دانشگاه پیام نور مرکز تبریز

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

بررسی p – پایداری در روش های چندگامی خطی متقارن برای حل عددی مسائل اولیه متناوب

استاد راهنما:

دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

استاد مشاور:

دکتر مهدی صحت خواه

پژوهشگر:

سمیه سیف اله زاده

بهمن ماه ۱۳۸۶

نام خانوادگی دانشجو: سیف اله زاده نام: سمیه

عنوان: بررسی p – پایداری در روش های چندگامی خطی متقارن برای حل عددی مسائل اولیه متناوب

استاد راهنما: دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

استاد مشاور: دکتر مهدی صحت خواه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ماه ۸٦ تعداد صفحات: ۸۲ دانشگاه: پیام نور تبریز

واژه های کلیدی : « روش چند گامی، p – پایداری، مساله مقدار اولیه مرتبه دوم با جواب های متناوب »

چکیده

در پایان نامه حاضر، ابتدا به تعریف روش های چندگامی و سپس چندگامی متقارن پرداخته و شرایطی را برای روش های چند گامی متقارن برای داشتن بازه تناوب غیر صفر ارائه می دهیم. پس از آن، روشی را برای یافتن بازه تناوب معرفی می کنیم و در آخر نوع جدیدی از روش های چند گامی p – پایدار را برای حل مسائل مقدار اولیه متناوب معرفی می کنیم، نتایج عددی به دست آمده از حل مسائل متناوب مشهوربه وسیله این روش، صحت، کارایی و پایداری روش را بیان می کند.

تشکر و قدردانی

خدایا تو می دانی در این لحظه نشاطی توصیف ناپذیر، شادمانی و شعفی آمیخته با شکر در سراسر وجودم موج می زند، احساسی که با هیچ بیانی توانایی شرح و شکر آن را ندارم، دست به درگاهت برمی دارم و عرض می کنم بارالهی از این که به این جانب توفیق تلاش در راه کسب دانش و رسیدن به این مرحله را داده ای تو را سپاس می گویم.

همچنین وظیفه خود می دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی استاد و راهنمای این جانب، به خاطر راهنمایی های صمیمانه و اظهارنظرهای ارزشمندشان در جهت تدوین این پایان نامه کمال تشکر و قدردانی را بنمایم.

و از استاد ارجمند جناب آقای دکتر صحت خواه مدیر گروه ریاضی دانشگاه پیام نور مرکز تبریز به لحاظ توصیه‌های ارزنده‌شان در مشاوره پایان نامه حاضر، صمیمانه سپاس گذاری می‌نمایم.

در این جا لازم می بینم از استاد گرامی جناب آقای دکتر خیری که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته اند، تشکر و قدردانی نمایم.

ضمناً از پدر و مادر عزیزم به خاطر محبت های بی پایان و همکاری گرم و صمیمی شان در این دوره تحصیلی قدردانی نموده و موفقیت خودم را مدیون آنها می‌دانم.

در پایان از تمامی عزیزانی که در تهیه و تنظیم این پروژه مرا یاری دادند صمیمانه تشکر می‌کنم.

سمیه سیف اله زاده

بهمن ماه ۸۶

فهرست مطالب

مقدمه

مکانیک سماوی قسمتی از فیزیک فضا را تشکیل می دهد که در آن حرکت اجرام آسمانی مورد مطالعه قرار می گیرد. در مکانیک سماوی از موضوعات مکانیک کلاسیک و روابط قوانین آن استفاده می گردد. مکانیک کلاسیک اغلب برای مطالعه میدان گرانش و اثرات آن روی اجسامی مانند سیارات، ماهواره ها، سفینه ها و موشک های فضا پیما به کار می رود. البته لازم به ذکر است که علاوه بر نیروی گرانشی عوامل دیگری مانند مقاومت اتمسفر روی مدار اجسام و یا بر هم کنش های پلاسمایی مانند بادهای خورشیدی و یا شهاب سنگ ها نیز در توصیف مکانیک سماوی دخالت دارند.

می توان گفت که بین حرکت سیارات حول خورشید و مساله حرکت الکترون ها حول هسته اتم، مشابهت وجود دارد. به عبارت دیگر حرکت سیارات یک حالت تقریباً ماکروسکوپی در ابعاد خیلی بزرگ از حرکت در درون اتم است، هر چند که ماهیت این دو پدیده تفاوت های زیادی باهم دارد. بنابرین از همین جا اهمیت مکانیک سماوی، مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتمی روشن می گردد.

