بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان:

جاذب‌های ضخیم در فضای پادضرب‌ها

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش هندسه

استاد راهنما:

دکتر فاطمه هلن قانع

استاد مشاور:

دکتر علیرضا زمانی بهابادی

نگارنده:

صدیقه صارمی

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر گرامیم

که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت،
آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان
سرمایه‌های جاودانی زندگی من است

و تقدیم به

خواهران عزیز و مهربانم

قدردانی

اکنون که به یاری خداوند متعال توفیق به پایان رساندن مرحله ی دیگری از تحصیلاتم فراهم گشته برود لازم می‌دانم که از همه ی کسانی که در رسیدن به این مرحله مرا یاری داده اند کمال تشکر را داشته باشم. از استاد ارجمندم سرکار خانم **دکتر فاطمه هلن قانع** که تهیه و تدوین این پایان نامه را مدیون راهنمایی ها و زحمات ایشان می‌دانم کمال تشکر و قدردنی را دارم. از استاد مشاور خود جناب آقای **دکتر علیرضا زمانی** که در طول این مدت از مشاره و راهنمایی بی شائبه‌ی ایشان بهره برده‌ام سپاسگزارم. از اساتید محترم سرکار خانم **دکتر زهرا افشارنژاد** و سرکار خانم **دکتر شیرین حجازیان** که به عنوان اساتید داور قبول زحمت نموده و با مطالعه‌ی این پایان نامه نکات ارزشمندی را به اینجانب متذکرشدند بسیار متشکرم. همچنین از تمام کسانی که چه در دوران تحصیل و چه در دوران تهیه این پایان نامه مرا یاری کرده‌اند تشکر میکنم.

صدیقه صارمی
زمستان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه، به بررسی نگاشت‌های پادضرب و همچنین جاذب‌های آن می‌پردازیم. نگاشت‌های پادضرب از اهمیت خاصی در سیستم‌های دینامیکی برخوردار هستند. دینامیک یک نگاشت پادضرب در عمل با دینامیک یک دستگاه تابع تکرار (یک دستگاه چند مولدی) یکسان است. در این پایان‌نامه دیدگاه‌مان را روی دو دسته از نگاشت‌های پادضرب معطوف می‌کنیم. دسته اول متشکل از نگاشت‌های پادضرب با تار $[0, 1]$ می‌باشند که توسط نگاشت‌های دایره‌ای انبساطی تحمیل می‌شوند و دسته دوم متشکل از نگاشت‌های پادضرب با تار $[0, 1]$ روی نگاشت نوبت برنولی می‌باشند.

در دسته اول نگاشت‌های پادضرب به صورت

$$\begin{aligned} F : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times I \quad &\rightarrow \quad \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times I \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad (kx, f_x(y)) \end{aligned} \tag{1}$$

است که در آن f_x یک C^2-دیفیومورفیسم است که نقاط مرزی بازه‌ی $I = [0, 1]$ را حفظ می‌کند. این دسته از پادضرب‌ها توسط میلنور و بنی‌فانت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. آن‌ها نشان می‌دهند که چگونه علامت مشتق شوارتزی f_x، دینامیک این دسته از نگاشت‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد [2]. فرض کنیم A_0 و A_1 دو دایره‌ی مرزی استوانه‌ای $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times I$ با حوزه‌های جذب به ترتیب B_0 و B_1 باشند. نتایج اصلی که توسط آن‌ها حاصل گردیده است گزاره‌های زیر می‌باشد.

1. اگر مشتق شوارتزی $Sf_x(y)$ منفی باشد و هر دو حوزه‌ی جذب B_1, B_0 از اندازه مثبت باشند در این صورت $B_0 \cup B_1$ از اندازه کامل است.

۲. اگر مشتق شوارتزی $Sf_x(y)$ مثبت باشد آن‌گاه یک اندازه‌ی احتمال یکتا روی استوانه‌ی $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times I$ وجود دارد به طوری که تقریباً هر مدار توزیع یکنواختی بر حسب این اندازه دارد.

در فصل دوم پایان‌نامه این نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرند.
همچنین در این فصل مثالی ارائه می‌شود که در آن حوزه‌های جذب در هم آمیخته می‌شوند. متذکر می‌شویم که دو حوزه جذب $B_۰, B_۱$ را در هم آمیخته می‌نامیم هرگاه اشتراک هر مجموعه‌ی باز با هر دو حوزه از اندازه‌ی مثبت باشد.

