



دانشگاه سمنان

دانشکده فیزیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک

عنوان

توابع متعامد و ساختار نوکلئون‌ها در فرآیندهای
ناکشسان ژرف

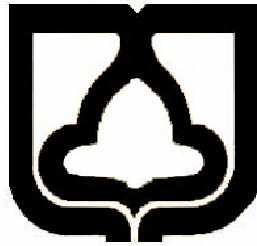
نگارش

عباس سلیمانی

استاد راهنما

دکتر علی خرمیان

شهریور ۱۳۹۱



دانشگاه سمنان

دانشکده فیزیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک

عنوان

توابع متعامد و ساختار نوکلئون‌ها در فرآیندهای
ناکشسان ژرف

نگارش

عباس سلیمانی

استاد راهنما

دکتر علی خرمیان

شهریور ۱۳۹۱

به نام خداوند جان و خرد

سپاس‌گزاری...

وظیفه خود می‌دانم از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی خرمیان، به خاطر نکات اخلاقی و علمی زیادی که از ایشان فراگرفته‌ام و همچنین راهنمایی‌های بیدریغ‌شان در جهت نگارش این مجموعه، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از راهنمایی‌های دوست عزیز آقای رنجبر و سایر دوستان نیز کمال سپاس‌گزاری را به جای می‌گذارم.

چکیده

در این پایان نامه تحلیل QCD تابع ساختار غیر یکتا xF_3 در فرآیند پراکندگی ناکشسان ژرف، با توجه نتایج تجربی ارائه می‌شود. این تحلیل با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد صورت می‌پذیرد. ما از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی وابسته و چندجمله‌ای‌های متعامد $q_n(x)$ که با روش متعامدسازی گرام-اشمیت ساخته شده‌اند، استفاده خواهیم کرد. با استفاده از خواص مهم این چندجمله‌ای‌ها تابع ساختار xF_3 را در فضای x و برای مقادیر مختلف Q^2 محاسبه خواهیم نمود و نتایج حاصل از سه مدل را با نتایج تجربی و همچنین با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: توابع متعامد - چندجمله‌ای‌های ژاکوبی - چندجمله‌ای‌های ژاکوبی وابسته - توابع توزیع پارتونی - پراکندگی ناکشسان ژرف - توابع ساختار - ممنت

فهرست مطالب

۱	پراکندگی ناکشسان ژرف	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۱	پراکندگی ناکشسان لپتون - نوکلئون	۲.۱
۳	سینماتیک پراکندگی ناکشسان ژرف	۳.۱
۷	مدل پارتون	۴.۱
۹	تحلیل QCD داده‌های تجربی پراکندگی‌های ناکشسان	۵.۱
۱۰	چندجمله‌ای‌های متعامد	۲
۱۰	توابع متعامد	۱.۲
۱۲	متعامدسازی گرام-اشمیت	۲.۲
۱۴	چندجمله‌ای‌های ژاکوبی	۳.۲
۱۵	تعاریف چندجمله‌ای‌های ژاکوبی	۱.۳.۲
۱۶	خواص اساسی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی	۲.۳.۲
۱۸	تغییر فرم چندجمله‌ای‌های ژاکوبی	۳.۳.۲
۲۰	فرم سری چندجمله‌ای $\theta_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	۴.۳.۲
۲۱	چندجمله‌ای‌های ژاکوبی وابسته	۴.۲
۲۴	تعیین ضرایب بسط	۱.۴.۲
۲۵	تابع ساختار غیر یکتای $xF_3(x, Q^2)$	۳
۲۵	مقدمه	۱.۳
۲۵	فرمالیزم بسط تابع ساختار	۲.۳
۲۸	فرم پدیده شناختی تابع ساختار	۳.۳
۲۹	ممنت توابع توزیع	۴.۳
۳۲	برازش داده‌های تجربی	۵.۳
۳۳	بررسی قیده‌های توابع توزیع کوارک‌ها	۶.۳

ب

۳۶	۴ محاسبات و نتایج
۳۶	۱.۴ مقدمه
۳۶	۲.۴ محاسبات و نتایج

۴۵	الف چند تابع خاص ریاضی
۴۵	الف.۱ تابع گاما
۴۵	الف.۱.۱ تعریفها
۴۷	الف.۱.۲ خواص تابع گاما
۴۹	الف.۲ تابع بتا
۵۰	الف.۳ تابع فوق هندسی

