(1616-1703)

را مطالعه می‌کرد. در طی ۱۵۰ سال بعد بسیاری از ریاضیدانان سری های مشابه را مورد مطالعه قرار دادند. در این میان اویلر[۳] نتایج زیادی از جمله رابطهٔ مشهور

$$_2F_1[-n,b;c;z]=(1-z)^{c+n-b}\ {}_2F_1[c+n,c-b;c;z], \qquad (۲)$$

را در این زمینه بدست آورد.

در سال ۱۷۷۰،واندرموند[۴] قضیه خود را که یک توسیع از قضیه دو جمله ای به فرم زیر بود، بیان نمود:

$$_2F_1[-n\,,\,b\,;\,c\,;1]=\frac{(c-b)(c-b+1)(c-b+2)...(c-b+n-1)}{c(c+1)(c+2)...(c+n-1)} \qquad (۳)$$

اما حدود ۴۰ سال بعد، هندنبرگ[۵] تلاش های زیادی را بر روی بسط های پیچیده از قضیه های دو

جمله ای و چندجمله ای صرف کرد. تمامی اینها در ۲۰ ژانویه ۱۸۱۲ به طور چشمگیری تغییر کرد زمانی که گاوس تز معروف خود با عنوان "مقاله عمومی در مورد سری های نامتناهی" را ارائه داد. در این مقاله این ریاضیدان با استعداد، سری های نامتناهی جدید (۱) را تعریف می‌کند و نمایش $F[a,b;c;z]$ را برای آن بکار می‌برد و همچنین قضیه‌ی مجموع معروف خود

$$_2F_1[a\,,\,b\,;c\,;1]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (۴)$$

را نیز اثبات کرده و روابط زیادی بین دو یا چند نوع از این سری ها را مطرح کرده بود. او به وضوح

نشان داده بود که $_2F_1[a,b;c;z]$ را به عنوان یک تابع چهار متغیره و به عنوان یک سری از z در نظر گرفته است و در یک نوشتار بعدی در ۱۰ فوریه ۱۸۱۲ تکمیل بحث همگرایی این نوع سری ها را ارائه داد.

پیشرفت مهم بعدی در سال ۱۸۳۶ توسط کومر[۶] ساخته شده است، کسی که اولین بار عبارت فوق هندسی را برای سری های به فرم (۱) استفاده کرد. او نشان داد که تابع $_2F_1[a,b;c;z]$ در معادله دیفرانسیل

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\{c-(1+a+b)z\}\frac{dy}{dz}-aby=0 \qquad (۵)$$

[۳] S. L. Euler (1707-1783)

[۴] A. T. Vandermonde (1735-1796)

[۵] C. F. Hindenberg (1741-1808)

[۶] E. E. Kummer (1810-1893)

صدق می کند و در هر ۲۴ راه حل، عبارتی شبیه به تابع گاوس دارد.

در سال ۱۸۷۵، ریمان[۷] قضیه خود را با معرفی توابع P که تعمیمی از تابع گاوس $_2F_1[a,b;c;z]$ هستند، توسیع داد. او همچنین نظریه عمومی تغییر متغیر در معادله دیفرانسیل را مورد بحث قرار داد و این نظریه توسط تامایی[۸] در کار کومر مورد استفاده قرار گرفت. تامایی در سال ۱۸۷۹ بر روی جزئیات روابط بین ۲۴ راه حل کومر کار می‌کرد.
اویلر اولین نمایش انتگرالی تابع گاوس را به کاربرد و نشان داد که:

$$_2F_1[-n,b;c;z] = \frac{n!}{c(c+1)(c+2)...(c+n-1)}\int_0^1 t^{-n-1}(1-t)^{c+n-1}(1-tz)^{-b}dt$$

ایده‌ی اولیه نمایش انتگرالی یک تابع به وسیله‌ی انتگرال روی منحنی بسته ساده با تابع گاما در انتگرالده،