در فصل سوم پایان‌نامه به نتایج حاصل از مقاله‌ی [۱] می‌پردازیم. در این مقاله ایلیاشنکو نشان می‌دهد که یک مجموعه‌ی باز در فضای این نگاشت‌های حافظ مرز وجود دارد که هر نگاشت در آن جاذب ضخیم دارد. متذکر می‌شود که نگاشت پادضرب F جاذب ضخیم دارد هرگاه جاذب میلنور آن اندازه لبگ مثبت داشته باشد ولی کامل نباشد. در این فصل نگاشت‌های پادضرب به صورت

$$\begin{aligned} F : \Sigma^۲ \times I &\to \Sigma^۲ \times I \\ (w, x) &\mapsto (\sigma w, f_{w_۰}(x)) \end{aligned} \tag{۲}$$

است که در آن $f_{w_۰}$ یک $C^۲$–دیفیومورفیسم است که نقاط مرزی بازه‌ی $I = [۰, ۱]$ را ثابت نگه می‌دارد. نتیجه اصلی که در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد به صورت زیر است.

هرگاه F یک نگاشت پادضرب به شکل (۲) باشد به طوری که

۱. $f_۰$ تنها دارای دو نقطه‌ی ثابت ۰ و ۱ است که ۰ جاذب و ۱ دافع است و $f_۱$ دارای سه نقطه‌ی ثابت ۰ و ۱ و $a \in (۰, ۱)$ است که ۰ و ۱ برای $f_۱$ دافع و a جاذب است؛

۲. $\lambda = f'(۰) < ۱$، $\mu = f'_۱(۰) > ۱$ و $\lambda\mu > ۱$،

در این صورت نگاشت F جاذب ضخیم دارد.

مقالات زیر در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

1. Y. Ilyashenko, *Thick attractors of step skew products*, Regul. Chaotic Dyn., **15:2-3** (2010), 328-334.

2. A. Bonifant, and J. Milnor, *Schwarzian Derivatives and Cylinder Maps*. Arxiv preprint math0610232 53, **19** (2006).

۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه که پیش نیاز فصل‌های آینده است، می‌پردازیم. قضایایی که در این فصل ارائه گردیده‌اند، قضایای پایه‌ای و مرجع می‌باشند که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت. لذا از بیان اثبات آن‌ها خودداری می‌نمائیم.

۱.۱ C^r-توپولوژی

فرض کنیم M یک C^r-منیفلد، W زیرمجموعه‌ی بازی از M و $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار باشد. f را تابعی از ردهٔ C^r خوانیم، درصورتی که برای هر $p \in M$، یک همسایگی مختصاتی (U, φ) موجود باشد به‌قسمی که $\hat{f} = fo\varphi^{-1}$ روی $\varphi(U \cap W)$ تابعی از رده‌ی C^r باشد. متذکر می‌شویم که این تعریف مستقل از انتخاب (U, φ) است. ([۴] را ببینید).

فرض کنیم M و N دو منیفلد C^r باشند. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را از ردی C^r خوانیم درصورتی که برای هر $p \in M$ بتوان دو همسایگی مختصاتی (U, φ) و (V, ψ) به‌ترتیب حول p و $f(p)$ چنان یافت که $f(U) \subset V$ و $\psi o f o \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ تابعی از ردهٔ C^r باشد. در اینجا تعریف مشتق‌پذیری f از انتخاب زوج‌های (U, φ) و (V, ψ) مستقل است.

تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک C^r-دیفیومورفیسم خوانیم درصورتی که f یک همسان‌ریختی C^r و f^{-1} نگاشتی C^r باشد.

قضیه ۱.۱.۱ (ویتنی). [1] *هر منیفلد هموار و فشرده با بعد m را می‌توان به‌طور هموار به‌عنوان یک زیرمنیفلد بسته در $\mathbb{R}^{2m+1}$ نشاند.*

برهان. [۲۰] را ببینید. $\square$

فرض کنیم $C^r(M, \mathbb{R}^s)$، $r \geqslant 1$، فضای تمام نگاشت‌های C^r از M به $\mathbb{R}^s$ باشد. اگر M فشرده باشد، می‌توان یک پوشش متناهی از همسایگی‌های باز $V_1, ..., V_k$ برای M چنان یافت که هر V_i در دامنهٔ یک همسایگی مختصاتی (U_i, ϕ_i) قرار داشته باشد به‌طوری‌که $\phi_i(V_i) = B_1(0)$ و $\phi_i(U_i) = B_2(0)$ که $B_\varepsilon(x)$ گوی به شعاع ϵ و مرکز x است. برای هر $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ فرض می‌کنیم

$$f_i = fo\varphi_i^{-1} : B_2(0) \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

