بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

معیار چبیشف برای انتگرال‌های آبلی

سخنران: علی بخشعلی‌زاده بادکی

زمان: یکشنبه ۲۴ /۶ /۹۲ ساعت ۱۰ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۲– دکتر رسول عاشقی

۳– دکتر مجید گازر

۴– دکتر رضا مزروعی سبدانی

چکیده

در این پایان‌نامه معیاری ارائه خواهد شد که یافتن تعداد صفرهای انتگرال آبلی را ساده می‌کند. این مسأله ناشی از این حقیقت است که اثبات چبیشف کامل بودن یک سیستم می‌تواند با محاسبه رونسکین مشخص شود. نشان دادن اینکه مجموعه‌ای انتگرال آبلی دارای خاصیت چبیشف است تا حد زیادی ساده است و در بعضی موارد ما را قادر می‌سازد که مسأله را از یک راه به طور کامل جبری دوباره فرمول‌بندی کنیم. البته معیاری که در اینجا ارائه خواهد شد برای همه موارد نمی‌تواند به کار برده شود، چون انتگرال‌های آبلی باید دارای ساختار خاصی باشند. و حتی در مواردی که امکان به کارگیری آن وجود دارد، ممکن است شرایط مسأله با شرایط کافی که ارائه می‌دهیم سازگار نباشد. با این حال تأکید می‌کنیم که در صورت به کارگیری این روش، راه حل مسأله بسیار ساده‌تر می‌شود.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

معیار چبیشف برای انتگرال‌های آبلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

علی بخشعلی زاده بادکی

استاد راهنما

دکتر حمید رضا ظهوری زنگنه

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای علی بخشعلی‌زاده بادکی
تحت عنوان

معیار چبیشف برای انتگرال‌های آبلی

در تاریخ ۲۴ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه
۲– استاد مشاور	دکتر رسول عاشقی
۳– استاد داور۱	دکتر مجید گازر
۴– استاد داور۲	دکتر رضا مزروعی سبدانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم...

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر حمید رضا ظهوری زنگنه که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است. همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رسول عاشقی به خاطر قبول مشاوره این پایان نامه کمال قدردانی را دارم.

علی بخشعلی زاده بادکی
اردیبهشت ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه معیاری ارائه خواهد شد که یافتن تعداد صفرهای انتگرال آبلی را ساده می کند. این مسأله ناشی از این حقیقت است که اثبات چبیشف کامل بودن یک سیستم می‌تواند با محاسبه رونسکین مشخص شود. نشان دادن اینکه مجموعه‌ای انتگرال آبلی دارای خاصیت چبیشف است تا حد زیادی ساده است و در بعضی موارد ما را قادر می‌سازد که مسأله را از یک راه به طور کامل جبری دوباره فرمول‌بندی کنیم. البته معیاری که در اینجا ارائه خواهد شد برای همه موارد نمی‌تواند به کار برده شود، چون انتگرال‌های آبلی باید دارای ساختار خاصی باشند. و حتی در مواردی که امکان به کارگیری آن وجود دارد، ممکن است شرایط مسأله با شرایط کافی که ارائه می‌دهیم سازگار نباشد. با این حال تأکید می‌کنیم که در صورت به کارگیری این روش، راه حل مسأله بسیار ساده‌تر می‌شود.

فصل ۱

مقدمه

در سال ۱۹۰۰ میلادی دیوید هیلبرت (۱۸۶۲م- ۱۹۴۳م) در دومین کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس در یک سخنرانی از مسائل ریاضیات سخن گفت و پس از آن هرمن ویل [۱] درباره آن مسائل چنین گفت: «هر کس این مسائل را حل کند به کلاس افتخاری ریاضی‌دانان وارد می‌شود.» او طی این سخنرانی ۲۳ مسئله مرتبط با ریاضیات را عنوان نمود که مسأله شانزدهم آن یکی از این مسائل است که به شرح آن می‌پردازیم:

سیستم معادلات دیفرانسیل مسطح

$$\dot{x} = P_n(x, y), \qquad \dot{y} = Q_n(x, y) \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن P_n و Q_n چندجمله‌ای‌های حقیقی نسبت به دو متغیر x و y با حداکثر درجه n هستند. در این صورت مسأله شانزدهم هیلبرت به سه مسأله زیر تقسیم می‌شود:

مسأله۱: آیا هر میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارد؟

مسأله۲: آیا تعداد سیکل‌های حدی میدان‌های برداری چندجمله‌ای در صفحه با یک ثابت، که فقط به درجه‌ی چندجمله‌ای بستگی دارند کراندار است؟

بیشترین تعداد سیکل‌های حدی با $H(n)$ نشان داده می‌شود و آن را عدد هیلبرت می‌نامند. متذکر می‌شویم که یک سیکل حدی از سیستم (۱.۱) یک مدار بسته ایزوله است. میدان برداری خطی هیچ سیکل حدی ندارد، از این رو $H(1) = 0$.

مسأله۳: آیا کران بالایی برای $H(n)$ موجود است؟

این مسأله با گذشت بیش از یکصدوسیزده سال علیرغم تحقیقات جدی و چاپ صدها مقاله پیرامون آن هنوز برای $n = 2$ باز است. حال در زیر برخی نتایج بدست آمده در این زمینه را بیان می‌کنیم:

در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک[۲] [۸] ادعا کرد که مسأله اول را حل کرده است یعنی برای سیستم (۱.۱) مفروض تعداد

[۱] Herman Weyl [۲] H.Dulac

سیکل‌های حدی متناهی است. در اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی ایلیاشنکو [۱] شکافی در اثبات دولاک یافت. بمن [۲] [۴] توانست خاصیت متناهی بودن تعداد سیکل‌های حدی را برای یک سیستم چندجمله‌ای درجه دوم مفروض ثابت کند. در اوایل سال ۱۹۹۰ میلادی ایلیاشنکو و اکال[۳] در دو مقاله طولانی [۲۸] و [۱۰] به طور مستقل اثبات جدیدی از قضیه متناهی بودن انفرادی را ارائه کردند و شکاف مقاله دولاک را بر طرف کردند در نتیجه پس از گذشت نود سال سوال اول جواب مثبت گرفت و حل شد. ولی تا به حال مسأله ۲ حتی برای $n = ۲$ حل نشده است.

به دلیل پیچیدگی مسأله شانزدهم هیلبرت یک نسخه ساده‌تر این مسأله توسط آرنولد ارائه شد که به مسأله‌ی مماسی یا مسأله‌ی ضعیف شده‌ی هیلبرت یا مسأله بی‌نهایت کوچک معروف است که در ذیل به توصیف آنها می‌پردازیم:

فرض کنید $H = H(x, y)$ یک چندجمله‌ای نسبت به دو متغیر x و y و از درجه $m \geq ۲$ باشد و منحنی‌های مسطح $\gamma \subset \{(x, y) : H(x, y) = h\}$ تشکیل یک خانواده پیوسته از منحنی‌های بسته $\{\gamma_h\}$ را برای $h_۱ < h < h_۲$ بدهند. چندجمله‌ای ۱-فرم، $\omega = f(x, y)dy - g(x, y)dx$ را در نظر بگیرید که در آن $n \geq ۲$، حداکثر درجه $f(x, y)$ و $g(x, y)$ است. آرنولد در [۱، ۲] مسأله زیر را مطرح کرد:

مسأله: برای ثابت‌های m و n حداکثر تعداد صفرهای ایزوله انتگرال آبلی

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \omega. \qquad (۲.۱)$$

را بیابید؟ این عدد را با $z(m, n)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که در مسأله بالا باید تمام خانواده‌های بیضی‌های ممکن $\{\gamma_h\}$ و f و g دلخواه در نظر گرفته شوند. بنابراین مهم نیست که در ساختار ω قبل از g، $+$ یا $-$ قرار گیرد. یادآوری می‌کنیم که انتگرال آبلی، انتگرال ۱-فرم گویا در طول یک بیضی جبری است.

