وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

روش لاینز برای حل مسائل معکوس سهموی

توسط:

سمیرا معتمدی

استاد راهنما:

دکتر رضا پورقلی

استاد مشاور:

دکتر مرتضی گرشاسبی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

روش لاینز برای حل مسائل معکوس سهموی

توسط:

سمیرا معتمدی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر مرتضی گرشاسبی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی عباسی‌ملایی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سیدهاشم طبسی استادیار ریاضی کاربردی گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر بهزاد صالحیان استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برای شان همه رنج بود و وجودشان همه برایم مهر

توانشان رفت تا به توانایی برسم و موهایشان سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنان که فروغ نگاه شان، گرمی کلام شان و روشنی رویشان سرمایه های جاودان زندگی من است

آنان که راستی قامتم در شکستگی قامت شان تجلی یافت

در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با قلبی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستهایشان بوسه می زنم

سرو وجودشان همیشه سر سبز و مستدام باد

و خواهرانم

آن مهربانان همیشگی

که با عشق و محبت در تمام مراحل زندگی هم گام و هم یار من بوده اند

سپاسگزاری

کسی نگفته است که زندگی کار ساده‌ایی است. گاهی بسیار سخت و ناخوشایند می‌نماید اما با تمام فراز و فرودهایش زندگی... از ما انسانی بهتر و نیرومندتر می‌سازد. حتی اگر در لحظه حقیقت آن را درنیابیم.

سپاس می‌گویم خدای بزرگ را که یاریم کرد تا گامی دیگر از مسیر آموختن را بردارم.

حال که این دفتر به پایان آمد، و این تحقیق به ثمر رسید، بر خود لازم می‌دانم که از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضا پورقلی که راهنمایی‌ها و نظرات ارزشمندشان در تمام مراحل انجام این تحقیق ره‌گشا بود، صمیمانه سپاس گزاری کنم. هم‌چنین از جناب آقای دکتر مرتضی گرشاسبی که مشاورت این تحقیق را بر عهده داشته‌اند و از نظرات‌شان بهره‌مند گشته‌ام سپاس گزاری می‌کنم. از جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی و جناب آقای دکتر سید هاشم طبسی که زحمت بازخوانی این تحقیق را تقبل نموده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

یاد و خاطره همه دوستان عزیزم که لحظات خوبی را در کنار آن‌ها داشته‌ام همیشه در ذهنم باقی است و خاطرات خوب این دوستی‌ها یادگار خوب و ماندنی از دوره‌ای است که سپری گشت.

چکیده

روش لاینز برای حل مسائل معکوس سهموی

به وسیله‌ی:

سمیرا معتمدی

مسائل هدایت گرمایی معکوس یک نمونه بارز از مسائلی هستند که هم‌زمان چندین تابع و پارامتر مجهول را تقریب می‌زنند، منابع گرمایی ساکن و متحرک، شرایط اولیه، شرایط کرانه‌ای، ... از آن جمله هستند. روش ارائه شده در این پایان نامه منحصراً برای تخمین شرایط کرانه‌ای ناشناخته می‌باشد.

مفاهیم اساسی معادلات با مشتقات جزیی و مسائل هدایت گرمایی مستقیم که در فصل‌های اول و پنجم به آن‌ها اشاره کرده‌ایم، شامل تعاریف و مفاهیم بنیادی این‌گونه مسائل هستند، از طرفی برای حل معادلات به‌وسیله‌ی روش لاینز از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود که در فصل دوم به توضیح آن‌ها پرداخته‌ایم، و چون حل مسائل هدایت گرمایی مستقیم اولین گام در حل مسائل هدایت گرمایی معکوس می‌باشند لذا در فصل چهارم این پایان‌نامه چندین روش از حل‌های تحلیلی و عددی را بیان کرده‌ایم.