نرم زیر را روی فضای $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ تعریف می‌کنیم

$$||f||_r = \max_{i=1,...,k} \sup\{||f_i(u)||, ||Df_i(u)||, ..., ||D^r f_i(u)||, u \in B_1(0)\}.$$

[1] Wheiney

گزاره ۲.۱.۱. *$\|\ \|_r$ یک نرم کامل روی $C^r(M,\mathbb{R}^s)$ است.*

برهان. ([۱۹] را ببینید). $\square$

اکنون فرض کنیم M یک منیفلد فشرده و N یک منیفلد بسته باشد. به‌کمک قضیهٔ ویتنی می‌توان N را در فضای اقلیدسی مانند $\mathbb{R}^s$ نشاند. بنابراین $C^r(M,N)\subset C^r(M,\mathbb{R}^s)$. درنتیجه می‌توان توپولوژی حاصل از نرم بالا را روی $C^r(M,N)$ به‌عنوان زیرفضایی از $C^r(M,\mathbb{R}^s)$ درنظر گرفت. می‌توان نشان داد این توپولوژی مستقل از نشاندن N می‌باشد. ([۱۹] را ببینید).

فضای C^r-دیفیومورفیسم‌های روی منیفلد M با توپولوژی C^r را به‌عنوان زیرفضایی از $C^r(M,N)$ درنظر می‌گیریم و آن را با $Diff^r(M)$ نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که $Diff^r(M)$ مجموعه‌ای باز در $C^r(M,M)$ است([۱۹] را ببینید).

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم $f\in Diff^r(M)$ و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. یک $C_r-\varepsilon$ همسایگی از f در $Diff^r(M)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N^r_\varepsilon(f)=\{g\in Diff^r(M)\ ;\ \|f-g\|_r<\varepsilon\}\ .$$

هرگاه ε به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، هر دیفیومورفیسم g که در $C^r-\varepsilon$ همسایگی f واقع شود را یک $C^r-\varepsilon$- اختلال[1] از f می‌نامیم.

۲.۱ سیستم‌های دینامیکی و متریک ریمانی

به سه‌تایی $\{T,X,\varphi_t\}$ یک سیستم دینامیکی[2] گوییم، که در آن T مجموعه‌ی زمان ، X فضای حالت و $\varphi_t:X\to X$ یک خانواده از عملگرها می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$۱)\qquad \varphi_0=id\ ,$$

$$۲)\qquad \varphi_{t+s}=\varphi_t+\varphi_s\ ,\ \ \forall t,s\in T$$

[1] perturbation
[2] dynamical system

مجموعه‌ی زمان T می‌تواند مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، به سیستم نوع اول سیستم دینامیکی گسسته[۱] و به دیگری سیستم دینامیکی پیوسته[۲] گوییم. ما در این پایان‌نامه، با سیستم دینامیکی گسسته سرو کار داریم. اکنون می‌خواهیم یک متریک ویژه که به متریک ریمانی معروف است روی منیفلد M تعریف کنیم.

روی منیفلد M یک متریک ریمانی[۳] ، تابعی مانند $\phi : p \to \phi_p$، $p \in M$، است که در آن ϕ_p یک ۲–تانسور متقارن و معین مثبت روی فضای مماسی بر M در نقطه‌ی p می‌باشد، یعنی برای هر w, v, u و $\alpha \in R$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&۱) \quad \phi_p(\alpha v, w) = \phi_p(v, \alpha w) = \alpha \phi_p(v, w) \\
&۲) \quad \phi_p(v, w + u) = \phi_p(v, w) + \phi_p(v, u) \\
&\qquad \phi_p(v + w, u) = \phi_p(v, u) + \phi_p(w, u) \\
&۳) \quad \phi_p(v, v) = ۰ \leftrightarrow v = ۰, \phi_p(v, v) > ۰ \\
&۴) \quad \phi_p(v, w) = \phi_p(w, v)
\end{aligned}
$$

به علاوه، برای هر جفت از میدان‌های برداری هموار X و Y که روی یک مجموعه‌ی باز $U \subset M$ تعریف شده‌اند، تابع $\phi_p(X, Y) : U \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر

$$[\phi_p(X, Y)](p) = \phi_p(X(p), Y(p))$$

باید تابعی هموار باشد. منیفلد M همراه با متریک ریمانی را منیفلد ریمانی[۴] گوییم.