در نگاه اول ممکن است به نظر آید که این دو مسأله هیچ ارتباطی با هم ندارند ولی در ادامه چگونگی ارتباط این دو مسأله را نسبت به هم بیان می‌کنیم. تابع $I(h)$ به صورت انتگرال آبلی (۲.۱) اولین تقریب نسبت به ε از تابع تغییر مکان نگاشت پوانکاره سیستم زیر روی برش متقاطع σ نسبت به γ_h است:

$$\dot{x} = \frac{-\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon f(x, y), \qquad \dot{y} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon g(x, y), \qquad (۳.۱)$$

که $H(x, y)$، $f(x, y)$ و $g(x, y)$ در بالا تعریف شده‌اند. بنابراین تعداد صفرهای ایزوله $I(h)$، کران بالایی از سیکل‌های حدی سیستم (۳.۱) برای ε کوچک است.

واضح است که اگر $m = n + ۱$، آنگاه سیستم (۳.۱) حالت خاصی از سیستم (۱.۱) وابسته به تابع هامیلتونی برای ε کوچک است. با توجه به این نکته، این مسأله مسأله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت (مماسی یا بی‌نهایت کوچک) نامیده شده است. عدد $z(n) = z(n + ۱, n)$ می‌تواند به عنوان کران پایینی از عدد هیلبرت $H(n)$ انتخاب شود.

وارچنکو [۴] و خوانسکی [۵] ثابت کردند که برای m و n داده شده عدد $z(m, n)$ نسبت به انتخاب چندجمله‌ای H،

[۱]Yu.Ilyashenko [۲]R.Bamon [۳]J.Ecale [۴]A.Varchenko [۵]A.Khovanskii

خانواده بیضی‌های $\{\gamma_h\}$ و ۱-فرم ω به طور یکنواخت کراندار است.

حال ارتباط بین تعداد صفرهای انتگرال آبلی و تعداد سیکل‌های حدی سیستم‌های دیفرانسیل چندجمله‌ای مسطح را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم چندجمله‌ای $H(x,y)$ از درجه m متناظر با میدان برداری هامیلتونی X_H:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \tag{۴.۱}$$

و سیستم مختل شده

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon g(x,y) \tag{۵.۱}$$

است که در آن f و g چندجمله‌ای‌هایی نسبت به دو متغیر x و y از درجه n و ε پارامتر کوچکی است. فرض کنید خانواده‌ای از بیضی‌های $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$ وجود دارد که به طور پیوسته توسط $h \in (a,b)$ پارامتری شده‌اند. آنگاه انتگرال آبلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \omega = \oint_{\gamma_h} f(x,y)dy - g(x,y)dx. \tag{۶.۱}$$

واضح است که $\{\gamma_h\}$ها برای $h \in (a,b)$ یک طوق تناوبی از مدارهای تناوبی سیستم هامیلتونی (۴.۱) تشکیل می‌دهد که آن را با G_h نشان می‌دهیم. بنابراین

$$G_h = \{\gamma_h : h \in (a,b)\}.$$

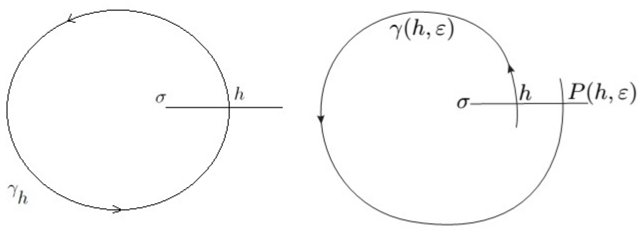
سؤال: چه تعداد از مدارهای تناوبی سیستم مختل شده (۵.۱) برای ε کوچک سالم باقی می‌مانند؟ متذکر می‌شویم که اگر تعداد مدارهای تناوبی باقیمانده متناهی باشد، آنگاه آنها سیکل‌های حدی (۵.۱) هستند.