با توجه به این‌که مسائل هدایت گرمایی معکوس مسائل بدوضعی هستند لذا در فصل ششم به بررسی برخی روش‌های منظم‌سازی برای مسائل بدوضع پرداخته‌ایم. نهایتاً در فصل هفتم روش لاینز و مسائل حل شده به‌وسیله این روش را بیان کرده‌ایم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

معادلات با مشتقات جزیی

۱-۱ مقدمه

یک معادله با مشتقات جزیی[۱] به‌وسیله‌ی دو یا چند متغیر مستقل مشخص می‌شود. معادلات با مشتقات جزیی به‌عنوان فرموله‌بندی ریاضی بسیاری مسائل ریاضیات کاربردی، شامل سرعت تغییرات نسبت به دو یا چند متغیر مستقل مورد استفاده قرار می‌گیرند. حالات خاص یک معادله با مشتقات جزیی دوبعدی مرتبه دوم که در مسائل فیزیکی بسیار اتفاق می‌افتد، به‌صورت زیر است:

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d\frac{\partial v}{\partial x}+e\frac{\partial v}{\partial y}+fv+g=0, \qquad (1.1)$$

که در آن ممکن است a، b، c، d، e، f و g توابعی از x، y و v باشند. معادله با مشتقات جزیی (۱.۱) را

(i) بیضوی[۲] گوییم اگر $\quad b^2-4ac<0$

(ii) سهموی[۳] گوییم اگر $\quad b^2-4ac=0$

(iii) هذلولوی [۴] گوییم اگر $\quad b^2-4ac>0$

معادله با مشتقات جزیی (۱.۱) را وقتی ضرایب a، b، c، d، e، f و g ثابت باشند یا فقط تابعی از x و y باشند، **خطی** می‌نامند، در غیراین‌صورت آن‌را **غیرخطی** گویند. اگر ضرایب مشتقات مرتبه دوم توابعی از v، $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ باشند، ولی تابعی از مشتقات مرتبه‌ی دوم نباشند، معادله با مشتقات جزیی را **شبه‌خطی** گویند (اگر چه غیرخطی می‌باشند).

---

[۱] PDE

[۲] Elliptic differential equation

[۳] Parabolic differential equation

[۴] Hyperbolic differential equation

۱-۲ معادله بیضوی

به‌عنوان نمونه **معادله پواسون**[۵]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v=0, \tag{۲.۱}$$

و **معادله لاپلاس**[۶]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \tag{۳.۱}$$

معادلات بیضوی دوبعدی معروفی هستند. جواب تحلیلی معادله مشتقات جزیی (۲.۱) و معادله مشتقات جزیی (۳.۱) یک تابع $v(x,y)$ است که در این معادلات در هر نقطه از ناحیه S واقع در داخل منحنی بسته و سطح C صدق می‌کند، و به‌علاوه در هر نقطه از منحنی بسته‌ی مرزی C در شرایط معینی به نام شرایط مرزی[۷] نیز صادق می‌باشد (شکل۱).

۱-۳ معادله سهموی

به‌عنوان نمونه **معادله انتقال حرارت**[۸] یک‌بعدی

$$\frac{\partial v}{\partial t}=K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{۴.۱}$$

ساده‌ترین معادله‌ی سهموی است. از حل تحلیلی معادله با مشتقات جزیی (۴.۱) یک تابع (درجه حرارت[۹]) مانند $v(x,y)$ به‌دست می‌آید که در آن x بین 0 و b و t بین 0 و ∞ واقع است. به‌علاوه این تابع در هر نقطه از سطح S (در صفحه‌ی xt) در معادله با مشتقات جزیی (۴.۱) صدق می‌کند. سطح S نامتناهی بوده و به‌وسیله‌ی محور xها و خطوط موازی $x=0$ و $x=b$ محدود می‌شود، هم‌چنین در شرایط اولیه در $t=0$ به ازای هر x و شرایط مرزی در $x=0$ و $x=a$ به ازای تمام tها صدق می‌کند. S یک ناحیه باز است زیرا منحنی (باز) مرزی C تشکیل یک مرز بسته در ناحیه‌ی متناهی صفحه‌ی xt نمی‌دهد (شکل۲).