هر منحنی به طور قطعه‌ای $C^۱$ در روی M را یک $D^۱$–منحنی می‌نامیم. برای هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$، فاصله‌ی این دو نقطه را اینفیمم طول تمام $D^۱$–منحنی‌ها از p به q تعریف می‌کنیم و آن را با $d(p, q)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱. *هر منیفلد همبند ریمانی یک فضای متریک است که در آن $d(p, q)$ به صورت بالا تعریف می‌شود بعلاوه، توپولوژی این فضای متریک، همان توپولوژی اولیه‌ی منیفلد است.*

[1] discrete dynamical system
[2] continuous dynamical system
[3] Reimannian metric
[4] Riemannian manifold

برهان. [۲۰]، فصل ۵ را ببینید. □

۳.۱ ساختار مداری یک دیفیومورفیسم

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم M یک منیفلد m بعدی باشد و $f \in Diff^r(M)$. برای هر $p \in M$، مدار[1] p تحت نگاشت f عبارت است از $\{f^n(p) | n \in Z\}$. این مجموعه را با $Orb_f(p)$ نمایش می‌دهیم. همچنین f −مدار مثبت p برابر است با

$$Orb_f^+ = \{f^n(p) \mid n \geqslant ۰\}$$

و f − مدار منفی p برابر است با $Orb_f^- = \{f^{-n}(p) \mid n \geqslant ۱\}$. وقتی که $Orb_f(p)$ متناهی باشد گوییم p یک نقطه‌ی تناوبی[2] است. درحالتی که $Orb_f(p)$ فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد یعنی $f(p) = p$، p را نقطه‌ی ثابت[3] f خوانیم.

به کوچکترین عدد صحیح $n \geqslant ۱$ که به‌ازای آن $f^n(p) = p$، دوره‌ی تناوب[4] p گوییم و مجموعه‌ی تمام نقاط تناوبی f را با $per(f)$ نمایش می‌دهیم.

همچنین اگر $f(\Gamma) = \Gamma$ آن‌گاه Γ را f−ناوردا یا به طور خلاصه ناوردا[5] می‌نامیم.

بدیهی است که هر مدار f ناورداست.

نقطه‌ی p را ناسرگردان[6] گوییم اگر برای هر همسایگی V از p ، عدد صحیح $n \neq ۰$ی وجود داشته باشد به طوری که $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. مجموعه‌ی تمام نقاط ناسرگردان f را با $\Omega(f)$ نمایش می‌دهیم.

یک ϵ−زنجیر به طول n از نقطهٔ x به y برای نگاشت f، دنباله‌ی متناهی $\{x = x_۰, ..., x_n = y\}$ است به‌طوری که برای هر j، $۱ \leqslant j \leqslant n$، داشته باشیم

$$d(f(x_{j-۱}), x_j) < \epsilon.$$

[1] orbit
[2] periodic point
[3] fixed point
[4] period
[5] invariant
[6] nonwandering

مجموعه‌ی زنجیر بازگشتی[1] برای f، مجموعه‌ای به‌شکل زیر است

$$R(f) = \{x : \text{برای هر } \epsilon > 0 \text{، یک } \epsilon - \text{زنجیر از } x \text{ به } x \text{ وجود داشته باشد}\}$$

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی w–حدی[2] نقطه‌ی $p \in M$ برای نگاشت f را با $w(p)$ نشان داده می‌دهیم و عبارت است از مجموعه نقاطی مانند $q \in M$ که بتوان دنباله‌ای از اعدا طبیعی مانند $\{n_i\}$ یافت که $f^{n_i}(p) \to q$ وقتی که $n_i \to \infty$، یعنی

$$w(p) = \{q \in M \ ; \ \exists \{n_i\} \ , \ n_i \longrightarrow \infty \ , \ f^{n_i}(p) \to q\}$$

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه α–حدی نقطه‌ی $p \in M$ برای نگاشت f که با $\alpha(f)$ نشان داده می‌شود، متشکل از مجموعه نقاطی مانند $q \in M$ است که بتوان دنباله‌ای مانند $\{n_i\}$ یافت که $f^{n_i}(p) \to q$ وقتی که $n_i \to -\infty$، یعنی

$$\alpha(p) = \{q \in M \ ; \ \exists \{n_i\} \ , \ n_i \longrightarrow -\infty \ , \ f^{n_i}(p) \to q\}$$

با توجه به تعریف بدیهی است که مجموعه $w(p)$ برای $f \in Diff^r(M)$ برابر با $\alpha(p)$ برای f^{-1} است و لذا تمام قضایایی که برای $w(p)$ بیان می‌شود، برای $\alpha(p)$ نیز برقرار است.