۵۳ ب واژه نامه فارسی به انگلیسی

۵۶ پ واژه نامه انگلیسی به فارسی

لیست تصاویر

۲	برهم کنش الکترومغناطیسی همراه با تبادل فوتون.	۱.۱
۲	جریان خنثی با مبادله Z^0 و جریان باردار با مبادله W^\pm .	۲.۱
۹	وابستگی F_2 به Q^2 .	۳.۱
۲۹	ساختار نوکلئون.	۱.۳
۳۴	تابع توزیع $xu_v(x, Q^2)$.	۲.۳
۳۵	تابع توزیع $xd_v(x, Q^2)$.	۳.۳
۳۵	مقایسه توابع توزیع $xu_v(x, Q^2)$ و $xd_v(x, Q^2)$.	۴.۳
۳۹	ترسیم تابع ساختار xF_3 به کمک چندجمله‌ای‌های $q_n(x)$ و مقایسه با نتایج $CCFR$.	۱.۴
۴۰	ترسیم تابع ساختار xF_3 به کمک چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و مقایسه با نتایج $CCFR$.	۲.۴
۴۱	ترسیم تابع ساختار xF_3 به کمک چندجمله‌ای‌های ژاکوبی وابسته و مقایسه با نتایج $CCFR$.	۳.۴
۴۲	تحول تابع ساختار xF_3 استخراج شده توسط چند جمله‌ای‌های $q_n(x)$ با افزایش Q^2 .	۴.۴
۴۲	تحول تابع ساختار xF_3 استخراج شده توسط چندجمله‌ای‌های ژاکوبی با افزایش Q^2 .	۵.۴
۴۳	تحول تابع ساختار xF_3 استخراج شده توسط چندجمله‌ای‌های ژاکوبی وابسته با افزایش Q^2 .	۶.۴
۴۳	مقایسه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و ژاکوبی وابسته و $q_n(x)$ در انرژی $12.6 GeV^2 = Q^2$.	۷.۴
۴۸	نمودار تابع $\Gamma(z)$.	الف.۱

لیست جداول

- ۱.۲ چند جمله‌ای‌های $q_n(x)$ تا مرتبه ۴ ۱۴
- ۱.۳ پارامترهای توابع توزیع کواریکی در مرتبه LO و در انرژی $Q_s^2 = 4\text{GeV}^2$ ۳۲

فصل ۱

پراکندگی ناکشسان ژرف

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۹۱۱ میلادی، آزمایش بسیار مهمی صورت گرفت که سرمنشاء ساخت شتاب‌دهنده‌های غول‌پیکر امروزی شد. رادرفورد با شلیک پرتویی از ذرات آلفا به ورقه نازک طلا موفق به کشف ساختار داخلی اتم شد. این تنها آغاز راه بود. با ساخت شتاب‌دهنده‌های بسیار پیشرفته و برخورد ذرات با سرعت‌های نزدیک به سرعت نور، حضور کوارک‌ها در ساختار داخلی نوکلئون‌ها به اثبات رسید و گام بسیار مهمی در کشف آجرهای سازنده جهان برداشته شد.

پراکندگی ناکشسان ژرف DIS^۱ آزمایشی بسیار مهم و سودمند برای تعیین پارامترهای مجهول در QCD^۲ است. و همچنین روش مستقیم کشف ساختار داخلی هادرون‌ها به شمار می‌آید.

۲.۱ پراکندگی ناکشسان لپتون - نوکلئون

در این نوع پراکندگی، به علت شناخت دقیق برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی، از لپتون‌ها می‌توان به عنوان کاوشگر ساختار درونی نوکلئون استفاده نمود. نوکلئون هدف در اثر برخورد مستقیم با لپتون، کاملاً متلاشی می‌شود و ساختار نوکلئون و ماهیت نیروهای بین کوارک‌ها، از داده‌های آزمایشگاهی مربوط به سطح مقطع پراکندگی قابل شناسایی خواهد بود.

با توجه به نوع لپتون کاونده، دو نوع آزمایش ناکشسان عمیق خواهیم داشت. در نوع اول الکترون‌ها

