بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان :

جواب‌های مسائل کم‌ترین مربعات خطی با استفاده از تجزیه‌های رتبه‌نما

استاد راهنما:
دکتر مینو کامرانی

نگارش:
مهناز ملکی زرگوش

دی ۱۳۹۳

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

نام دانشجو:
مهناز ملکی زرگوش

تحت عنوان :
جواب‌های مسائل کم‌ترین مربعات خطی با استفاده از تجزیه‌های رتبه‌نما

در تاریخ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مینو کامرانی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

استاد داور داخل گروه دکتر رضا جلیلیان با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء:

استاد داور خارج گروه دکتر امیر حقیقی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگی‌اش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

آن سوی همه‌ی دلتنگی‌ها خدایی هست

که داشتنش جبران همه‌ی نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار خانم دکتر مینو کامرانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر رضا جلیلیان که زحمت داور داخلی این رساله را متقبل شدند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر امیر حقیقی که به عنوان داور خارجی قبول زحمت نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را .

مهناز ملکی زرگوش
دی ۱۳۹۳

تقدیم به

وجود مقدس مادرم و عبادتگاه جانم پدرم

چکیده

در برخی از وضعیت‌های عملی نظیر کاربردهای آماری، مدل‌سازی هندسی و پردازش سیگنال، نیاز به حل دستگاه $Ax = b$ داریم که در آن ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ نامربعی و یا مربعی منفرد است. در چنین حالت‌هایی ممکن است به هیچ‌وجه جواب وجود نداشته باشد و در حالت‌هایی که جواب یافت می‌شود ممکن است بی‌نهایت جواب وجود داشته باشد.

در این حالت بهترین وضعیت، جستجوی بردار xی است که Ax را تا حد ممکن به بردار b نزدیک کند و مقدار $\|r(x)\| = \|Ax - b\|$ را کمینه سازد. اکثر الگوریتم‌های استانداردی که تاکنون برای حل مسأله‌ی فوق مطرح شده‌اند به عدد حالت ماتریس بستگی دارند. دسته وسیعی از ماتریس‌ها هستند که بسیار کاربرد دارند اما عدد حالت بزرگی دارند به عنوان مثال می‌توان به ماتریس‌های کوشی و یا واندرموند اشاره نمود. بنابراین الگوریتم‌های استاندارد در این حالت لزوماً به جواب مطلوب نمی‌رسند.

هدف ما در این پایان‌نامه طرح الگوریتمی است که با استفاده از تجزیه‌های رتبه‌نما مسئله‌ی کم‌ترین مربعات $\min_x \|Ax - b\|_2$ که ماتریس A، عدد حالت بزرگی دارد و الگوریتم‌های استاندارد برای حل آنها کران خطای نسبی بزرگی دارند، را حل نماید.

خطای نسبی بدست آمده در این الگوریتم $O(u)$ است (u واحد خطای گرد کردن است) که مستقل از اندازه عدد حالت $\kappa_2(A)$ است. این الگوریتم به $o(n^2m)$ فلاپ نیاز دارد که تقریباً با هزینه محاسباتی الگوریتم‌های قبلی یکسان است. در ادامه الگوریتم مذکور برای حل دستگاه خطی $Ax = b$ در حالتی که ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد و دستگاه بد حالت است تعمیم داده می‌شود. مزیت این الگوریتم این است که برای ماتریس‌های با رتبه کامل، رتبه ناقص، دستگاه‌های خطی فرامعین ($m \geqslant n$) و فرومعین ($m < n$) کارایی لازم را دارد. در پایان به منظور نشان دادن دقت عددی الگوریتم، این الگوریتم را روی چند مثال عددی با ماتریس ضرائب بد حالت مورد آزمون قرار داده می‌شود.

کلمات کلیدی:

مسائل کم‌ترین مربعات، شبه‌وارون، قضیه اختلال‌ضربی، تجزیه‌های رتبه‌نما

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

در سال ۱۷۹۵ اولین روش برای حل مسأله‌ی کم‌ترین مربعات توسط گاوس [۱] بیان شد و در سال‌های بعد، روش‌های عددی برای حل مسائل کم‌ترین مربعات توسعه یافت از جمله تجزیه‌ی QR بر پایه ماتریس هاوس هولدر به وسیله گولوب [۲]در سال ۱۹۶۵ بدست آمدند [۹].