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم $f \in Diff^r(M)$ و $x, y \in M$. در این صورت*

۱. *اگر $y \in Orb_f(x)$ آن‌گاه $w(y) = w(x)$.*

۲. *$w(x)$ مجموعه‌ای پایا و بسته است.*

۳. *اگر $y \in w(x)$ آن‌گاه $w(y) \subset w(x)$.*

۴. *اگر مدار مثبت x مشمول در زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از M باشد آن‌گاه $w(x)$ ناتهی و فشرده است و فاصله‌ی $d(f^n(x), w(x))$ به سمت صفر میل می‌کند، هنگامی که $n \to \infty$.*

برهان. [۲۰] را ببینید. $\square$

[1] chain recurrent set
[2] w-limit set

تعریف ۵.۳.۱. یک تزویج[1] بین دو دیفیومورفیسم f و g عبارتست از یک همسان‌ریختی $h : M \longrightarrow N$ به‌طوری‌که $hof = goh$. بدیهی است که در این حالت برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $hof^n = g^n oh$ و بنابراین اگر $q = h(p)$ ، آن‌گاه

$$orb_g(q) = h(orb_f(p))$$

یعنی h مدارهای f را بر روی مدارهای g می‌برد. به همین ترتیب یک نیم - تزویج[2] بین این دو دیفیومورفیسم عبارت است از نگاشت پیوسته و پوشای $h : M \longrightarrow N$ به‌طوری‌که $hof = goh$.

قضیه ۶.۳.۱ (قضیه استنبرگ[3]). *برای هر دیفیومورفیسم موضعی $\phi(x)$ با نقطه‌ی ثابت صفر و برای هر عدد صحیح $K > ۰$، یک عدد $N = N(K)$ وجود دارد به طوری که اگر ϕ از رده‌ی C^N باشد و مقادیر ویژه‌ی قسمت خطی آن، $A = D\phi(۰)$، در شرط زیر صدق کنند*

$$\lambda_j - \lambda_۱^{m_۱}\lambda_۲^{m_۲}\cdots\lambda_N^{m_N} \neq ۰$$

جایی‌که $۱ \leq j \leq N$ و $m_۱ + \cdots + m_N \geq ۲$، آن‌گاه یک دیفیومورفیسم $h(x) = x + O(|x|^۲)$ وجود دارد به طوری‌که ϕ با A مزدوج است. همچنین اگر ϕ از رده‌ی C^∞ باشد آن‌گاه h نیز از رده‌ی C^∞ است.

برهان. [۲۲،۲۳] را ببینید. □

۴.۱ نقاط و مجموعه‌های هذلولوی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم $p \in M$ یک نقطه‌ی ثابت (تناوبی) از $f \in Dif\ f^r(M)$ باشد. گوییم p یک نقطه‌ی ثابت (تناوبی) هذلولوی[4] است اگر $(Df^k(p))D_pf : T_pM \to T_pM$ دارای مقدار ویژه‌ای با نرم ۱ نباشد. در این صورت اگر قدرمطلق همه‌ی مقادیر ویژه‌ی D_pf

[1] conjugacy
[2] semiconjugacy
[3] Stenberg theorem
[4] hyperbolic

کمتر از یک باشد، p را جاذب (چاهک)[1] و اگر بیشتر از یک باشد، p را دافع (منبع)[2] می‌نامیم. در صورتی که p نه جاذب و نه دافع باشد، آن را نقطه‌ی زینی[3] می‌نامیم.

حال تعریف فوق را به مجموعه‌های ناوردای M به‌صورت زیر گسترش می‌دهیم.