---

[۵] Poisson equation

[۶] Laplace equation

[۷] boundary condition

[۸] Heat conduction problem

[۹] Temperature

۱-۴ معادله هذلولوی

به عنوان نمونه **معادله موج**[۱۰] یک بعدی

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{۱.۵}$$

ساده‌ترین معادله هذلولوی است. جواب تحلیلی معادله با مشتقات جزیی (۱.۵)، معادله‌ی (انتقال) $v(x,t)$ است، که برای مقادیر x بین ۰ و b و t بین ۰ و ∞ در معادله و شرایط اولیه مرزی بخش (۲) صدق می‌کند.

۱-۵ معادله گرما

یک میله فلزی به طول ℓ را در نظر بگیرید. فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ دمای میله در نقطه‌ی x، $f(x)$ باشد و سطح جانبی آن عایق شده باشد. دو انتهای $x = 0$ و $x = \ell$ را به‌ترتیب در دماهای $g(t)$ و $h(t)$ قرار می‌دهیم. اگر دمای میله را در لحظه‌ی t و در نقطه‌ی x با $v(x,t)$ نشان می‌دهیم، آن‌گاه ثابت می‌شود که v جواب مسأله‌ی زیر است.

$$\sigma\rho v_t(x,t) = k v_{xx}(x,t), 0 \leq x \leq \ell, t > 0, \tag{۱.۶}$$

$$v(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq \ell,$$

$$v(0,t) = g(t), t > 0,$$

$$v(\ell,t) = h(t), t > 0.$$

که در آن ضریب k هدایت گرمایی میله، σ گرمای ویژه‌ی میله و ρ چگالی یا جرم میله است.
اگر قرار دهیم $c = \frac{K}{\sigma\rho}$، آن‌گاه معادله‌ی انتقال حرارت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v_t(x,t) = c v_{xx}(x,t), 0 \leq x \leq \ell, t > 0, \tag{۱.۷}$$

که در آن یک c ثابت است .[۹]

[۱۰] Wave equation

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل معمولی

۲-۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی شکل اساسی الگوهای ریاضی هستند که در علوم مهندسی با آن‌ها برخورد می‌کنیم. **معادلات دیفرانسیل معمولی**[1] ابزاری اصلی در مدل‌سازی بسیاری از وضعیت‌های فیزیکی مانند دستگاه‌های فنر-جرم، مدارهای مقاومت-خازن-سلف، خم شدن تیرها، واکنش‌های شیمیایی، پاندول‌ها، حرکت یک جسم دوار حول جسم دیگر و غیره می‌باشد. در نتیجه حل عددی آن‌ها مبحث بسیار وسیعی برای مطالعه می‌باشد.

می‌دانیم که فرآیند انتگرال‌گیری ثابت‌های دل‌خواهی را مطرح می‌کند. این ثابت‌ها از روی شرط‌های اضافی که بر روی تابع یا مشتق‌های آن گذاشته می‌شود، تعیین می‌گردند. برای مثال یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی چهار، به چهار شرط اضافی برای تعیین چهار ثابت دل‌خواه که مطرح می‌شوند، نیاز دارد. دو نوع مسأله، بسته به طریقی که این شرط‌ها مشخص می‌شوند، وجود دارند. اگر همه شرایط مورد نیاز در یک نقطه‌ی تنها داده شوند، ما یک **مسأله مقدار اولیه**[2] خواهیم داشت. در این‌جا روش حل مستقیم است و از نقطه‌ی شناخته شده شروع می‌شود و گام به گام در امتداد برد انتگرال‌گیری حرکت می‌نماید. به‌عبارت دیگر در یک مسأله مقدار اولیه، یک دستگاه از توابع $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ را که در n معادله‌ی دیفراسیل عادی