در سال ۱۹۹۷ واوسیس [۳] توانست با طراحی الگوریتم NSH و الگوریتم تجزیه‌ی متعامد کامل برای مسائل کم‌ترین مربعات پایداری این مسائل را بررسی کند [۱۵].

الگوریتم‌های خاصی نیز برای مسائل کم‌ترین مربعات با ماتریس‌های قطری در مرجع‌های [۱، ۶، ۱۵، ۱۹] بررسی شده‌اند که دقت آنها از الگوریتم‌های استاندارد بیشتر است و هم‌چنین الگوریتم‌های خاصی نیز برای حل مسائل خطی و مسائل مقدار ویژه در مرجع‌های [۹، ۱۴، ۱۶] طراحی شده‌اند که می‌توانند سرعت، دقت و صرفه‌جویی در ذخیره‌سازی اطلاعات را نسبت به الگوریتم‌های استاندارد بالا ببرند. دسته وسیعی از الگوریتم‌های استانداردی که برای حل مسئله‌ی کم‌ترین مربعات $\min_x \|Ax-b\|_2$ با رتبه ستونی کامل مطرح شده‌اند بر اساس تجزیه‌ی QR با استفاده از ماتریس هاوس هولدر هستند.

این الگوریتم‌ها پسرو پایدار هستند به این معنا که جواب محاسبه شده x_0 جواب دقیق مسأله‌ی کم‌ترین مربعاتی به صورت $\min_x \|(b+\Delta b)-(A+\Delta A)x\|_2$ است [۱۴].

روش تجزیه‌ی مقادیر تکین (SVD) نیز به طور وسیعی برای حل مسائل کم‌ترین مربعات به کار برده شده است [۲، ۲۱].

نتایج بدست آمده اکثر الگوریتم‌های استاندارد نشان داد که کران خطای محاسبه شده از $u\kappa_2(A)$ بزرگ‌تر است (u واحد خطای گرد کردن است و $\kappa_2(A) = \|A^\dagger\|_2\|A\|_2$ که $A^\dagger$ شبه وارون A است)، بنابراین در حالتی که $\kappa_2(A) > \frac{1}{u}$ دقت روش تضمین نمی‌شود. اما در کاربرد، ماتریس‌های زیادی وجود دارند که بد حالت هستند، یعنی عدد حالت بزرگی دارند به عنوان مثال می‌توان به ماتریس‌های واندرموند و کوشی اشاره کرد. بنابراین در این حالت، الگوریتم‌های استاندارد برای حل مسائل کم‌ترین مربعات ممکن است جواب را با خطای نسبی بزرگ محاسبه کنند.

هدف ما در این پایان‌نامه ارائه‌ی الگوریتمی خاص برای حل مسائل کم‌ترین مربعات و

[۱] Gauss

[۲] Golub

[۳] Vavasis

هم‌چنین حل دستگاه‌های خطی است که در حالتی که عدد حالت ماتریس A بزرگ است خطای نسبی آن رشد نکند. اساس الگوریتم ارائه شده بر مبنای تجزیه‌های رتبه‌نما است.