فرض کنیم Λ زیرمجموعه‌ی پایای فشرده‌ای از M باشد. گوییم Λ دارای ساختار هذلولوی روی M است اگر برای هر $x \in \Lambda$، یک تجزیهٔ منحصربه‌فرد $T_xM = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ موجود باشد به‌طوری‌که

۱. تغییرات $x \longmapsto \mathbb{E}_x^s$ و $x \longmapsto \mathbb{E}_x^u$ در Λ پیوسته باشند.

۲. تجزیهٔ Df –پایا باشد، یعنی $Df(\mathbb{E}_x^s) = \mathbb{E}_{f(x)}^s$ و $Df(\mathbb{E}_x^u) = f(\mathbb{E}_{f(x)}^u)$.

۳. اعداد ثابت $C > ۰$ و $۰ < \lambda < ۱$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$Df^{-n}(v) \leqslant C\lambda^n ||v|| \quad v \in \mathbb{E}_x^u, n \geqslant ۰,$$

$$Df^{n}(v) \leqslant C\lambda^n ||v|| \quad v \in \mathbb{E}_x^s, n \geqslant ۰.$$

(نرم فوق، نرم تولید شده توسط متریک ریمانی است). منظور از پیوستگی در (۱) این است که برای هر ϵ داده شده، $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $d(p,q) < \delta$، آن‌گاه

$$\mathbb{E}_q^u \subset C_p^u(\mathbb{E}) = \{v^u + v^s ; v^k \in \mathbb{E}_p^u \ , \ \ v^s \in \mathbb{E}_p^s, |||v^s|| \leqslant \epsilon ||v^u||\}.$$

اگر مجموعه‌ی ناوردای Λ دارای ساختار هذلولوی برای دیفیومورفیسم f باشد، گوییم Λ یک مجموعه‌ی ناوردای هذلولوی[4] است.

قضیه ۲.۴.۱ (قضیه هارتمن[5]). *فرض کنیم $f \in Diff^r(M)$ و $p \in M$ یک نقطه‌ی ثابت هذلولوی از f باشد و $A = Df_p : T_pM \to T_pM$. در این صورت همسایگی‌های V از p در M و U از صفر در T_pM و همسان ریختی $h : U \to V$ موجوداند به طوری که $h \circ f = A \circ h$.*

[1] attractor(sink)
[2] repellor(source)
[3] saddle
[4] hyperbolic invariant set
[5] Hartman's theorem

برهان. [۱۹] را ببینید. □

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم $f : M \longrightarrow M$ یک C^{1}-دیفیومورفیسم و $\Lambda \subset M$ مجموعه‌ای ناوردا برای f باشد. Df -تجزیه‌ی $T_\Lambda M = \mathbb{E}^u + \mathbb{E}^c + \mathbb{E}^s$ را جزئاً هذلولوی[1] نامیم اگر متریک ریمانی $||.||$ بر روی منیفلد M و ثابت‌های $0 < \lambda < 1$ و $\mu > 1$ وجود داشته باشد به‌طوری که در هر نقطه‌ی $x \in \Lambda$، نامساوی‌های زیر برقرار باشد

$$0 < ||Df(x)|_{\mathbb{E}^s}|| < \lambda < m(Df(x)|_{\mathbb{E}^c}) \leqslant ||Df(x)|_{\mathbb{E}^c}|| < \mu < m(Df(x)|_{\mathbb{E}^c}),$$

که در آن هم نرم[2] m به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$m(Df(x)) = \inf\{||Df(x)(v)|| \mid ||v|| = 1\}.$$

۵.۱ فضای نمادین

Σ_k^+ را مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbb{N}$ به $\{1, 2, \dots k\}$ در نظر می‌گیریم. عناصر Σ_k^+ دنباله‌های یک طرفه به صورت $w = (w_0, w_1, \dots)$ هستند به طوری که برای هر $i \geq 0$، $w_i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

برای Σ_k^+ متریک d را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{3^k}$$

که در آن $s = (s_0, s_1, \dots)$ و $t = (t_0, t_1, \dots)$ و

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

با توجه به این متریک، مجموعه‌های استوانه‌ای[3]

$$c_i(w) = \left\{w' \in \Sigma_k^+ \ ; \ d(w, w') < 3^{-i}\right\}$$

عناصر پایه‌ای برای توپولوژی روی Σ_k^+ می‌باشند. با توجه به تعریف مجموعه‌های استوانه‌ای می‌توان نتیجه گرفت که $c_i(w)$ شامل دنباله‌هایی است که تا جمله iام با عناصر w برابر باشند.