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), i = 1, 2, \cdots, n, \qquad (۲.۱)$$

صدق می‌کنند و n مقدار داده شده‌ی زیر را اختیار می‌نمایند، محاسبه می‌کنیم.

$$y_i(x_0) = \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n, \qquad (۲.۲)$$

---

[1] ODE

[2] IVP

ولی اگر شرط‌ها در بیش از یک نقطه داده شوند، آن‌گاه اطلاعات لازم برای شروع محاسبات در هر نقطه‌ی تنها، کافی نیست و روش حل، یا حاوی جواب یک مجموعه معادلات هم‌زمان است یا از مقادیر برآورد شده در یک نقطه استفاده می‌کند. سپس این مقادیر برآورد شده هنگامی که محاسبات به پیش می‌روند با تکرار تصحیح می گردند. این نوع دوم مسائل به **مسائل مقدار مرزی**[۳] معروف هستند. به‌ویژه در مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای یک دستگاه توابع $y_i(x)$، n ,$i = ۱, ۲, \cdots$ را حل می‌کنیم که در معادله‌ی (۱.۲) صدق می‌کنند و n شرط داده شده زیر را اختیار می‌نماید.

$y_i = \alpha_i$، به ازای مقادیر مشخصی از i در $x = x_۰$.

$y_i = \beta_i$، به ازای مقادیر مشخصی از i در $x = x_۱$.

که در آن، $i = ۱, ۲, \cdots, n$.

روش‌های حل عددی را می‌توان به طریقه‌های مختلف، شامل فرمول‌های تفاضل‌های متناهی و سری تیلور بریده شده به‌دست آورد. این مقادیر نشان می‌دهد که هر محاسبه با یک تقریب انجام می‌شود و این عمل یک خطا وارد می‌کند. مفید بودن یک روش نه فقط به اندازه‌ی خطا بلکه به نحوه‌ای که این خطاها به هنگام پیش رفتن در طول برد انتگرال‌گیری بزرگ می‌شوند، بستگی دارد. بنابراین به هنگام استفاده از یک روش باید به هنگام پیش رفتن محاسبات، مفهوم **سازگاری**[۴] را که به خطایی که در نقطه‌ی خاص وارد می‌شود مربوط است و مفهوم **پایداری**[۵] را که به افزایش خطا مربوط می‌باشد، در نظر داشته باشیم.
کار ما بررسی چند روش حل معادلات مرتبه‌ی یک است. ما معادله‌ی مرتبه‌ی یک را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y(x_۰) = y_۰.$$

۲-۲ روش‌های اویلر و اویلر اصلاح شده

یکی از روش‌های حل این معادلات روش تیلور[۶] است [۱۰]. اگر مشتق‌ها پیچیده شوند، به‌کارگیری روش تیلور ممکن است سخت بشود و در این حالت تعیین خطا مشکل خواهد بود. البته بسیاری از نرم افزارهای کامپیوتری از جمله میپل[۷] و متلب[۸] می‌توانند از روش‌های علامتی برای مشتق‌گیری از یک تابع استفاده نمایند،

[۳] BVP

[۴] Compatibility

[۵] Stability

[۶] Taylor

[۷] Maple

ولی مشتق‌های تحلیلی اغلب بسیار پیچیده می‌شوند.

می‌دانیم که اگر اندازه گام h کوچک باشد، خطا در یک سری تیلور کوچک است. در واقع اگر h را به اندازه کافی کوچک کنیم، برای دقت مناسب ممکن است فقط به اندازه تعداد کمی جمله از بسط سری تیلور نیاز داشته باشیم. روش اویلر این ایده را تا آخر برای معادلات دیفراتسیل مرتبه‌ی یک تعقیب می‌کند، این روش فقط از دو جمله اول سری تیلور استفاده می‌کند. فرض کنید h را آن‌قدر کوچک گرفته‌ایم که می‌توان پس از جمله‌ی مشتق اول، برش انجام داد. در این‌صورت

$$y(x_۰+h) = y(x_۰) + hy'(x_۰) + \frac{h^۲ y''(\xi)}{۲!}, x_۰ < \xi < x_۰ + h.$$

که در آن شکل معمولی جمله‌ی خطا برای سری تیلور بریده شده را نوشته‌ایم.

