فهرست

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه

و تاریخچه ای بر نظریه ی قابلیت اطمینان

۱-۱ مقدمه

از زمان‌های بسیار دور ابزارهای ایمن و قابل اعتماد یکی از نیازهای بشر بوده که رفته رفته با کسب تجربه، این ابزارها بهینه می‌شدند. برای سالیان متمادی، روش سعی و خطا تنها روش در کسب تجربه وساخت ابزارهای ایمن‌تر و قابل اعتمادتر بوده است.

قابلیت اطمینان مفهومی قدیمی است . باید توجه داشت که تئوری احتمالات به‌تنهایی قادر به پیش‌بینی قابلیت اطمینان و یا ایمنی یک سیستم نیست و باید از سیستم، طرح آن، طریقه عمل و از کار افتادن آن، محیط عمل و تنش‌هایی که تحت آن شرایط واقع می‌شود درک کاملی در اختیار داشت. لذا در اینجاست که باید قضاوت‌های مهندسی را به کار برد. بنابراین تئوری احتمالات فقط ابزاری است تا به وسیله آن اطلاعات یک سیستم را تبدیل به پیش‌بینی عملکرد احتمالی نمود. تعریف‌های بسیاری برای بیان قابلیت اطمینان شده است ولی تعریف زیر یکی از این تعاریفی است که مقبولیت و پذیرش همگانی‌تری یافته است :

" قابلیت اطمینان یک سیستم عبارت است از احتمال عملکرد رضایت‌بخش آن سیستم تحت شرایط کار مشخص برای مدت زمان معین. این تعریف شامل چهار بخش اصلی است: احتمال، عملکرد رضایت‌بخش، زمان و شرایط کار معین. "

مهم‌ترین الزام در مطالعات قابلیت اطمینان، حصول درک کاملی از معیارهای تعیین موفقیت و از کار افتادن سیستم و به‌طور کلی مفاهیم کاربری و عملکرد آن از لحاظ مهندسی می‌باشد. بدون درک کامل از این مفاهیم و معیارها چنین تحلیلی به جز مجموعه‌ای از تمرینات ریاضی نخواهد بود و چه بسا نتایج ناصحیح و گمراه کننده‌ای به دست دهد.

نظریه قابلیت اطمینان[1] یا تحلیل بقاء[2] روش‌های تحلیلی زمان وقوع یک پیشامد است. به عبارت دیگر مجموعه عملیات آماری بر روی متغیر پاسخی است که در آن زمان تا وقوع یک حادثه مورد نظر می‌باشد که حادثه مورد نظر را شکست[3] می‌نامیم. تعریف قابلیت اطمینان بر تعریف شکست بنا شده‌است. برای اندازه‌گیری قابلیت اطمینان، یک سیستم ابتدا به اجزایی شکسته می‌شود و قابلیت اطمینان سیستم بر حسب قابلیت اطمینان اجزای آن بیان می‌گردد. برای محاسبه قابلیت اطمینان هر جزء بر اساس داده‌های آماری در دسترس، مدلی برای نرخ شکست[4] انتخاب می‌شود و پارامترهای آن بر اساس داده‌های موجود تخمین زده می‌شود.

نرخ شکست یکی از مفاهیم مهم در نظریه قابلیت اطمینان است و عبارتست از : احتمال از کار افتادن بعد از زمان معین مثلاً t است؛ با این فرض که واحد تحت بررسی تا مدت زمان tکارکرده باشد. شرایطی که در آن تابع نرخ شکست با گذشت زمان کاهش می‌یابد، توسط نویسندگان متعددی گزارش شده است. مثال‌های روشن آن شامل: فناپذیری یا مرگ تجاری[5]، نقص در سیستم تهویه هوای هواپیماهای بوئینگ ۷۲۰ و یا نقص صنایع هوایی در نیم رساناهایی که حاوی اجزای الکترونیکی بسیار هستند، می‌باشد.

در این میان برای بعضی از پدیده‌های طبیعی نیازمند داشتن مثلاً دو نوع نرخ شکست بطور همزمان هستیم. به همین دلیل دانشمندان در صدد بدست آوردن توزیع‌هایی با چندین نرخ

[1] *Reliability Theory*

[2] *Survival Analysis*

[3] *Failure*

[4] *Failure rate*

[5] *Business mortality*

شکست برآمدند، اغلب این توزیعها، توزیع‌هایی چند پارامتری هستند. در این پایان نامه نیز ما دو توزیع دو پارامتری معرفی می‌کنیم که دارای نرخ شکست صعودی-نزولی هستند.