تجزیه‌ی رتبه‌نمایی که در این پایان‌نامه از آن استفاده می‌شود بر این اساس است که ماتریس A با $rank(A) = r$ را به صورت XDY تجزیه می‌کند. X و Y ماتریس‌های خوش حالت هستند و D ماتریسی قطری است و $rank(X) = rank(Y) = r$ است. سپس با استفاده از این تجزیه ابتدا مسئله‌ی کم‌ترین مربعات و سپس دستگاه‌های خطی حل می‌شود. در قضایایی اثبات می‌شود که خطای نسبی جواب حاصل از این دستگاه‌ها به عدد حالت ماتریس وابسته نیست و در نتیجه در حالتی که A عدد حالت بزرگی دارد نیز این الگوریتم قابل استفاده است. در ادامه به مقایسه دقت تجزیه‌ی رتبه‌نمای فوق با استفاده از تجزیه‌ی QR با محورگیری ستونی و تجزیه‌ی مقادیر تکین (SVD) پرداخته می‌شود[۱۱، ۱۰]. ابتدا در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم پرداخته می‌شود. سپس در فصل دوم چند تبدیل مهم و مفید برای ماتریس‌ها از جمله تجزیه‌ی LU، تجزیه‌ی QR هاوس هولدر و تجزیه‌ی مقدار تکین (SVD) بیان می‌شود و سپس به بیان کاربرد این تجزیه‌ها در حل عددی دستگاه‌های خطی و مسائل کم‌ترین مربعات پرداخته می‌شود [۷]. در ادامه در فصل سوم که از مرجع [۱۱] گرفته شده است به بررسی جواب‌های مسائل کم‌ترین مربعات با استفاده از تجزیه‌های رتبه‌نما پرداخته می‌شود. الگوریتم ارائه شده در این فصل بر اساس تجزیه‌ی رتبه‌نمایی است که برای ماتریس‌های با عدد حالت بزرگ به جواب بهتری نسبت به الگوریتم‌های استاندارد می‌رسد و در نهایت در فصل چهارم با استفاده از مرجع [۱۰] الگوریتم ارائه شده در فصل سوم برای ماتریس‌های $n \times n$ نامنفرد بیان می‌شود و به بیان قضیه‌های مربوط به خطای روش پرداخته می‌شود.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تعاریف اساسی، مفاهیم ماتریس‌ها و بردارها مرور خواهد شد. سپس مفاهیم و نتایج اساسی از نرم برداری، نرم ماتریسی و کاربردهای آنها برای ماتریس‌های همگرا بیان می‌شود. در پایان به صورت مختصر به بیان دستگاه ممیز شناور اعداد، پایداری الگوریتم‌ها و وضعیت مسائل پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است، مطالب این فصل از کتاب جبرخطی عددی و کاربردها بیسوا نات داتا [۱]جمع آوری شده است [۷].

۲.۱ ماتریس‌ها و مقادیر تکین

گردایه‌ای از n بردار در $\mathbb{R}^m$ و مرتب شده در آرایه‌ی مستطیلی m سطری و n ستونی ماتریس نامیده می‌شود. بنابراین ماتریس A دارای شکل زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

این ماتریس با $A = (a_{ij})_{m\times n}$، یا به طور ساده $A = (a_{ij})$ نمایش داده می‌شود. مجموعه همه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ توسط $\mathbb{R}^{m\times n}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. ترانهاده ماتریس A از مرتبه $m \times n$ با A^T نمایش داده می‌شود که ماتریسی از مرتبه $n \times m$ است که با تعویض سطرها و ستون‌های A به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A^T = (a_{ji}), \qquad i = ۱, \dots, n, \qquad j = ۱, \dots, m.$$

هم‌چنین،

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

ماتریس A متقارن نامیده می‌شود اگر $A^T = A$ باشد.

تعریف ۲.۲.۱. گفته می‌شود که ماتریس A از مرتبه $n \times n$ معکوس‌پذیر است اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری‌که

$$AB = BA = I.$$

---

[۱] Biswa Nath Datta

معکوس A توسط A^{-1} نمایش داده می‌شود. معکوس، منحصر به فرد است. خاصیت جالب از معکوس حاصل‌ضرب دو ماتریس معکوس‌پذیر این است که

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس مربعی A با درایه‌های مختلط، یکانی نامیده می‌شود هرگاه

$$A^*A = AA^* = I.$$

منظور از A^* ترانهاده-مزدوج ماتریس A است. و در حالتی که درایه‌های A حقیقی هستند و

$$A^TA = AA^T = I,$$

A را ماتریس متعامد گویند. ماتریس‌های متعامد نقش مهمی در محاسبات ماتریسی دارند.

دو خاصیت مهم از ماتریس‌های متعامد به صورت زیر است.

۱. معکوس ماتریس متعامد O دقیقاً ترانهاده آن است: $O^{-1} = O^T$.