مربوط به پنچرل[۹] می‌باشد. اویلر، گاوس، ریمان و بسیاری از ریاضیدانان بزرگ مقالات زیادی در ارتباط با توابع فوق هندسی نوشته اند اما در مورد توابع فوق هندسی بنیادی یا q - فوق هندسی این گونه نبوده است. گاوس کارهای بسیار مهمی روی این توابع انجام داد که تعدادی از آنها پس از مرگ او منتشر شد. کار اویلر بر توسیع نظریه اعداد و توابع بیضوی موثر واقع شده است. سری q - فوق هندسی، سری های $\sum c_n$ هستند که $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ تابعی کسری از q^n با پارامتر ثابت q باشند که معمولاً $|q| < 1$ فرض می کنند.
گاوس در اولین اثبات برای تعیین علامت مجموع خود از اتحاد سری های q - فوق هندسی استفاده کرد و ژاکوبی در تعیین تعدادی از روش ها برای بیان یک عدد صحیح بر حسب مجموع مربعات دو، چهار، شش و هشت تایی از اعداد، این سری ها را مورد استفاده قرار داده بود که این امر باعث به وجود آمدن توابع بیضوی شد. مطالعه دقیق این سری ها و توابع زمانی به صورت جدی پیش گرفته شد زمانی که آیزنشتاین[۱۰] کسر های مسلسل خود را معرفی کرد. هم زمان با بزرگداشت یک صدمین سال از اولین کار اویلر بر کسر های مسلسل، هین[۱۱] تعریف بنیادی از $_2F_1[a,b;c;z]$ را به صورت زیر ارائه داد:

$$_2\Phi_1\left(\begin{array}{c} q^a, q^b \\ q^c \end{array}; q, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^a;q)_n(q^b;q)_n}{(q^c;q)_n(q;q)_n}x^n, \quad |x|<1$$

[۷] G. F. B. Riemann (1826-1866)

[۸] J. Thomae

[۹] S. Pincherle(1853-1936)

[۱۰] Eisenstein

[۱۱] Hein

بطوری که

$$\lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n}=(a)_n$$
$$\lim_{q\to 1}{}_2\Phi_1\left(\begin{array}{c}q^a,q^b\\ q^c\end{array};q,x\right)={}_2F_1\left(\begin{array}{c}a,b\\ c\end{array};x\right).$$

و پس از آن، هین مقاله اصلی گاوس در مورد سری های فوق هندسی را الگو قرار داد و روابط به هم پیوسته و از آنها بسط کسر های پیوسته را تعیین کرد. همچنین تعدادی از تبدیلات سری و مجموع زیر را نیز بدست آورد:

$${}_2\Phi_1\left(\begin{array}{c}q^a,q^b\\ q^c\end{array};q,q^{c-a-b}\right)=\frac{(q^{c-a};q)_\infty(q^{c-b};q)_\infty}{(q^c;q)_\infty(q^{c-q-b};q)_\infty},\quad |q^{c-a-b}|<1.$$

تامایی [۱۸۷۹] تبدیلات بدست آمده توسط هین را به صورت بسطی از نمایش انتگرالی اویلر نوشت.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل تعریف‌ها، نمادها و قضیه‌های مقدماتی را که در فصل‌های آتی این پایان نامه به کار رفته‌اند را به اختصار بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. تابع گاما برای $\mathrm{Re}(z) > 0$ را می توان با انتگرال گاما به صورت زیر تعریف کرد:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

تابع گاما در معادله تابعی خوش تعریف زیر صدق می کند:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad , \quad \Gamma(1) = 1$$

بیان کننده این مطلب است که برای $n \in \{0, 1, 2, ...\}$،

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

برای مقادیر غیر صحیح z تابع گاما در فرمول انعکاسی زیر صدق می کند:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad z \notin \mathbb{Z}$$

از آنجایی که $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$، ایجاب می کند که:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

در حالت کلی داریم:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha^2 x^2 - 2\beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} e^{\beta^2/\alpha^2}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha \neq 0.$$

علاوه بر این فرمول دو برابر لژاندر را به صورت زیر داریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z), \qquad z \in \mathbb{C}, \quad 2z \neq 0, -1, -2, ...$$

و همچنین فرمول مجانبی استرلینگ:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}, \qquad \mathrm{Re}(z) \to \infty.$$

تعریف ۲.۱.۱. نمایش انتگرالی تابع بتا را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad \mathrm{Re}(x)>0, \quad \mathrm{Re}(y)>0.$$

لم ۳.۱.۱. ارتباط بین تابع بتا و گاما به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad \mathrm{Re}(x)>0, \qquad \mathrm{Re}(y)>0.$$

تعریف ۴.۱.۱. برای تابع بتا یک نمایش انتگرالی دیگر توسط کوشی بیان شده است که می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(r+it)^{\rho}(s-it)^{\sigma}} = \frac{(r+s)^{1-\rho-\sigma}\Gamma(\rho+\sigma-1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)}$$

که $\mathrm{Re}(r)>0\,,\mathrm{Re}(s)>0\,,\mathrm{Re}(\rho+\sigma)>1$.