در استفاده از این معادله، مقدار $y(x_۰)$ با شرط اولیه‌ی داده شده و $y'(x_۰)$ از $f(x_۰, y_۰)$ حساب شده است که با معادله ی دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ داده شده است. لازم است از این روش مکرر استفاده کرده و حل را پس از محاسبه‌ی $y(x_۰+h)$ تا $x = x_۰ + ۲h$ جلو برده و بعد تا $x = x_۰ + ۳h$ جلو ببریم، و غیره. با تقلید از نماد زیرنویس برای مقادیر متوالی y و نمایش خطا به‌وسیله‌ی رابطه‌ی ترتیب، می‌توان الگوریتم برای روش اویلر[۹] را به شکل زیر نوشت:

$$y_{n+۱} = y_n + hy'_n + O(h^۲). \tag{۳.۲}$$

مشکل این روش که ساده‌ترین است عدم دقت می‌باشد؛ و نیاز به اندازه‌ی گام بسیار کوچک دارد. شکل زیر طرز اصلاح این روش را با فقط کمی سعی اضافی پیشنهاد می‌کند.

در روش اویلر ساده از شیب در آغاز بازه y'_n برای تعیین نمو تابع استفاده می‌شود. این تکنیک فقط وقتی درست است که تابع خطی باشد. آنچه درعوض مورد نیاز است شیب متوسط صحیح در بازه است. این‌را می‌توان به‌وسیله شیب‌ها در دو انتهای بازه تقریب کرد. فرض کنید برای محاسبه $y_{n+۱}$ از متوسط مقدار شیب‌ها در ابتدا و انتهای بازه استفاده می‌کنیم.

$$y_{n+۱} = y_n + h\frac{y'_n + y'_{n+۱}}{۲}. \tag{۴.۲}$$

این کار یک تخمین اصلاح شده برای y در $x_{n+۱}$ به‌دست می‌دهد. اما نمی‌توانیم معادله‌ی (۴.۲) را مستقیماً به‌کار بریم، زیرا مشتق تابعی از x و y است و نمی‌توانیم $y'_{n+۱}$ را که مقدار دقیق $y_{n+۱}$ که مجهول است حساب کنیم. روش اویلر اصلاح شده تخمین مقداری از $y_{n+۱}$ به‌وسیله‌ی رابطه (۳.۲) است که اویلر ساده حول این

[۸] Matlab

[۹] Euler

مسأله کار می‌کند. سپس از این مقدار برای محاسبه‌ی y'_{n+1} استفاده کرده و یک تخمین اصلاح شده (یک مقدار دقیق شده) برای y_{n+1} به‌دست می‌دهد. چون مقدار y'_{n+1} با استفاده از مقدار پیش‌بینی شده با دقتی کمتر از دقت کامل حساب شده بود، ممکن است به‌خواهیم مقدار y_{n+1} را به هر تعداد دفعاتی که تفاوت قابل ملاحظه‌ای ایجاد کند، دقیق سازیم (ولی اگر بیش از یک یا دو اصلاح مجدد لازم باشد بهتر است اندازه گام را تقلیل دهیم یا از روش دیگر استفاده کنیم).

روش اویلر اصلاح شده، روش **پیش‌گو-اصلاح‌گر** نیز نام دارد.

روش اویلر دارای اشکالات زیر است:

(i) یا خیلی آهسته است (اگر h_i کوچک باشد) یا خیلی غیر دقیق است (اگر h_i نسبتاً بزرگ باشد).

(ii) هنگامی‌که در طول محور xها جلو می‌رویم بر اثر انباشتگی خطاهای گردکردن، yهای محاسبه شده بیش‌تر از yهای واقعی دور می‌شوند.