۲. حاصل‌ضرب دو ماتریس متعامد، ماتریس متعامد است.

تعریف ۴.۲.۱. برای هر ماتریس A از مرتبه $m \times n$ دو زیرفضای وابسته مهم وجود دارد، برد A که توسط $R(A)$ و فضای پوچ A که توسط $N(A)$ نمایش داده می‌شوند:

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m | b = Ax, x \in \mathbb{R}^n \text{ به ازای برداری مانند } \},$$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}.$$

فرض کنید S زیرفضایی از $\mathbb{R}^m$ باشد آن‌گاه زیرفضای $S^\perp$ که به صورت

$$S^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m | y^Tx = 0, x \in S \text{ به ازای همه بردارهای }\},$$

تعریف می‌شود متمم متعامد S نامیده می‌شود.

نکته ۵.۲.۱. *می‌توان نشان داد که*

۱. $N(A) = R(A^T)^\perp$.

۲. $R(A)^\perp = N(A^T)$.

تعریف ۶.۲.۱. مجموعه بردارهای $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است اگر

$$\nu_i^T\nu_j = 0, \quad i \neq j.$$

هم‌چنین اگر به ازای هر i، $\nu_i^T\nu_i = 1$ باشد، آن‌گاه آن‌ها یکا متعامد هستند. پایه‌ای برای زیرفضایی که یکا متعامد نیز باشد پایه یکا متعامد برای زیرفضا نامیده می‌شود.

رتبه ماتریس

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ است. آن‌گاه زیرفضای به وجود آمده توسط بردارهای سطری A، فضای سطری A نامیده می‌شود. زیرفضای به وجود آمده توسط ستون‌های A فضای ستونی A نامیده می‌شود. برد A همان فضای ستونی A است. رتبه ماتریس A بعد فضای ستونی A است و با $rank(A)$ نمایش داده می‌شود. ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد نامیده می‌شود اگر $rank(A) = n$ باشد در غیر این صورت منفرد است. گفته می‌شود که ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$دارای رتبه ستونی کامل است اگر ستون‌های آن مستقل خطی باشند. رتبه سطری کامل به طور مشابه تعریف می‌شود. گفته می‌شود ماتریس A دارای رتبه کامل است اگر دارای رتبه سطری کامل یا رتبه ستونی کامل باشد. اگر دارای رتبه کامل نباشد، ناقص رتبه است.

تصویر قائم

فرض کنید S زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است، آن‌گاه ماتریس P از مرتبه $n \times n$، دارای خواص زیر

۱. $R(P) = S$،
۲. $P^T = P$ (P متقارن است)،
۳. $P^۲ = P$ (P خودتوان است).

تصویر قائم بر روی S یا به طور ساده، ماتریس تصویر نامیده می‌شود. در ادامه تصویر قائم P، با P_s نمایش می‌دهیم. تصویر قائم بر روی زیرفضا منحصر به فرد است. توجه کنید تصویر قائم لزوماً متعامد نیست. فرض کنید $V = (\nu_۱, \dots, \nu_k)$، که در آن $\{\nu_۱, \dots, \nu_k\}$ پایه یکا متعامد برای زیرفضای S است آن‌گاه

$$P_s = VV^T,$$

تصویر قائم منحصر به فرد بر روی S است. توجه کنید که V منحصر به فرد نیست، اما P_s منحصر به فرد است. اگر P_s تصویر قائم بر روی S باشد، آن‌گاه $I - P_s$، که در آن I ماتریس واحد از همان مرتبه P_s است، تصویر قائم بر روی $S^\perp$ است. هنگامی‌که S برابر $R(A)$ یا $N(A^T)$، وابسته به A است، تصویرهای قائم منحصر به فرد بر روی $R(A)$ و $N(A^T)$ را به ترتیب توسط P_A و P_N نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که اگر $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $(m \geq n)$ دارای رتبه کامل باشد، آن‌گاه