۱-۲ تاریخچه

در سالهای اخیر توزیع‌های دو پارامتری زیادی معرفی شده‌اند که دارای چند نوع نرخ شکست هستند. توزیع دوپارامتری نمایی- پواسن با نرخ شکست نزولی[۱] توسط کاس[۲] در سال ۲۰۰۶ معرفی شد. این توزیع ترکیبی از توزیع‌های نمایی و پواسن بریده شده در صفر بود. توزیع دو پارامتری دیگری تحت عنوان نمایی- لگاریتمی با نرخ شکست نزولی در سال ۲۰۰۸ توسط طهماسبی و رضایی معرفی شد. این توزیع نیز ترکیبی از توزیع‌های نمایی و لگاریتمی است. در سال ۲۰۰۹ توزیع دو پارامتری سری نمایی- توانی، که دارای نرخ شکست نزولی است، توسط چهکندی و گنجعلی معرفی شد. این توزیع از ترکیب توزیع‌های سری توانی و نمایی به دست می‌آید. توزیع دو پارامتری دیگری نیز تحت عنوان نمایی- پوآسن لیندلی با نرخ شکست نزولی در سال ۲۰۰۹ توسط حسن بکوچ و واگنر باررتو[۳] معرفی شد. این توزیع ترکیبی از توزیع‌های نمایی وپوآسن لیندلی است. اخیرا در سال ۲۰۱۱ توزیع دوپارامتری پواسن- نمایی با نرخ شکست صعودی[٤] توسط وینسنته کاچو و همکارانش[٥] معرفی شده است. این توزیع ترکیبی از توزیع‌های نمایی و پواسن بریده شده در صفر می‌باشد.

[۱] *Decreasing Failure Rate*

[۲] *Coskun Kus*

[۳] *H. S. Bakouch and W. Barreto*

[٤] *Increasing Failure Rate*

[٥] *Vincente G.Cacho, et.al*

توزیع‌های نمایی به علت داشتن نرخ شکست ثابت و داشتن خاصیت عدم حافظه، نقش مرکزی در آنالیز داده‌های بقا بازی می‌کنند. با بسط خانواده نمایی، توزیع‌های دو پارامتری جدیدی معرفی شد که به عنوان رقیبی برای توزیع‌های دو پارامتری طول عمر معمول مانند وایبل، گاما و لگ‌نرمال بودند. در میان توزیع‌های ترکیبی که دو یا سه پارامتری بودند؛ بعضی از این توزیع‌ها دارای نرخ شکست نزولی و یا صعودی ، برخی دارای نرخ شکست نزولی – صعودی هستند که با توجه ماهیت پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در بعضی موارد این توزیع‌های دوپارامتری بهتر از دیگر توزیع‌ها به داده‌ها برازش داده می‌شوند.

۱-۳ ساختار پایان نامه:

علاوه بر توزیع‌های ذکر شده، دراین پایان نامه نیز دو توزیع دو پارامتری معرفی می‌کنیم. در فصل دوم مفاهیم و تعاریف مورد نیاز یادآوری شده، یک روش تولید اعداد تصادفی ذکر شده و در انتهای فصل به معرفی روش عددی نیوتن رافسون و الگوریتم *EM* برای برآورد پارامترها ، پرداخته شده است.

در بخش دوم از فصل سوم، یک توزیع دوپارامتری با نرخ شکست نزولی که ترکیبی از توزیع‌های نمایی و هندسی است، تحت عنوان *EG*[1] معرفی می‌شود. در بخش سوم به بیان ارتباط این توزیع با توزیع‌های دیگر پرداخته و ویژگی‌های گوناگون آن مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی مورد مطالعه

[1] *Exponential-Geometric*

قرار گرفته و پارامترها با استفاده از الگوریتم EM برآورد می‌شوند و در انتهای فصل، ماتریس اطلاع مشاهده شده و مورد انتظار برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی بدست آورده می‌شود.