روشن است که بیشتر اطلاعات و آگاهی های انسان در مورد اجرام آسمانی به وسیله ماهواره ها و سفینه های فضایی که به وسیله انسان به فضا پرتاب می شوند، حاصل می

شود. اما دانستن این مطلب که یک سفینه تحت چه شرایطی باید در فضا حرکت کند و یا چگونگی قرار گرفتن آن در مدار زمین، از جمله مسائلی است که به وسیله مکانیک سماوی مطالعه و تشریح می گردند و همین امر اهمیت مکانیک سماوی را روشن می کند.

اما واقعیت این است که تمامی این فعالیت ها و مطالعات چه در زمینه مکانیک سماوی یا مکانیک کوانتم و یا فیزیک الکترونیک و حتی شیمی اکثر اوقات تبدیل به معادلات دیفرانسیل و مسائلی به صورت

$$y'' = f(x, y)$$

$$y(x_\circ) = y_\circ, y'(x_\circ) = y'_\circ \qquad (۱)$$

می شوند که با توجه به مطالب گفته شده، اهمیت علم ریاضی و به خصوص معادلات دیفرانسیل را مشخص می کند. حل عددی این مسائل به صورت دقیق و محاسبات ساده و کار آمد می تواند کمک شایانی به علوم گفته شده کند.

در سال ۱۹۷۶ تعریف p — پایداری و بازه تناوب روش های چند گامی خطی دارای ضرایب ثابت توسط لامبرت و واتسون [۲] ارائه شد. آنها نشان دادند روش های چند گامی متقارن برای حل مسائل مقدار اولیه متناوب مرتبه دوم مناسب هستند. در آن زمان برای حل این گونه مسائل از روش های اشتورمر کاول از دسته روش های چند گامی خطی، استفاده می شد که دارای نقص و ناکارایی بود. این نقص یا به عبارتی ناپایداری مداری زمانی رخ می داد که عدد گام یا همان k بزرگتر از ۲ می شد، در آن صورت خطا به صورت معادلات درجه دو در زمان رشد می کرد و این مانعی در رفتار انتگرال گیری های بزرگ بود. برای مثال، این ناکارایی در محاسبات مداری یا به عبارتی مساله حرکت یکنواخت اجسام در مدار دایره ای، باعث می شد که حرکت متناوب اجسام در آن مسیر، تبدیل به مارپیچ هایی شود که به سمت مرکز دایره در حرکت اند. لذا برای حل این معضل روش

های چندگامی متقارن مطرح شدند. بعد از آن و به خصوص در دهه اخیر فعالیت های زیادی در زمینه حل عددی مسائل مقدار اولیه مرتبه دوم صورت گرفته که نتایج این فعالیت ها روش هایی است که برای حل مسائل مکانیک سماوی و سایر علوم به کار می رود.

هدف این پایان نامه توسعه نوع جدیدی از روش های چند گامی $p-$ پایدار است که دارای جوابی دقیق برای مساله (۱) است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل چند مفهوم مقدماتی معرفی و نمادهایی را برای ساده کردن مفاهیم فصل های بعدی بیان می‌کنیم.

۱.۱ معادله دیفرانسیل و مساله مقدار اولیه

معادله دیفرانسیل رابطه ای بین متغیر تابع، متغیر مستقل و مشتقات متغیر تابع نسبت به متغیر مستقل می باشد. بنابرین یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به صورت زیر است.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

منظور از جواب این معادله دیفرانسیل، تابعی به شکل $y = \phi(x)$ است که خود و مشتقات متوالی آن در رابطه فوق صدق می کنند. هرگاه علاوه بر معادله بالا، مقادیر$y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)$ در نقطه $x = x_0$ معین باشند(که به شرایط اولیه معروف هستند) آنگاه آن را یک مساله مقدار اولیه گویند. لذا یک مساله مقدار اولیه برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول عبارت است از:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

۲.۱ قضیه وجود ومنحصر بفردی

فرض کنید تابع حقیقی f در دو شرط زیر صدق کند؛

الف) fروی ناحیه مستطیلی $D : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty$ که a و b متناهی هستند، معین وپیوسته باشد.

ب) عدد مثبت ثابتی مانند L وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $(x, y) \in D$ و

(x, y^*)، داشته باشیم :

$$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq L|y - y^*|$$

همچنین η یک عدد مفروض باشد،آنگاه دقیقاً یک تابع $y(x)$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می کند.