این سوال می‌تواند به صورت دیگری نیز مطرح شود: آیا امکان دارد یک مقدار $h \in (a,b)$ و مدارهای تناوبی Γ_ϵ از سیستم مختل‌شده (۵.۱) پیدا کنیم به طوری که هرگاه $\varepsilon \to 0$، Γ_ε به γ_h میل کند (محاسبه فاصله و حد با متر هاسدورف اندازه‌گیری می‌شود)؟

برای پاسخ به این سوال، برش σ که متقاطع با خانواده‌ی منحنی‌های تراز γ_h است را در نظر می‌گیریم که توسط h پارامتری شده‌اند. هرگاه $\gamma(h,\varepsilon)$ مدار دستگاه مختل شده (۵.۱) با نقطه شروع h در σ باشد با استفاده از قضیه تابع ضمنی برای ε به اندازه کافی کوچک، این مدار دوباره برش σ را در نقطه‌ای یکتا قطع خواهد کرد که آن را با $P(h,\varepsilon)$ نشان می‌دهیم (شکل ۱.۱ را ببینید).

تعریف ۱.۰.۱

با استفاده از نمادهای فوق، $d(h,\varepsilon) = P(h,\varepsilon) - h$ تابع تغییر مکان نامیده می‌شود. ▲



شکل ۱.۱: هندسه تابع تغییر مکان

قضیه ۲.۰.۱ [۶]
داریم

$$d(h,\varepsilon)=\varepsilon(I(h)+\varepsilon\phi(h,\varepsilon)) \tag{۷.۱}$$

که $\phi(h,\varepsilon)$ تحلیلی است و برای (h,ε) در یک ناحیه فشرده نزدیک $(h,0)$ با $h\in(a,b)$، به طور یکنواخت کراندار است.

برهان. با توجه به تعریف فوق، تابع تغییر مکان به صورت تفاضلی از تابع H در نقاط انتهایی $\gamma(h,\varepsilon)$ است یعنی

$$d(h,\varepsilon)=\int_{\gamma(h,\varepsilon)}dH=\int_{\gamma(h,\varepsilon)}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

با جایگزینی (۵.۱) در طرف راست داریم

$$d(h,\varepsilon)=\varepsilon\int_{\gamma(h,\varepsilon)}\left(\frac{\partial H}{\partial x}f+\frac{\partial H}{\partial y}g\right)dt=\varepsilon\left[\oint_{\gamma_h}(\dot{y}f-\dot{x}g)\,dt+O(\varepsilon)\right]$$

متذکر می‌شویم که وقتی $\varepsilon\to 0$ آنگاه $\gamma(h,\varepsilon)$ به طور یکنواخت به γ_h همگراست چون γ_h فشرده است. از طرف دیگر طبق (۴.۱) در طول γ_h داریم $\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{dy}{dt}$ و $\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{dx}{dt}$. در نتیجه (۷.۱) بدست می‌آید که در آن $I(h)$ در (۶.۱) تعریف شده است. بنابراین

$$d(h,\varepsilon)=\varepsilon\left[\oint_{\gamma_h}(f(x,y)dy-g(x,y)dx)+\varepsilon\varphi(h,\varepsilon)\right]=\varepsilon\left(I(h)+\varepsilon\varphi(h,\varepsilon)\right).$$

■

تذکر ۳.۰.۱ [۶]
متذکر می‌شویم تعداد صفرهای تابع تغییر مکان مستقل از انتخاب برش متقاطع σ است. ★

از قضیه ۲.۰.۱ نتیجه زیر را برای پاسخ به سؤال بالا بدست می‌آوریم. از X_H و $X_{H,\varepsilon}$ به ترتیب برای نشان دادن سیستم هامیلتونی (۴.۱) و مختل شده (۵.۱) استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴.۰.۱ [۶]