تعریف ۵.۱.۱. عامل انتقال یا نماد پوک هامر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a)_0 := 1 \qquad , \qquad (a)_k := \prod_{i=1}^{k}(a+i-1) \qquad k=1,2,3,\dots.$$

که می‌تواند به عنوان یک حالت کلی از فاکتوریل بنظر برسد، زیرا:

$$(1)_n = n!\,, \qquad n=0,1,2,\dots.$$

تعریف ۶.۱.۱. عامل q - انتقال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a;q)_0 := 1 \qquad\qquad (a;q)_n := (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), \;\; n=1,2,\dots.$$

نمادگذاری ۷.۱.۱. برای اندیس‌های منفی، عامل انتقال و q - انتقال به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(a)_{-n} = \frac{1}{(a-1)(a-2)\dots(a-n)} = \frac{1}{(a-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n}$$

$$(a;q)_{-n} = \frac{1}{(1-aq^{-1})(1-aq^{-2})\dots(1-aq^{-n})} = \frac{1}{(aq^{-n};q)_n} = \frac{(-q/a)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q/a;q)_n}$$

که $n=0,1,2,\dots$.

نمادگذاری ۸.۱.۱. برای $|q| < 1$ تعریف می‌کنیم:

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$$

نمادگذاری ۹.۱.۱. عامل q - انتقال به صورت زیر قابل توسیع است:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m; q)_n = (a_1;q)_n (a_2;q)_n \cdots (a_m;q)_n$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m; q)_\infty = (a_1;q)_\infty (a_2;q)_\infty \cdots (a_m;q)_\infty$$

تعریف ۱۰.۱.۱. براکت q,ω به صورت زیر تعریف شده است:

$$[n]_{q,\omega} = \frac{\omega(1-q^n)}{(1-q)}$$

تعریف ۱۱.۱.۱. عدد بنیادی یا براکت q به صورت زیر تعریف شده است:

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}\,, \qquad q \neq 1$$

که q - آنالوگ، q - بسط و q - تعمیم از عدد مختلط نیز نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فاکتوریل براکت q به صورت زیر تعریف شده است:

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q\,,$$

تعریف ۱۳.۱.۱. عامل انتقال براکت q به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[a]_{q;n} = \prod_{k=0}^{n-1} [a+k]_q,$$

واضح است که

$$\lim_{q\to 1} [n]_q! = n!\,, \quad \lim_{q\to 1} [a]_q = a,$$

و

$$[a]_{q;n} = (1-q)^{-n}(q^a;q)\,, \qquad \lim_{q\to 1} [a]_{q;n} = (a)_n\,.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. عملگر تفاضل پیشرو به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

تعریف ۱۵.۱.۱. عملگر تفاضل پسرو به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرمول رودریگز[۱] برای توابع متعامد کلاسیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_n(x) = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(w(x)[\sigma(x)]^n \right)$$

که $w(x)$ تابع وزن و چندجمله‌ای $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر صدق می کند:

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0.$$

e_n مقدار نرمال ساز است که برابر است با

$$e_n = \prod_{k=1}^{n} d + (n+k-2)a$$

و در حالت عمومی فرمول نمایش رودریگز نامیده می‌شود.

قضیه ۱۷.۱.۱. (تسلطی لبگDCT) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی باشد و برای $n \to \infty$، $\{f_n\}$ به صورت نقطه‌وار به f همگرا باشد و برای همه n، تابع انتگرال‌پذیری مانند g موجود باشد که $|f_n| < g$.آنگاه f انتگرال‌پذیر بوده و

$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx$$

[۱]Rodrigues' formula

فصل ۲

چند جمله ای های متعامد

چند جمله‌ای‌های متعامد از اهمیت ویژه ای در فیزیک، ریاضی، نظریه تقریب، نظریه انتگرال گیری عددی و ... برخوردار هستند.