- برای هر$x \in [a,b]$،تابع $y(x)$ پیوسته و مشتق پذیر است.
- $x \in [a,b]$، $y'(x) = f(x, y(x))$
- $y(a) = \eta$

۳.۱ مساله مقدار اولیه برای دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

صورت کلی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول معمولی عبارت است

$$\begin{array}{lcl} {}^1y' = {}^1f(x, {}^1y, {}^2y, ..., {}^my) & ، & {}^1y(a) = {}^1\eta \\ {}^2y' = {}^2f(x, {}^1y, {}^2y, ..., {}^my) & ، & {}^2y(a) = {}^2\eta \\ \vdots & & \vdots \\ {}^my' = {}^mf(x, {}^1y, {}^2y, ..., {}^my) & ، & {}^my(a) = {}^m\eta \end{array}$$

فرض کنید

$$\mathbf{y} = [{}^1y, {}^2y, ..., {}^my]^T, \mathbf{f} = [{}^1f, {}^2f, ..., {}^mf]^T = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \eta = [{}^1\eta, {}^2\eta, ..., {}^m\eta]^T$$

با این نماد گذاری، مساله مقدار اولیه فوق را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \qquad \mathbf{y}(a) = \eta$$

هرگاه ناحیه مستطیلی D را به صورت زیر تعریف کنیم

$$a \leq x \leq b \quad ، \quad -\infty < {}^{i}y < +\infty \quad ، \quad i = ۱, ۲, ..., m$$

و به جای شرط (ب) از قضیه وجودی و منحصر بفردی قرار دهیم

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*)\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|$$

که $(x, \mathbf{y}^*), (x, \mathbf{y}) \in D$ و $\|.\|$ یک نرم برداری است. آنگاه قضیه وجودی و منحصربفردی، وجود یک جواب منحصربفرد را تضمین می کند.

۴.۱ تبدیل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا به دستگاه معادلات مرتبه اول

معادله مرتبه m زیر را در نظر بگیرید

$$y^{(m)} = f(x, y^{(۱)}, y^{(۲)}, ..., y^{(m-۱)}) \quad ، \quad y^{(t)}(a) = \eta_t \quad ، \quad t = ۰, ۱, ..., m - ۱$$

متغیرهای جدید ${}^{i}y$ ، $i = ۱, ۲, ..., m$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} {}^{۱}y &\equiv y(\equiv y^{(۰)}) \\ {}^{۲}y &\equiv {}^{۱}y'(\equiv y^{(۱)}) \\ {}^{۳}y &\equiv {}^{۲}y'(\equiv y^{(۲)}) \\ &\vdots \qquad \vdots \\ {}^{m}y &\equiv {}^{m-۱}y'(\equiv y^{(m-۱)}) \end{aligned}$$

در نتیجه با این تغیر متغیر، معادله مرتبه m—ام فوق به یک دستگاه مرتبه اول به شکل زیر

تبدیل می شود.

$$
\begin{aligned}
{}^{1}y' &= {}^{2}y & {}^{1}y(a) &= {}^{1}\eta \\
{}^{2}y' &= {}^{3}y & {}^{2}y(a) &= {}^{2}\eta \\
&\vdots & &\vdots \\
{}^{m-1}y' &= {}^{m}y & {}^{m-1}y(a) &= {}^{m-1}\eta \\
{}^{m}y' &= {}^{m}f(x, {}^{1}y, {}^{2}y, ..., {}^{m}y) & {}^{m}y(a) &= {}^{m}\eta
\end{aligned}
$$

و یا

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \qquad \mathbf{y}(a) = \eta$$

که در آن

$$\mathbf{f} = [{}^{2}y, {}^{3}y, ..., {}^{m}y, f(x, {}^{1}y, {}^{2}y, ..., {}^{m}y)]^T$$

۵.۱ دستگاه معادلات خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت

دستگاه معادلات مرتبه اول $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ را که در آن $\mathbf{y}$ و $\mathbf{f}$ بردارهای $m-$ بعدی هستند، خطی گویند، هرگاه $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A(x)\mathbf{y} + \phi(x)$ باشد، که درآن $A(x)$ یک ماتریس $m \times m$ و $\phi(x)$ یک بردار $m-$ بعدی است. بعلاوه اگر $A(x) = A$ یک ماتریس ثابت باشد، آنگاه این دستگاه را خطی با ضرایب ثابت می نامند. لذا صورت کلی یک دستگاه خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت چنین است:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \phi(x)$$