اگر $h^* \in (a,b)$ و $\varepsilon^* > ۰$ موجود باشند به طوری که (۵.۱) دارای یک سیکل حدی Γ_ϵ برای $۰ < |\varepsilon| < \varepsilon^*$ باشد و وقتی که $\varepsilon \to ۰$، Γ_ε به γ_h میل کند آنگاه می‌گوییم که Γ_h از γ_h^* منشعب شده است. همچنین می‌گوییم که سیکل حدی Γ از سیستم (۵.۱) از طوق تناوبی G_h از سیستم (۴.۱) منشعب شده است اگر $h \in (a,b)$ موجود باشد به طوری که Γ از γ_h منشعب شود. ▲

قضیه ۵.۰.۱ [۶]

فرض کنید که $I(h)$ برای $h \in (a,b)$ متحد با صفر نباشد، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر $X_{H,\varepsilon}$ دارای یک سیکل حدی منشعب شده از γ_{h^*} باشد آنگاه $I(h^*) = ۰$.

(۲) اگر $h^* \in (a,b)$ موجود باشد به طوری که $I(h^*) = ۰$، و $I'(h^*) \neq ۰$، آنگاه $X_{H,\varepsilon}$ یک سیکل حدی یکتا دارد که از γ_{h^*} منشعب می‌شود. علاوه بر این، این سیکل حدی هذلولوی است.

(۳) اگر $h^* \in (a,b)$ موجود باشد به طوری که $I(h^*) = I'(h^*) = \ldots = I^{(k-۱)}(h^*) = ۰$ و $I^{(k)}(h^*) \neq ۰$، آنگاه با در نظر گرفتن چندگانگی سیکل‌های حدی $X_{H,\varepsilon}$، حداکثر k سیکل حدی از γ_{h^*} منشعب می‌شود.

(۴) حداکثر تعداد صفرهای ایزوله (با احتساب تکرار) انتگرال آبلی $I(h)$ برای $h \in (a,b)$ کرانی بالا برای تعداد سیکل‌های حدی سیستم (۵.۱) منشعب شده از طوق تناوبی G_h سیستم (۴.۱) است.

مثال ۶.۰.۱

معادله واندرپل [۱]

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^۲ - ۱)\dot{x} + x = ۰$$

که معادل با سیستم

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + \varepsilon(۱ - x^۲)y \tag{۸.۱}$$

است را در نظر بگیرید. وقتی $\varepsilon = ۰$، معادله (۸.۱) یک سیستم هامیلتونی با تابع هامیلتونی $H(x,y) = x^۲ + y^۲$ است و سطوح تراز $\gamma_h := \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : H(x,y) = h\}$ خانواده‌ای از دوایر زیر را تشکیل می‌دهد:

$$G_h = \{\gamma_h : h > ۰\},$$

[۱] Van der Pol

منحنی γ_h را با استفاده از مختصات قطبی $x = h\cos\theta$ و $y = h\sin\theta$ و در جهت ساعتگرد پارامتری می‌کنیم. از فرمول (۶.۱) داریم

$$I(h) = -\oint_{\gamma_h}(1-x^2)ydx = \int_0^{2\pi}(1-h^2\cos^2\theta)h^2(-\sin^2\theta)d\theta = \pi h^2(\frac{h^2}{4}-1)$$

ریشه $h=0$ متناظر با نقطه تکین در مبدا و $h=2$ تنها ریشه مثبت از $I(h)$ است. چون $I'(2) = 4\pi \neq 0$، لذا از قضیه ۵.۰.۱ نتیجه می‌شود که برای ε کوچک سیستم (۸.۱) یک سیکل حدی هذلولوی یکتا دارد و هرگاه $\varepsilon \to 0$ این سیکل حدی به دایره‌ای با شعاع ۲ میل می‌کند. ★