۱.۲ چند جمله‌ای‌های متعامد عمومی

تعریف ۱.۱.۲. [۵] یک خانواده از چندجمله‌ای‌های $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ با درجه دقیقاً n برای $n \in \{0,1,2,...\}$ در بازه‌ی (a,b) نسبت به تابع وزن $w(x) \geq 0$ متعامد نامیده می‌شود اگر

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0, \qquad m \neq n, \quad m,n \in \{0,1,2,...\}, \tag{۱.۲}$$

تابع $w(x)$ در بالا یک تابع پیوسته یا تکه ای پیوسته یا انتگرال پذیر است، بطوریکه

$$0 < \int_a^b x^{2n}w(x)dx < \infty \quad \forall n \in \{0,1,2,...\}.$$

در حالت کلی، در این تعریف ممکن است $w(x)dx$ با یک اندازه مثبت $d\alpha(x)$ جابجا شود، که $\alpha(x)$ یک تابع نانزولی کراندار روی بازه ی $[a,b] \cap R$ با تعداد نامتناهی نقاط صعودی است، بطوریکه

$$0 < \int_a^b x^{2n}d\alpha(x) < \infty \quad \forall n \in \{0,1,2,...\}.$$

اگر تابع $\alpha(x)$ در بین نقاط پرش خود یک تابع ثابت باشد، آنگاه دارای توابع وزن مثبت مناسب w_x روی زیر مجموعه شمارش پذیر X در $\mathbb{R}$ است. بنابراین

تعریف ۲.۱.۲. [۵] خانواده $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ روی زیر مجموعه شمارش پذیر X در $\mathbb{R}$ نسبت به توابع وزن w_x متعامد است هرگاه

$$\sum_{x \in X} P_m(x)P_n(x)w_x = 0, \qquad m \neq n, \qquad m,n \in \{0,1,2,...\}. \tag{۲.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲. [۵] توابع حالت $w_x(x \in X)$ روی مجموعه متناهی X با $N+1$ نقطه، تعامد را برای

یک خانواده متناهی از چندجمله ای ها $\{P_n(x)\}_{n=0}^{N}$ به صورت زیر ایجاد می‌کند:

$$\sum_{x\in X} P_m(x)P_n(x)w_x = 0, \qquad m\neq n, \qquad m,n\in\{0,1,2,...,N\}. \tag{۳.۲}$$

روابط تعامد (۱.۲)، (۲.۲) یا (۳.۲) مقادیر ثابت و معینی را برای چند جمله ای های $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تعیین می‌کنند که برابر با نرم دو آنها می باشد. بنابراین

$$\sigma_n = \int_a^b \{P_n(x)\}^2 w(x)dx, \qquad n=0,1,2,...,$$
$$\sigma_n = \sum_{x\in X} \{P_n(x)\}^2 w_x, \qquad n=0,1,2,...,$$

یا

$$\sigma_n = \sum_{x\in X} \{P_n(x)\}^2 w_x, \qquad n=0,1,2,...N,$$

و

$$P_n(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots, \quad n=0,1,2,....$$

آنگاه نرمال سازی های زیر را خواهیم داشت:

۱. $\sigma_n = 1$ برای $n=0,1,2,...$. در این حالت خانواده چندجمله‌ای‌ها، متعامد نرمال نامیده می‌شوند. علاوه بر این اگر $k_n > 0$ آنگاه چندجمله‌ای‌ها به صورت یکتا تعیین می‌شوند.

۲. $k_n = 1$ برای $n=0,1,2,...$. در این حالت خانواده چندجمله‌ای‌های تکین نامیده می‌شوند. همچنین در این حالت چند جمله‌ای‌ها به صورت یکتا تعیین می‌شوند.

تعریف ۴.۱.۲. چندجمله‌ای‌های $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ با درجه دقیقاً n برای $n\in\{0,1,2,...\}$ که نسبت به تابع وزن پیوسته یا انتگرال پذیر $w(x)$ مانند (۱.۲) متعامد هستند، چندجمله‌ای‌های متعامد پیوسته نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۲. چندجمله‌ای‌های $\{P_n(x)\}_{n=0}^{N}$ با درجه دقیقاً n برای $n\in\{0,1,2,...,N\}$ با $N\to\infty$ که نسبت به یک زیر مجموعه شمارش پذیر X در $\mathbb{R}$ مانند روابط (۲.۲) یا (۳.۲) متعامد هستند، چندجمله‌ای‌های متعامد گسسته نامیده می‌شوند.