در ابتدای فصل چهارم، بخش دوم، یک توزیع دوپارامتری که دارای نرخ شکست نزولی و صعودی است معرفی می‌شود، این توزیع بسط توزیع نمایی هندسی ذکر شده در فصل سوم است که تحت عنوان توزیع EEG [1] نام برده می‌شود. در بخش سوم مانند روال فصل سوم به بیان ارتباط این توزیع با توزیع‌های دیگر می‌پردازیم و ویژگی‌های گوناگون آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش چهارم برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی مورد مطالعه قرار گرفته و پارامترها با استفاده از الگوریتم EM برآورد می‌شوند و نیز ماتریس اطلاع مشاهده شده و ماتریس اطلاع مورد انتظار برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی بدست آورده می‌شود.

[1] *Extension of Exponential-Geometric*

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم اساسی

۲-۱ مقدمه

در این فصل تلاش بر این است تا به تعریف تمامی مفاهیم اساسی و مـورد نیـاز در ایـن پایان‌نامه پرداخته شود، باشد که از لحاظ تئوری در درک هر چه بهتر این رساله به خواننـده یـاری رساند.

۲-۲ مفاهیم و تعاریف مورد نیاز

۲-۲-۱ مؤلفه

به هر قطعه، جزء دستگاه، زیر سیستم، واحد عملگر، تجهیزات یا سیستم کـه بتـوان آن را به صورت مجزا در نظر گرفت مؤلفه می‌گویند. قابل ذکر است که مؤلفه مـی‌توانـد شـامل سـخت افزار، نرم افزار یا هر دو و همچنین در حالت‌های خاصی شامل انسان گردد.

۲-۲-۲ توزیع هندسی

توزیع هندسی، توزیعی گسسته است، به این صورت که آزمایشهای ساده مستقلی که هـر کدام دارای احتمال موفقیت p $(۰ < p < ۱)$ هستند را آنقدر تکرار کنیم تا یک موفقیت حاصل شود.
اگر X نشان دهنده تعداد تکرار آزمایشهای ساده لازم باشد آنگاه :

$$P(X = K) = (۱ - p)^{k-۱} p$$

میانگین و واریانس این توزیع نیز به ترتیب $\frac{۱}{p}$ و $\frac{۱}{p^۲}$ می باشد.

گاهی توزیع هندسی را توزیع زمان انتظار گسسته می گویند. این نامگذاری به این جهـت است که اگر انجام یک امتحان برنولی یک واحد زمان طول بکشد، زمان انتظار برای بدست آوردن

اولین موفقیت، دقیقاً عبارت است از متغیر تصادفی X که دارای توزیع هندسی است. متغیر تصادفی از توزیع هندسی نیز یک متغیر بدون حافظه است. (جانسون و همکاران[1]، ۲۰۰۱)

۲-۲-۴ توزیع پاراتو نوع دوم (لوماکس)

متغیر تصادفی X دارای توزیع پاراتو نوع دوم (لوماکس) با پارامترهای α و β است هر گاه تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر تعریف شود(جانسون و همکاران، ۲۰۰۱):

$$f(x;\alpha,\beta)=\alpha\beta(1+\beta x)^{-(\alpha+1)} \qquad x>0,\alpha>0,\beta>0$$

و تابع توزیع آن برابر است با :

$$F(x;\alpha,\beta)=1-(1+\beta x)^{-\alpha} \qquad x>0,\alpha>0,\beta>0$$

۲-۲-۵ توزیع بتا- پریم

توزیع بتا- پریم تعمیم توزیع پاراتو می باشد و تابع چگالی احتمال آن برابر است با :

$$F(x;p,q)=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1+x)^{-p-q} \qquad x>0,\ p>0,\ q>0$$

(جانسون و همکاران، ۲۰۰۱).

۲-۲-۶ تابع قابلیت اطمینان (تابع بقاء)

تابع بقا یکی از اندازه های مطرح در می‌باشد و احتمال این پیشامد که قطعه مورد نظر یا موجود بیش از زمان t عمر کند را نشان می‌دهد؛ به بیان دیگر تابع قابلیت اطمینان احتمال عملکرد درست مولفه در زمان t است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود :

[1] *Johnson and et.al*

$$S(t)=P(T\geq t)=\int_t^\infty f(x)dx=1-F(t) \qquad (۲-۱)$$

که در آن $S(t)$ همان تابع بقا، احتمال بقای مولفه در زمان t است و در فوق تحت عنوان تابع قابلیت اطمینان ذکر شده است.