[1] partially hyperbolic
[2] conorm
[3] cylinder sets

یعنی

$$c_i(w) = \{w' \in \Sigma_k^+ \ ; \ w_j = w'_j \ , \ \forall j \leq i\}.$$

می‌توانیم متریک استاندارد $d_۱$ را روی Σ_k^+ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$d_۱(s,t) = ۲^{-m} \quad , \quad m = \min\{|n| \ ; \ w_n \neq w'_n\}$$

متریک $d_۱$ با متریک d معادل است([۲۰] را ببینید).

روی Σ_k^+ اندازه‌ی احتمال p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p\{w \in \Sigma_k^+ \ ; \ w_{i_۱} = \alpha_۱ \ , \ w_{i_۲} = \alpha_۲, \ldots, w_{i_n} = \alpha_n\} = \frac{۱}{k^n}.$$

نگاشت نوبت برنولی[1] روی Σ_k^+ را با ضابطه‌ی

$$\sigma : \Sigma_k^+ \to \Sigma_k^+ \ , \ \sigma(s_۰, s_۱, \ldots) = (s_۱, s_۲, \ldots)$$

تعریف می‌کنیم. نگاشت نوبت در توپولوژی حاصل از متریک d پیوسته است.([۵] را ببینید.)

روی $\Sigma_۲^+$ می‌توانیم گزاره‌های زیر را مطرح کنیم.

۱. $\text{Car per}_n(\sigma) = ۲^n$.

۲. $\text{per}(\sigma)$ در $\Sigma_۲^+$ چگال هستند.

۳. یک مدار چگال برای σ در $\Sigma_۲$ وجود دارد.([۵] را ببینید.)

فضای (Σ_k^+, σ) فضای نمادین[2] یک طرفه نامیده می‌شود. حال Σ_k را مجموعه همه توابع از $\mathbb{Z}$ به مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ در نظر می‌گیریم. عناصر Σ^k به صورت دنباله‌های دو طرفه $w = (\ldots, w_{-۱}|w_۰, w_۱, \ldots)$ است به طوری که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $w_i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$. متریک d را برای Σ_k به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(s,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{۴^{|k|}}$$

[1] Bernoulli shift map
[2] symbolic Dynamic

مجموعه‌های استوانه‌ای در Σ_k به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$c_i(w) = \{w' \in \Sigma_k \ ; \ w_j = w'_j \ , \ |j| < i\}$$

همچنین نگاشت نوبت برنولی روی Σ_k با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\sigma : \Sigma_k \to \Sigma_k \ , \ \sigma(\dots, s_{-۱}|s_۰, s_۱, \dots) = (\dots s_۰|s_۱, \dots)$$

به (Σ_k, σ) فضای نمادین دو طرفه گفته می‌شود.

بخش بعد شامل مثالی ست که با زیرفضایی از فضای نمادین مزدوج می‌باشد.

۶.۱ جاذب

در این بخش به بیان مفهوم جاذب می‌پردازیم، همچنین مثالی از یک جاذب نسبتا پیچیده به نام جاذب سولنوئید[۱] ارائه می‌دهیم که توسط اسمیل و ویلیامز معرفی گردیده است([۲۰] را ببینید).

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم $f : M \to M$ یک دیفیومورفیسم باشد مجموعه‌ی فشرده $N \subset M$ یک ناحیه تله‌ای[۲] برای f می‌نامیم هرگاه $f(N) \subset int(N)$. در این صورت مجموعه‌ی بسته‌ی ناوردای $\Lambda = \cap_{n \geq ۰} f^n(N)$ یک مجموعه‌ی جاذب[۳] برای f است.

اگر Λ یک مجموعه‌ی فشرده و ناوردا از منیفلد با بعد متناهی M باشد به آسانی دیده می‌شود که Λ یک مجموعه‌ی جاذب است اگر و تنها اگر یک همسایگی به دلخواه کوچک V از Λ وجود داشته باشد به طوری که V مثبت پایا باشد و همچنین به ازای هر $p \in V$، $w(p) \subset \Lambda$. ([۲۰] را ببینید).

برای جاذب Λ منظور از حوزه‌ی جذب، مجموعه‌ی تمام نقاطی متعلق به M است که w−حدی آن‌ها زیرمجموعه‌ی Λ باشد. حال به تشریح جاذب سولنوئید می‌پردازیم.

[1] solenoid
[2] trapping region
[3] attracting set