$$P_A = A(A^T A)^{-۱} A^T, \qquad P_N = I - A(A^T A)^{-۱} A^T.$$

فرض کنید S زیرفضایی از R^n است. آن‌گاه هر بردار b را می‌توان به صورت

$$b = b_s + b_{s^\perp},$$

نوشت که در آن $b_s \in S$ و $b_{s^\perp} \in S^\perp$. فرض کنید $S = R(A)$، آن‌گاه $b_s \in R(A)$ و $b_{s^\perp} \in N(A^T)$. بنابراین b_s را با b_R و $b_{s^\perp}$ را با b_N نمایش می‌دهیم، به این معنا که b_R در برد A و b_N در فضای پوچ A^T هستند. می‌توان نشان داد که

$$b_R = P_A b, \quad b_N = P_N b.$$

در اینجا، b_R و b_N به ترتیب تصویر قائم b بر روی $R(A)$ و $N(A^T)$ هستند. از مطالب قبل به سادگی ملاحظه می‌شود که

$$b_R^T b_N = ۰.$$

تعریف ۷.۲.۱. ماتریس مربعی مخالف صفر مانند P، ماتریس جایگشت نامیده می‌شود اگر تنها عنصر مخالف صفر که ۱ است در هر سطر و هر ستون یافت شود و بقیه همگی صفر باشند. بنابراین اگر $(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$ جایگشت از $(۱, ۲, \ldots, n)$ باشد، آن‌گاه

$$P = \begin{bmatrix} e_{\alpha_۱}^T \\ e_{\alpha_۲}^T \\ \vdots \\ e_{\alpha_n}^T \end{bmatrix},$$

که درآن e_i، iامین ستون ماتریس واحد I از مرتبه $n \times n$ است. به طور مشابه ماتریس

$$P = (e_{\alpha_۱}, e_{\alpha_۲}, \ldots, e_{\alpha_n}),$$

که در آن e_i، iامین ستون I، ماتریس جایگشت است. خاصیت مهم ماتریس جایگشت این است که ماتریس جایگشت متعامد است. بنابراین مطالب زیر درست است

۱. معکوس ماتریس جایگشت، ترانهاده آن است و ترانهاده آن نیز ماتریس جایگشت است.

۲. حاصل‌ضرب دو ماتریس جایگشت، ماتریس جایگشت و در نتیجه متعامد است.

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه $n \times n$ ماتریس قطری است اگر به ازای $i, j = ۱, \ldots, n$، $i \neq j$، $a_{ij} = ۰$ باشد. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ ماتریس بالا مثلثی است اگر به ازای $i > j$، $a_{ij} = ۰$ باشد. ترانهاده ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی است، $A = (a_{ij})$ پایین مثلثی است اگر به ازای $i < j$، $a_{ij} = ۰$ باشد.

تعریف ۹.۲.۱. ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معین مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر بردار مخالف صفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x^T Ax > ۰.$$

ماتریس نیمه معین مثبت به طور مشابه تعریف می‌شود. ماتریس متقارن A نیمه معین مثبت است اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $x^T Ax \geq ۰$ باشد. نمادی که معمولاً برای ماتریس متقارن معین مثبت (نیمه معین مثبت) استفاده می‌شود $A > ۰$($A \geq ۰$) است.

تعریف ۱۰.۲.۱. به ازای دو بردار $x = [x_۱, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ و $y = [y_۱, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ماتریس کوشی $C = (c_{ij})$، $i = ۱, \dots, m$، $j = ۱, \dots, n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = \frac{۱}{x_i + y_j}, \quad i = ۱, \dots, m, \quad j = ۱, \dots, n. \qquad (۱.۲.۱)$$

تعریف ۱۱.۲.۱. به ازای بردار $x = [x_۱, \dots, x_n]^T$ ماتریس واندرموند $V = (v_{ij})$، $i = ۱, \dots, n$، $j = ۱, \dots, n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_{ij} = x_i^{j-۱}, \quad i = ۱, \dots, n, \quad j = ۱, \dots, n. \qquad (۲.۲.۱)$$

تعریف ۱۲.۲.۱. برای دستگاه خطی $Ax = b$، عدد حالت ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ که با $Cond(A)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$Cond(A) : \|A^{-۱}\|\|A\|.$$

ماتریس دارای عدد حالت بزرگ، ماتریس بد حالت نامیده می‌شود. برخی ماتریس‌های بد حالت معروف عبارتند از: ماتریس کوشی، واندرموند، هیلبرت، پای (Pie) و ماتریس دو قطری ویلکینسون.