از (۲-۱) نتیجه می شود :

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{-dS(t)}{dt} \qquad (۲-۲)$$

آشکار است که تابع قابلیت اطمینان تابعی نزولی از t است به طوری که :

$$S(0)=1 \qquad \& \qquad S(\infty)=0$$

به عبارت دیگر با گذشت زمان قابلیت اطمینان موجودی با طول عمر t افزایش پیدا نمی‌کند. (دکینک و همکاران[1] ، ۲۰۰۵ ، لای و وی[2]، ۲۰۰۶)

۲-۲-۷ تابع نرخ شکست

این تابع که با $h(t)$ نشان داده می‌شود به گونه‌ای است که $h(t)\Delta t$ نشان دهنده احتمالی است که یک موجود با عمر t (t ساله) در بازه $[t,t+\Delta t)$ شکست خواهد خورد و به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t\leq T<t+\Delta t\,|\,T\geq t)}{\Delta t} \qquad (۲-۳)$$

$$P(t\leq T<t+\Delta t\,|\,T\geq t)=\frac{P(t\leq T<t+\Delta t, T\geq t)}{P(T\geq t)}$$

$$=\frac{P(t\leq T<t+\Delta t)}{P(T\geq t)}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{S(t)}$$

[1] *Dekking and et.al*

[2] *Lai and Xie*

در نتیجه:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{S(t)\Delta t}=\frac{f(t)}{S(t)} \quad (۲-۴)$$

تابع نرخ شکست از نظر رفتار در مطالعات نقش تعیین کننده‌ای دارد و معمولا با یکی از مدل‌های ثابت، خطی یا چندجمله‌ای مدل‌بندی می‌شود. شکست‌ها در طول زمان تصادفی هستند؛ یعنی هر لحظه امکان شکست وجود دارد و بنابراین T دارای توزیع نمایی است.

حالت دیگر تابع نرخ شکست زمانی است که نرخ شکست با افزایش زمان به دلیل فرسودگی موجود افزایش یابد. در این حالت گوییم سیستم در حال فرسوده شدن است. حالت دیگر اینکه تابع نرخ شکست، تابعی نزولی از t باشد، یعنی نرخ شکست با افزایش زمان کاهش یابد. در این صورت می‌گوییم سیستم در حال جا افتادن است.

تابع نرخ شکست برای بررسی توزیع های طول عمر بسیار مناسب می‌باشد. در واقع این تابع روشی که در آن احتمال لحظه ای شکست برای یک موجود که با عمر آن موجود تغییر می‌کند را توضیح می‌دهد. به بیانی دیگر این تابع تنش‌های مرتبط با عمر را که منجر به شکست می‌شوند، منعکس می‌کند.

هر تابعی که شرایط زیر را داشته باشد می تواند یک تابع نرخ شکست باشد :

۱) $h(t)\geq ۰ \quad :\forall t\in R$

۲) $\lim_{x\to -\infty}\int_{-\infty}^{x} h(t)dt = ۰$

۳) $\lim_{x\to +\infty}\int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \infty$

از رابطه (۲-۴) داریم :

$$h(t)=-\frac{S'(t)}{S(t)}$$

بنابراین :

$$Ln[S(t)]_{\circ}^{t}=-\int_{\circ}^{t}h(u)du \quad \Rightarrow \quad \frac{S(t)}{S(\circ)}=\exp[-\int_{\circ}^{t}h(u)du]$$

و چون $S(\circ)=١$ است داریم :

$$S(t)=\exp[-\int_{\circ}^{t}h(u)du]=\exp[-H(t)]$$

$$H(t)=\int_{\circ}^{t}h(u)du=-Ln\,S(t)$$

و تابع نرخ شکست تجمعی نام دارد.

با توجه به اینکه $S(t)=\exp[-\int_{\circ}^{t}h(u)du]$ از رابطه (٢-٤) به راحتی رابطه زیر بدست می‌آید :

$$f(t)=h(t)\ \exp[-\int_{\circ}^{t}h(u)du]\ ;\ t>\circ$$

هر تابع پیوسته با شرایط زیر می‌تواند یک تابع نرخ شکست تجمعی برای یک توزیع پیوسته باشد:

١) $\forall\ t_{١}<t_{٢}\rightarrow H(t_{١})\le H(t_{٢})$

٢) $H(t)$ از راست پیوسته باشد.