این مطالب باعث تغییراتی در روش اویلر می‌شوند؛ یک تقریب برای y_i، مثلاً $y_1^{(1)}$ به‌دست آوریم؛

$$y_1^{(1)} = y_0 + h_0 (\frac{dy}{dx})_{x=x_0}. \tag{5.2}$$

توجه کنید که اندیس بالا در طرف راست، تعداد تکرار را نمایش می‌دهد. $y_1^{(1)}$ را در معادله‌ی دیفرانسیل (۴.۲) قرار می‌دهیم تا یک مقدار تقریبی از $\frac{dy}{dx}$ در انتهای فاصله‌ی اول یعنی در $x_1 = (x_0 + h_0)$ به‌دست می‌آوریم، یا

$$(\frac{dy}{dx})^{(1)}_{x=x_1} = f(x_1, y_1^{(1)}). \tag{6.2}$$

سپس مقدار بهبود $\Delta x (\frac{dy}{dx})_{x=x_0}$ را به‌وسیله‌ی ضرب h_0 در میانگین حسابی مقادیر $\frac{dy}{dx}$ در $x = x_0, x = x_1$ به‌دست می‌آوریم. بنابراین دومین مقدار تقریبی برای y_1 عبارت است از:

$$y_1^{(2)} \cong y_0 + \frac{(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} + (\frac{dy}{dx})^{(1)}_{x=x_1}}{2} h_0. \tag{7.2}$$

مقدار $y_1^{(2)}$ را در معادله‌ی دیفرانسیل (۴.۲) قرار می‌دهیم تا تقریب بعدی را برای $(\frac{dy}{dx})_{x=x_1}$ به‌دست آوریم. یعنی

$$(\frac{dy}{dx})^{(2)}_{x=x_1} = f(x_1, y_1^{(2)}). \tag{8.2}$$

این روند را تکرار می‌کنیم تا تغییری در ارقام نگه‌داشته شده‌ی y ایجاد نشود. y را برای $x_2 = x_1 + h_1$ یا به‌طور معادل y_2 را به همان طریق حساب می‌کنیم. این روند را برای y_3 و y_4 و غیره نیز ادامه می‌دهیم.

وجود و منحصر به‌فرد بودن یک جواب:

فرض کنید معادله‌ی دیفرانسیل به شکل $y\prime = f(x,y)$ با $y(x_0) = y_0$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $f(x,y)$ در ناحیه R: $x_0 \leq x \leq x_1$ پیوسته باشد؛ و برای برخی مقادیر $x_1 > x_0$ داشته باشیم $| y - y_0 | \leq \alpha$ که در آن $\alpha > 0$. اگر $f(x,y)$ در R (که باید تعریف شود) در شرط لیپ‌شیتز[10] صدق می‌کند، آن‌گاه جواب $y(x)$ وجود دارد و منحصر به فرد است.

تابع $f(x,y)$ در یک ناحیه R در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند اگر یک ثابت مانند M وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر دو نقطه (x,y) و (x,z) در R که طول مساوی دارند و قطعه خط واصل بین (x,y) و (x,z) در R واقع باشد، داشته باشیم:

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq M|y - z|$$

۲-۳ روش‌های رانگه و کوتا

دو روش عددی اخیر، اگرچه خیلی جذاب نیستند، مقدمه مناسبی برای روندهای بعدی ما می‌باشند. با آن‌که می‌توان دقت این دو روش را با اختیار اندازه‌های گام کوچک‌تر اصلاح کرد، دقت بیش‌تر را می‌توان با گروهی از روش‌ها که به افتخار رانگه و کوتا دو ریاضی‌دان آلمانی نام‌گذاری شده‌اند به‌طور کاراتر به‌دست آورد. آن‌ها الگوریتم‌هایی بیان کرده‌اند که یک معادله دیفرانسیل را به‌طور کارا حل کرده و در ضمن با تقریب جواب به‌وسیله‌ی متناسب کردن n جمله اول بسط با سری تیلور هم ارزند.