اگر ماتریس عدد حالت بزرگی داشته باشد، آن‌گاه اختلال کوچک در داده‌های ورودی ممکن است موجب خطای بزرگ در جواب محاسبه دستگاه گردد. در این حالت، دستگاه، دستگاه بد حالت نامیده می‌شود، در غیر این صورت خوش حالت است. حال سؤالی که اغلب مطرح می‌شود این است که چقدر $Cond(A)$ باید بزرگ باشد تا دستگاه به صورت دستگاه بد حالت در نظر گرفته شود؟

اگر داده‌ها دارای خطای نسبی ۱۰^{-d} باشند و اگر خطای نسبی در جواب که باید تضمین شود کوچک‌تر یا مساوی ۱۰^{-t} باشد، آن‌گاه $cond(A)$ باید کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{d-t}$ باشد. بنابراین بد حالتی یا خوش حالتی دستگاه به دقت داده‌ها و این که چه مقدار خطا در جواب می‌تواند وجود داشته باشد بستگی دارد. برای مثال فرض کنید که داده‌ها دارای خطای نسبی

در حدود 10^{-5} هستند و دقتی در حدود 10^{-3} مورد نظر است، آن‌گاه $cond(A) \leq \frac{1}{2} \times 10^{2} = 50$. از طرف دیگر اگر دقتی در حد 10^{-2} مورد نظر باشد، آن‌گاه $cond(A) \leq \frac{1}{2} \times 10^{3} = 500$. بنابراین در حالت اول دستگاه خوش حالت است اگر $cond(A)$ کوچک‌تر یا مساوی ۵۰ باشد، در حالی که در حالت دوم، دستگاه خوش حالت خواهد بود اگر $cond(A)$ کوچک‌تر یا مساوی ۵۰۰ باشد. به طور کلی، اگر داده‌ها به طور تقریبی دقیق باشند و $cond(A) = 10^{s}$ باشد و محاسبات در حساب tرقمی انجام شوند آن‌گاه دقتی در حدود $(t-s)$رقم با معنی در جواب وجود دارد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $(m \geq n)$ است، آن‌گاه مقادیر ویژه ماتریس مرتبه $n \times n$ و متقارن A^TA، حقیقی و نامنفی هستند. فرض کنید این مقادیر ویژه توسط σ_i^2 نمایش داده شوند و $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2$، آن‌گاه σ_1،σ_2،...،σ_n مقادیر تکین A نامیده می‌شوند.

نرم‌های برداری و ماتریسی

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ بردار n بعدی در $\mathbb{R}^n$ است، آن‌گاه نرم برداری که توسط $\|x\|$ نمایش داده می‌شود تابع پیوسته از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ ، با دارای خواص زیر

۱. $\|x\| > 0$ برای هر بردار مخالف صفر x، $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر x بردار صفر باشد.

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ برای هر بردار x در $\mathbb{R}^n$ و به ازای همه اسکالرهای α.

۳. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر بردار x و y در $\mathbb{R}^n$.

خاصیت ۳ معروف به نامساوی مثلثی است. به سادگی می‌توان تحقیق نمود که توابع زیر نرم‌های برداری هستند.

۱. $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ (نرم مجموع یا نرم یک).

۲. $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ (نرم اقلیدسی یا نرم دو).

۳. $\|x\|_\infty = max_i|x_i|$ (نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم).