در سال ۲۰۱۱ میلادی نویسندگان مقاله [۱۵] یک معیار جبری به نام معیار چبیشف برای انتگرال‌های آبلی معرفی کردند. این معیار جبری در واقع تعمیمی از معیار ارائه شده در مقاله [۲۹] به مراتب بالاتر است. این معیار برای ساده سازی تعیین تعداد صفرهای انتگرال آبلی است. این مسأله نیز از این حقیقت ناشی می‌شود که تشخیص اینکه یک مجموعه از توابع، یک سیستم چبیشف کامل است می‌تواند تحت شرایطی با محاسبه انجام شود. این در بعضی موارد ما را قادر می‌سازد که مسأله را با روشی کاملاً جبری دوباره فرمول‌بندی کنیم. البته معیاری که در اینجا ارائه می‌شود برای همه موارد نمی‌تواند به کار گرفته شود، چون انتگرال‌های آبلی باید ساختار خاصی داشته باشند و حتی در مواردی که این امکان وجود دارد گاهی شرایط کافی برای استفاده از این روش برقرار نیست. با این حال دوباره تأکید می‌کنیم که در صورت امکان استفاده از آن، کار بسیار ساده می‌شود.

انتگرال آبلی $I(h)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} I(h) &= \oint_h \omega = \oint_{\gamma_h} f(x,y)dy - g(x,y)dx \\ &= \int\int_{H(x,y)\leq h}(f_x+g_y)dxdy = \oint_{\gamma_h}\tilde{g}(x,y)dx, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{gathered} \tilde{g}(x,y) = g(x,y) - g(x,0) + \int_0^y f_x(x,v)dv \\ \tilde{g}_y = (f_x+g_y)|_{\varepsilon=0}, \qquad \tilde{g}(x,0)=0. \end{gathered}$$

حال در اینجا بدون کاستن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} I(h) &= \oint_{\gamma_h}\tilde{g}(x,y)dx = \oint_{\gamma_h}p_n(x)g(y)dx = \oint_{\gamma_h}(\alpha_0x^0+\alpha_1x^1+...+\alpha_nx^n)g(y)dx \\ &= \alpha_0\oint_{\gamma_h}x^0g(y)dx + \alpha_1\oint_{\gamma_h}x^1g(y)dx + ... + \alpha_n\oint_{\gamma_h}x^ng(y)dx \end{aligned}$$

پس $I(h)$ به صورت زیر تجزیه می‌شود

$$\alpha_0 I_0(h)+\alpha_1 I_1(h)+...+\alpha_n I_n(h)$$

که α_kها به پارامترهای اولیه وابسته‌اند و $I_k(h)$ها انتگرال آبلی با $\omega=x^k g(y)dx$ هستند. از این رو مسأله معادل با پیدا کردن یک کران بالا برای تعداد صفرهای ایزوله از هر تابع متعلق به فضای برداری تولید شده توسط $I_k(h)$ها برای $k=0,1,...,n$ است. این مسأله به طور قوی ارتباط با چبیشف بودن پایه‌ای از فضای برداری قبلی دارد.

هدف اصلی این پایان‌نامه ارائه‌ی معیار جبری بسیار مهم بالاست که به معیار چبیشف برای انتگرال‌های آبلی معروف است و اثبات قضایایی مربوط به این معیار است و در ادامه‌ی پایان‌نامه با مطرح کردن مثال‌های متفاوت نحوه استفاده از این معیار جبری را روشن‌تر می‌کنیم. این پایان‌نامه به صورت زیر سازمان دهی می‌شود:

- در فصل دوم مفاهیم و تعاریفی را ارائه می‌دهیم که در طول پایان‌نامه از آنها بهره خواهیم برد.

- در فصل سوم ابتدا معیار جبری چبیشف را معرفی خواهیم کرد، همچنین به ارائه و اثبات سه قضیه بسیار مهم در مقالات [۱۵] و [۳۱] می‌پردازیم که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده خواهیم کرد و در ادامه فصل به ارائه مثال‌های کاربردی برای درک بیشتر از نحوه استفاده از معیار جبری چبیشف خواهیم پرداخت.