فرض کنید A دارای m مقدار ویژه متمایز و احتمالاً مختلط λ_t، $t = 1, 2, ..., m$ و C_t بردار ویژه متناظر با λ_t باشد، همچنین $\psi(x)$ یک جواب خصوصی معادله همگن متناظر با

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت فوق باشد، آنگاه می توان نشان داد که جواب عمومی این دستگاه به صورت زیر است:

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{t=1}^{m} k_t e^{\lambda_t x}\mathbf{C_t} + \psi(x)$$

که k_tها، اعداد ثابت هستند. [۳]

۶.۱ معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

معادلهٔ

$$\gamma_k y_{n+k} + \gamma_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + \gamma_0 y_n = \phi_n \qquad , \qquad n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

که در آن γ_j، $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ ثابت های مستقل از n هستند و $\gamma_k \neq 0$ و $\gamma_0 \neq 0$، را یک معادله تفاضلی خطی مرتبه k—ام گویند، اگر $\sum_{j=0}^{k} \gamma_j \neq 0$ و ϕ_n مستقل از n باشد. یعنی $\phi_n = \phi$، آنگاه $\psi_n = \frac{\phi}{\sum_{j=0}^{k} \gamma_j}$ یک جواب خصوصی این معادله خواهد بود. علاوه بر این می توان نشان داد که:

(۱) اگر r_t، $t = 1, 2, \ldots, k$ ، k ریشه متمایز چند جمله‌ای

$$P(r) = \gamma_k r^k + \gamma_{k-1} r^{k-1} + \ldots + \gamma_0$$

باشد، آنگاه جواب عمومی این معادله تفاضلی عبارت است از:

$$y_n = \sum_{t=1}^{k} d_t r_t^n + \psi_n$$

که ψ_n یک جواب خصوصی معادله تفاضلی و d_t ، $t = 1, 2, \ldots, k$، ثابت های دلخواه هستند.

(۲) اگر r_j، $j = 1, 2, \ldots, p$ ریشه‌های چند جمله‌ای $P(r)$ توصیف شده در (۱) باشد که

مرتبه چندگانگی r_j ، μ_j است و $\sum_{j=1}^{p}\mu_j = k$، آنگاه جواب عمومی معادله تفاضلی عبارت است از:

$$[d_{1,1} + d_{1,2}n + d_{1,3}n(n-1) + ... + d_{1,\mu_1}n(n-1)...(n-\mu_1+2)]r_1^n + [d_{2,1} + d_{2,2}n + d_{2,3}n(n-1) + ... + d_{2,\mu_2}n(n-1)...(n-\mu_2+2)]r_2^n + ... + [d_{p,1} + d_{p,2}n + d_{p,3}n(n-1) + ... + d_{p,\mu_p}n(n-1)...(n-\mu_p+2)]r_p^n + \psi_n$$

که ψ_n یک جواب خصوصی معادله تفاضلی و k ثابت $d_{j,l}$ ، $j = 1, 2, ..., p$ ، $l = 1, 2, ..., \mu_j$، دلخواه هستند. [۳]

فصل ۲

روش های چند گامی خطی

۱.۲ روش های چندگامی خطی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۱.۲ صورت کلی روش های چند گامی خطی

مساله مقدار اولیه برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = f(x,y) \qquad (۱)$$

$$y(a) = \eta$$

می خواهیم جواب را در ناحیه $a \leq x \leq b$ که a و b متناهی هستند، بیابیم. لذا فرض می کنیم که تابع f در شرایط مطرح شده در قضیه وجودی و منحصر بفردی صدق کند (رجوع شود به بخش ۴.۱)؛ در این صورت وجود یک جواب منحصر بفرد و مشتق پذیر پیوسته برای معادله (۱) تضمین می شود که آن را با y نشان می دهیم. دنباله نقاط $\{x_n\}$ را که به صورت $x_n = a + nh$ ، $n = ۰, ۱, ۲, ...$ تعریف شده اند و h را که عددی حقیقی و ثابت موسوم به طول گام است را در نظر بگیرید. خاصیتی که اکثر روش های محاسبه جواب معادله دیفرانسیل (۱) دارا هستند گسسته سازی است. بدین معنی که به جای یافتن جواب های تقریبی در بازه پیوسته $a \leq x \leq b$، جواب های تقریبی را در مجموعه نقاط مجزای $\{x_n | n = ۰, ۱, \ldots, \frac{(b-a)}{h}\}$ می یابند.