در حالت کلی، اگر p عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد، p−نرم، یا نرم هولدر، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

خاصیت مهم نرم هولدر، نامساوی هولدر است که به صورت زیر است

$$|x^Ty| \leq \|x\|_p\|y\|_q,$$

که در آن
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$
حالت خاص نامساوی هولدر، نامساوی کوشی-شوارتز به صورت زیر است:
$$|x^Ty| \le \|x\|_2\|y\|_2.$$
همه نرم‌های برداری به این مفهوم هم‌ارز هستند که ثابت‌هایی مانند α و β وجود دارند به قسمی که به ازای هر بردار x داریم:
$$\alpha\|x\|_\mu \le \|x\|_\nu \le \beta\|x\|_\mu.$$
تذکر ۱.۲.۱۵. برای نرم‌های ۲،۱ یا ∞ می‌توان α و β را به سادگی محاسبه کرد:
$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty.$$
تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید A ماتریس از مرتبه $m\times n$ است، آن‌گاه مشابه با نرم برداری، نرم ماتریسی $\|A\|$ با خواص زیر تعریف می‌شود:

۱. $\|A\|>0$ و $\|A\|=0$ اگر و فقط اگر A ماتریس صفر باشد.

۲. $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$ به ازای هر اسکالر α.

۳. $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$.

با مفروض بودن ماتریس A و نرم برداری $\|.\|$، عدد نامنفی که به صورت
$$\|A\|_p=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|p},$$
تعریف می‌شود در همه خواص نرم ماتریسی صدق می‌کند. این نرم، نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری است. خاصیت خیلی مفید و اغلب مورد استفاده از نرم ماتریسی وابسته (برخی اوقات ما آن را $p-$نرم ماتریس A می‌نامیم) عبارت است از:
$$\|Ax\|_p \le \|A\|_p\|x\|_p.$$
تعریف ۱.۲.۱۷. نرم طیفی عبارت است از
$$\|A\|_2=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$
می‌توان نشان داد که
$$\|A\|_2=\sqrt{\text{ماکزیمم مقدار ویژه } A^TA}.$$
(توجه کنید که مقادیر ویژه A^TA حقیقی و نامنفی هستند).

تعریف ۱۸.۲.۱. (نرم فروبنویس) نرم ماتریسی مهمی که با نرم برداری $\|x\|_{۲}$ سازگار است نرم فروبنویس نامیده می‌شود.

$$\|A\|_F = \Big[\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m}|a_{ij}|^{۲}\Big]^{\frac{۱}{۲}}.$$

نرم ماتریسی $\|.\|_M$ و نرم برداری $\|.\|_\nu$ سازگارند اگر

$$\|Ax\|_\nu \le \|A\|_M\|x\|_\nu.$$

برای هر نرم ماتریسی وابسته و نرم فروبنویس می‌توان ثابت کرد که

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

همانند حالت نرم‌های برداری، نرم‌های ماتریسی نیز مرتبط هستند. برای هر دو نرم ماتریسی $\|.\|_\mu$ و $\|.\|_\nu$ اسکالرهای α و β وجود دارند به قسمی که

$$\alpha\|A\|_\mu \le \|A\|_\nu \le \beta\|A\|_\mu.$$

بویژه نامساوی‌های زیر که نرم‌های مختلف را به هم مرتبط می‌سازند درست هستند و اغلب در عمل بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه ۱۹.۲.۱. *فرض کنید* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *باشد، آن‌گاه*

۱. $\frac{۱}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_۲ \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$.

۲. $\|A\|_۲ \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_۲$.

۳. $\frac{۱}{\sqrt{m}}\|A\|_۱ \le \|A\|_۲ \le \sqrt{n}\|A\|_۱$.

۳.۱ همگرایی دنباله‌های برداری و ماتریسی

گفته می‌شود دنباله‌ای از بردارهای $\nu^{(۱)}$، $\nu^{(۲)}$، ... به بردار ν همگرا است اگر

$$\lim_{k\to\infty}\nu_i^k = \nu_i, \qquad i = ۱,\ldots,n.$$

و دنباله‌ای از ماتریس‌های $A^{(۱)}$، $A^{(۲)}$، ... به ماتریس $A = (a_{ij})$ همگرا است اگر

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \qquad i,j = ۱,۲,\ldots,n.$$

اگر دنباله $A^{(k)}$ به A همگرا باشد، آن‌گاه می‌نویسیم

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A.$$

اکنون بدون اثبات، شرایط لازم و کافی را برای همگرایی دنباله‌های برداری و ماتریسی بیان می‌شود.