- در فصل چهارم ابتدا با استفاده از معیار جبری چبیشف حداکثر تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از سیستم

$$\dot{x}=y, \qquad \dot{y}=x(x-1)(x+\frac{5}{2})^4$$

با تابع هامیلتونی

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{2}x^6-\frac{11}{2}x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{125}{16}x^3+\frac{625}{32}x^2,$$

را بدست می‌آوریم و در ادامه به نحوه توزیع سیکل‌های حدی آن خواهیم پرداخت.

- در فصل پنجم به مطالعه دو خانواده از انتگرال‌های فوق بیضوی کامل از نوع اول برای سیستم هامیلتونی زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\epsilon)\end{aligned} \qquad (۱.۹)$$

هدف اصلی در این فصل بررسی خاصیت چبیشف از فضای برداری حقیقی سه بعدی $\{J_0(h),J_1(h),J_2(h)\}$

است، که در آن

$$J_0(h) = \oint_{L_h} \frac{dx}{y}, \quad J_1(h) = \oint_{L_h} \frac{xdx}{y}, \quad J_2(h) = \oint_{L_h} \frac{x^2dx}{y}$$

به عبارت دقیق‌تر ثابت می‌کنیم که

قضیه ۷.۰.۱

الف) اگر در سیستم (۲.۵) $\alpha = \beta = 0$ و $\gamma = \delta = \epsilon = 1$، آن‌گاه فضای بردار حقیقی از $\{J_{10}(h), J_{11}(h), J_{12}(h)\}$ روی بازه باز $\left(-\frac{1}{140}, 0\right)$ چبیشف است و برای هر α_0، α_1، α_2 حقیقی در $\left(-\frac{1}{140}, 0\right)$ کران دقیق روی تعداد صفرهای $J(h) = \alpha_0 J_{10}(h) + \alpha_1 J_{11}(h) + \alpha_2 J_{12}(h)$ برابر دو است.

ب) اگر در سیستم (۲.۵) $\alpha = 0$، $\beta = -\frac{3}{4}$ و $\gamma = \delta = \epsilon = -\frac{7}{4}$، آن‌گاه فضای برداری حقیقی از $\{J_{20}(h), J_{21}(h), J_{22}(h)\}$ روی بازه باز $\left(-\frac{27}{448}, 0\right)$ یک سیستم چبیشف است و برای هر α_0، α_1، α_2 حقیقی در $\left(-\frac{27}{448}, 0\right)$ کران دقیق روی تعداد صفرهای $J(h) = \alpha_0 J_{20}(h) + \alpha_1 J_{21}(h) + \alpha_2 J_{22}(h)$ برابر دو است.

- در فصل ششم ابتدا به معرفی سیستم لیینارد [1] خاصی پرداخته و دیاگرام انشعاب آن را تحت شرایط خاصی بدست می‌آوریم و در ادامه، سیستم لیینارد چندجمله‌ای از نوع $(6, 8)$ با یک حلقه گوشه‌دار که توسط یک حلقه هموکلینیک با یک نقطه زین محصور شده است را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-1) + \varepsilon \left(x^5 y + \left(\sum_{i=0}^{4} a_i x^i y\right)\right) \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که از سیستم مختل‌شده فوق تحت اختلالات کوچک حداکثر ۹ سیکل حدی منشعب می‌شود.

- در پیوست برنامه‌های نوشته شده توسط نرم افزار محاسبات ریاضی میپل را که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده خواهیم کرد را ارائه می‌دهیم.

---

[1] Lienard

فصل ۲

مفاهیم کلی

در این فصل برخی از مفاهیم پایه و اساسی در نظریه معادلات دیفرانسیل عادی را مرور می‌کنیم و به بیان برخی از نتایج و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی می‌پردازیم.