به هر حال، فرض کنید y_n تقریب به دست آمده برای مقدار واقعی جواب در x_n (یعنی $y(x_n)$) باشد و $f_n = f(x_n, y_n)$. اگر روش محاسبه برای تعیین دنباله $\{y_n\}$ به شکل یک رابطه خطی بین مقادیر f_{n+j} و y_{n+j} ، $j = ۰, ۱, ۲, ..., k$ باشد، روش، k − گامی خطی نامیده می شود.

صورت کلی روش های چند گامی خطی که در آن α_j ها و β_j ها، مقادیر ثابت هستند،

عبارت است از:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \qquad (۲)$$

با این فرض که، $\alpha_k \neq 0$ و α_0 و β_0 همزمان صفر نیستند و علاوه بر این می توان فرض کرد $\alpha_k = 1$.

به این ترتیب مساله یافتن جواب $y(x)$ و به طور کلی جواب مساله (۱) تبدیل به مساله یافتن دنباله y_n که در معادله (۲) صدق می کند، می شود.

روش (۲) را صریح گویند هرگاه $\beta_k = 0$، در این صورت y_{n+k} به طور مستقیم بر حسب f_{n+j} و y_{n+j}، $j = 0, 1, 2, ..., k-1$ به دست می آید و اگر $\beta_k \neq 0$، روش را ضمنی گویند.

در هر مرحله از محاسبه یک روش ضمنی معادله زیر به دست می آید:

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g \qquad (۳)$$

که g یک تابع معلوم بر حسب مقادیر از قبل محاسبه شده f_{n+j} و y_{n+j} ، $j = 0, 1, ..., k-1$ است.

وقتی معادله دیفرانسیل رابطه (۱) خطی باشد، آنگاه رابطه (۳) نیز خطی خواهد بود و به آسانی می توان y_{n+k} را به دست آورد. در صورتی که معادله (۱) غیر خطی باشد، بر طبق قضیه وجودی و منحصر بفردی، جواب منحصر بفردی برای y_{n+k} وجود دارد که می توان آن را از روند تکراری زیر به دست آورد:

$$y_{n+k}^{[s+1]} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + g$$

که در آن $y_{n+k}^{[0]}$ یک مقدار شروع دلخواه است و بایستی شرط $0 \leq M < 1$، که M ثابت لیپ شیتس نسبت به y_{n+k} در سمت راست رابطه (۳)است، برقرار باشد. اگر L ثابت لیپ

شیتس f نسبت به y باشد در این صورت می توان M را برابر $Lh|\beta_k|$ اختیار کرد و جواب منحصر بفردی برای y_{n+k} وجود دارد به عبارتی فرمول همگراست، هرگاه $h < \frac{1}{L|\beta_k|}$، زیرا

$$|h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g - h\beta_k f(x_{n+k}, y^*_{n+k}) - g| \leq M|y_{n+k} - y^*_{n+k}|$$

و یا به عبارتی

$$h|\beta_k||f(x_{n+k}, y_{n+k}) - f(x_{n+k}, y^*_{n+k})| \leq M|y_{n+k} - y^*_{n+k}| \qquad (۴)$$

از طرفی

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*| \qquad (۵)$$

با مقایسه دو رابطه (۴) و (۵) معلوم می شود که $M = Lh|\beta_k|$ و با توجه به این که $M < ۱$، داریم: $Lh|\beta_k| < ۱$
و از آنجا شرط $h < \dfrac{۱}{L|\beta_k|}$، برای همگرایی روش های ضمنی به دست می آید.

۲.۱.۲ محاسبه ضرایب نامعین از روش بسط تیلور

بسط تیلور $y(x_n, h)$ را حول x_n، در نظر بگیرید:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy^{(۱)}(x_n) + \frac{h^۲}{۲!}y^{(۲)}(x_n) + ... \qquad (٦)$$

که در آن

$$y^{(q)}(x_n) = \frac{d^q y}{dx^q}|_{x=x_n}, q = ۱, ۲, ...$$

هرگاه رابطه (٦) را از جمله دوم به بعد قطع کنیم، رابطه زیر حاصل می شود:

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \qquad (۷)$$