ما فقط روش‌های رانگه-کوتای[11] مرتبه چهار و پنج را در نظر می‌گیریم، اگر چه روش‌های مرتبه بالاتر نیز وجود دارند. در واقع، روش اویلر اصلاح شده بخش اخیر، یک روش رانگه-کوتای مرتبه دو می‌باشد.

برای آن‌که از طرز کار روش‌های رانگه-کوتا ایده‌ای به‌دست آوریم، یک روش مرتبه‌ی دو ساده را بیان می‌کنیم. در این‌جا نمو y متوسط وزن‌دار در تخمین نمو است که آن‌ها را k_1 و k_2 می‌نامیم. لذا برای معادله‌ی $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$،

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2, \qquad (۹.۲)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1).$$

[10] Lipschitz

[11] Runge-Kutta

مقادیر $k_۱$ و $k_۲$ را می‌توان تخمین‌های تغییر در y وقتی x به اندازه‌ی h جلو می‌رود تصور کرد، زیرا این مقادیر حاصل‌ضرب تغییر در x در مقداری برای شیب منحنی $\frac{dy}{dx}$ می‌باشند. روش‌های رانگه-کوتا همواره از تخمین اویلر ساده به عنوان تخمین اول Δy استفاده می‌کنند. تخمین دیگر با x و y گرفته می شود که با کسرهای α و β از h و تخمین قبلی $k_۱$ و Δy بالا می‌رود. مسأله ما طرح انتخاب چهار پارامتر α وβ و a و b می‌باشد. این کار را با توافق حداکثر معادله‌ی (۹.۲) با بسط سری تیلور، که در آن مشتق‌های y بر حسب f نوشته شده، از $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$،

$$y_{n+۱} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^۲}{۲} f(x_n, y_n)' + \cdots .$$

انجام می‌دهیم. یک شکل هم ارز به‌خاطر

$$\frac{dy}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f.$$

عبارت است از:

$$y_{n+۱} = y_n + hf_n + h^۲ (\frac{۱}{۲} f_x + \frac{۱}{۲} f_y f)_n. \qquad (۱۰.۲)$$

(همه مشتق‌ها در معادله‌ی (۱۰.۲) در نقطه‌ی حساب شده‌اند.) حال معادله‌ی (۱۰.۲) را با جانشانی تعریف‌های $k_۱$ و $k_۲$ بازنویسی می‌کنیم:

$$y_{n+۱} = y_n + ahf(x_n, y_n) + bhf(x_n, y_n) + bhf(x_n + \alpha h, y_n + \beta h + \beta hf(x_n, y_n)). \qquad (۱۱.۲)$$

برای آن‌که آخرین جمله‌ی معادله‌ی (۱۱.۲) را با معادله‌ی (۱۰.۲) قابل قیاس سازیم، $f(x,y)$ را بر حسب y_n و x_n به سری تیلور داده، به یاد می‌آوریم که f یک تابع دو متغیره است، و فقط جملات مشتق اول را نگه می‌داریم،

$$f(x_n + \alpha h, y_n \beta hf(x_n, y_n)) \simeq (f + f_x \alpha h + f_y \beta hf)_n. \qquad (۱۲.۲)$$

در طرف راست هر دو معادله‌ی (۱۰.۲) و (۱۲.۲) باید f و مشتق‌های جزیی در (x_n, y_n) حساب شوند. اگر از معادله‌ی (۱۲.۲) در معادله‌ی (۱۱.۲) بگذاریم، خواهیم داشت:

$$y_{n+۱} = y_n + ahf_n + bh(f + f_x \alpha h + f_y \beta hf)_n,$$

یا با تغییر آرایش،

$$y_{n+۱} = y_n + (a+b)hf_n + h^۲ (abf_x + \beta bff_y)_n. \qquad (۱۳.۲)$$