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

که در آن Pو Q دو چندجمله‌ای نسبت به متغیرهای حقیقی x و y هستند یک دستگاه معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای از درجه‌ی m نامیده می‌شود که در آن m بیشترین درجه‌ی چندجمله‌ای های P و Q است.

۱.۲ دسته بندی نقاط تعادل

تعریف ۱.۱.۲ (جریان دستگاه خطی)
دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax \tag{۱.۲}$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ است در این صورت نگاشت‌هایی به صورت $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ بیانگر حرکت نقاط $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ در امتداد مسیرهای دستگاه (۱.۲) هستند. مجموعه این نگاشت‌ها جریان دستگاه خطی (۱.۲) نامیده می‌شود.

حال دستگاه غیر خطی معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x) \tag{۲.۲}$$

که در آن $f : E \to \mathbb{R}^n$ و E یک زیر مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^n$ است. در این صورت جریان دستگاه غیرخطی (۲.۲) به صورت زیر تعریف می‌شود.
به ازای $x_\circ \in E$، فرض کنید $\varphi(t, x_\circ)$ جواب دستگاه (۲.۲) با شرط اولیه $x(\circ) = x_\circ$ باشد که در بازه ماکسیمال $I(x_\circ)$ تعریف شده است. در این صورت برای $t \in I(x_\circ)$ نگاشت $\varphi_t : E \to E$ که با $\varphi_t(x_\circ) = \varphi(t, x_\circ)$ تعریف می‌شود جریان معادله دیفرانسیل (۲.۲) نامیده می‌شود. ▲

تعریف ۲.۱.۲
نقطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه تعادل برای دستگاه $\dot{x} = f(x)$ نامیده می‌شود هرگاه $f(\bar{x}) = \circ$. ▲

فرض کنیم p یک نقطه تعادل میدان برداری مسطح $X = (P, Q)$ باشد. در حالت کلی مطالعه‌ی رفتار موضعی جریان سیستم نزدیک p کاملا پیچیده است. ماتریس

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

را قسمت خطی میدان برداری X در نقطه تعادل p نامیم.
نقطه تعادل p را **ناتباهیده** نامیم هرگاه $DX(p)$ مقدار ویژه صفر نداشته باشد.
نقطه تعادل p را **هذلولوی** نامیم هرگاه هر دو مقدار ویژه‌ی $DX(p)$ دارای قسمت حقیقی ناصفر باشد.
نقطه تعادل p را **نیمه هذلولوی** نامیم هرگاه دقیقا یکی از مقادیر ویژه‌ی $DX(p)$ برابر صفر باشد. نقاط تعادل هذلولوی و نیمه هذلولوی را یک نقطه‌ی **تعادل ابتدایی** می‌نامیم.
نقطه تعادل p را **پوچ‌توان** نامیم هرگاه هر دو مقدار ویژه‌ی $DX(p)$ برابر با صفر باشند اما $DX(p) \neq \circ$.
نقطه تعادل p را **به صورت خطی صفر** نامیم هرگاه $DX(p) = \circ$.
نقطه تعادل p را یک **مرکز** نامیم هرگاه یک همسایگی باز از p موجود باشد که فقط شامل مدارهای تناوبی باشد.
نقطه تعادل p را به طور خطی یک مرکز نامیم هرگاه مقادیر ویژه‌ی $DX(p)$ موهومی محض باشند. در این حالت اگر میدان برداری X تحلیلی باشد آنگاه X در p یک مرکز یا یک کانون دارد. تمیز دادن بین مرکز و کانون از مسائل سخت و مهم نظریه‌ی کیفی معادلات دیفرانسیل است که مسئله مرکز-کانون نامیده می‌شود.

به منظور مطالعه‌ی نمای فاز موضعی در نقطه‌ی تعادل p، **دترمینان**، **اثر** و **مبین** در نقطه‌ی p را به ترتیب به