(دکینک و همکاران، ٢٠٠٥ ، لای و وی، ٢٠٠٦).

٢-٢-٨ میانگین باقیمانده طول عمر

یکی دیگر از اندازه های مهم در مطالعات طول عمر، میانگین باقیمانده طول عمر است که آن را با $m(t)$ نمایش داده و به صورت زیر می‌کنیم :

$$m(t)=E[T-t|T>t]=\begin{cases}\dfrac{\int_t^{\infty}S(x)dx}{S(t)} & , S(t)>0\\ 0 & S(t)=0\end{cases}$$

(دکینک و همکاران،۲۰۰۵ ، لای و وی، ۲۰۰٦).

۲-۳ تولید داده های تصادفی با استفاده از روش معکوس

متغیر تصادفی پیوسته‌ای را با تابع توزیع F در نظر می‌گیریم. یک روش کلی برای تولید داده‌های تصادفی، روش معکوس است که این روش مبتنی است بر قضیه زیر:

۲-۳-۱ قضیه تبدیل معکوس

فرض می‌کنیم U یک متغیر تصادفی در بازه $(0,1)$ باشد برای هر تابع توزیع پیوسته F، متغیر تصادفی X که به صورت $X=F^{-1}(U)$ تعریف می‌شود، دارای توزیع F است. (به عبارت دیگر $X=F^{-1}(U)$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که $F(X)=U$).

قضیه فوق بیانگر آن است که با تولید متغیر تصادفی U و قرار دادن آن در رابطه $X=F^{-1}(U)$ قادر به تولید متغیر تصادفی X از تابع توزیع پیوسته F خواهیم بود. (مود و همکاران[1]، ۲۰۰۳)

۲-٤ الگوریتم EM

یکی از روشهای برآورد پارامتر در حالتی که مشاهدات به طور کامل در دسترس باشند، روش برآورد ماکزیمم درستنمایی است. گاهی ممکن است مشاهدات بطور کامل موجود نباشند و

[1] *Mood and et.al*

فقدان داده‌ها ناشی از مقادیر گمشده و یا از مکانیسم سانسور کردن یا متغیر پنهان ناشی شده باشد، در این حالت بدست آوردن برآورد ماکزیمم درستنمایی کاری بسیار دشوار است. الگوریتم *EM* یک ابزاری است که در این زمینه کارایی وسیعی دارد. الگوریتم *EM* برای بدست آوردن برآوردگرهای حداکثر درستنمایی است وقتی که، تابع *Log* درستنمایی نسبت به پارامتر یا مجهولات خطی نباشد. بیشترین کاربرد آن زمانی است که با داده‌های گمشده[1] و داده‌های ناکامل و یا متغیرهای پنهان[2] مواجه باشیم. بنابراین الگوریتم *EM* یک الگوریتم محاسبهٔ عددی برای بدست آوردن برآوردگرهای *MLE* است. هر حلقه الگوریتم *EM* شامل دوگام است. گام *E* و گام *M*. در گام *E* یا گام امید ریاضی با فرض اینکه داده‌های مشاهده شده و برآورد پارامترهای مدل معلوم هستند، داده‌های گمشده برآورد می‌شوند. این گام با استفاده از امید شرطی بدست می‌آید. در گام *M* یا گام حداکثر کردن، تابع در ستنمایی تحت فرض اینکه داده‌های گمشده معلوم هستند، ماکزیمم می‌شود که برآورد داده‌های گمشده از گام *E*، به جای داده‌های گمشده اصلی استفاده می‌شوند. در این الگوریتم همگرایی قطعی است چون در هر مرحله تابع درستنمایی ماکزیمم می‌شود.

در این بخش ابتدا به بررسی اجمالی الگوریتم *EM* و بیان برخی مزایا و معایب آن می‌پردازیم. سپس در خصوص همگرایی الگوریتم *EM* مطالبی را عنوان می‌کنیم. (مطالب این بخش از مک‌لاچلان و کریشنان ، ۲۰۰۸ اقتباس گردیده است.)

---

[1] *Missed value*

[2] *Latent variable*