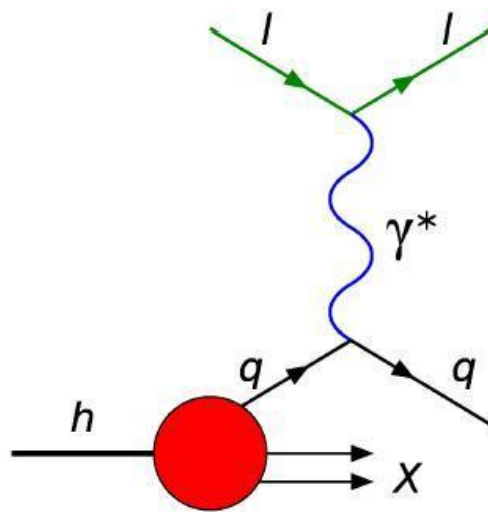
^۱ Deep Inelastic Scattering

^۲ Quantum Chromo Dynamics

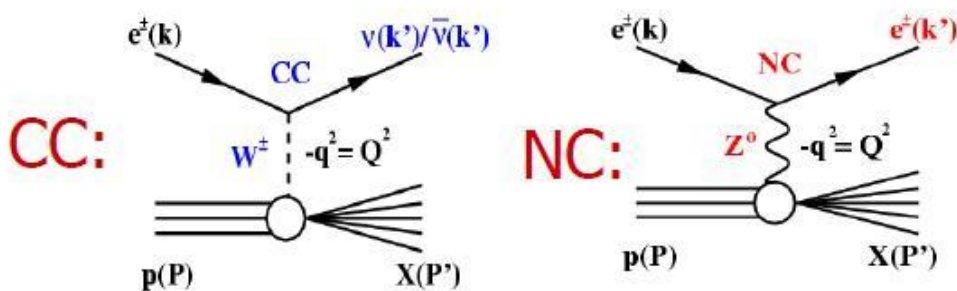
یا میون‌ها بر روی یک هدف نوکلئونی پراکنده می‌شوند که در این نوع پراکندگی نیروی الکترومغناطیسی با مبادله تک‌فوتون حضور دارد، تصویر (۱.۱). در نوع دوم به تولید نوترینو موسوم است، نیروی حاکم بر فرایند برهم‌کنش ضعیف هسته‌ای است و در طی آن تک‌بوزون مبادله می‌شود. این نوع خود شامل دو جریان می‌شود تصویر (۲.۱)

۱. جریان خنثی از طریق مبادله Z^0 .

۲. جریان باردار از طریق مبادله W^+ و W^- .



شکل ۱.۱: برهم‌کنش الکترومغناطیسی همراه با تبادل فوتون.



شکل ۲.۱: جریان خنثی با مبادله Z^0 و جریان باردار با مبادله W^\pm .

کمیت مهمی که در این آزمایش اندازه‌گیری می‌شود، میزان تغییر سطح مقطع هدف نوکلئونی به‌ازای زاویه پراکندگی و مقدار انرژی است که در خلال برخورد توسط لپتون تلف خواهد شد. مقدار انرژی

تلف شده ν ، تفاضل انرژی اولیه و نهایی لپتون است. زاویه پراکندگی لپتون نیز متناسب با مجذور تکانه انتقال یافته از لپتون به نوکلئون، با توجه به رابطه زیر به دست می آید

$$q^2 = 2E_i E_f (1 - \cos(\theta)), \quad (1.1)$$

متغیرهای ν و θ متغیرهای اصلی قابل مشاهده در پراکندگی هستند.

۳.۱ سینماتیک پراکندگی ناکشسان ژرف

پراکندگی ناکشسان ژرف لپتون-هادرون با سه متغیر توصیف می شود که یکی از آنها E انرژی لپتون ورودی است و ثابت نگه داشته می شود. دوتای دیگر از بین متغیرهای زیر انتخاب می شود [۱]

$$q^2 = -Q^2 = (l - l')^2, \quad (2.1)$$

$$W^2 = (P + q)^2, \quad (3.1)$$

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m_N} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{2m_N}, \quad (4.1)$$

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2m_N \nu}, \quad (5.1)$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot l} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{s - m_N^2}. \quad (6.1)$$

در رابطه (۶.۱) متغیر s مربع انرژی کل مرکز جرم می‌باشد

$$s = (p + P)^2 = m^2 + M^2 + S, \quad (7.1)$$

که در آن متغیر S به این صورت تعریف می‌شود

$$S = 2P.p, \quad (8.1)$$

در انرژی‌های زیاد می‌توان از جرم ذرات صرف نظر نمود و خواهیم داشت: $s \simeq S$. در چارچوب هدف ساکن، ν انرژی انتقال یافته از لپتون به نوکلئون است و y کسری از انرژی فرودی است که توسط فوتون حمل می‌شود، $y = \frac{\nu}{E}$. با توجه به اینکه $W^2 > m_N^2$ می‌باشد (W^2 مربع جرم ناوردای سیستم هادرونی X است)، متغیر x بیورکن و همچنین y بین ۰ و ۱ خواهند بود. اگر $m_{N\nu}$ و Q^2 هر دو خیلی بزرگتر از m_N^2 باشند و x ثابت و محدود باشد، آنگاه آزمایش در محدوده ناکشسان ژرف قرار دارد و در این ناحیه می‌توان از جرم نوکلئون صرف نظر نمود. در این صورت سطح مقطع برای این پراکندگی به این صورت محاسبه خواهد شد [۲]

$$d\sigma = \frac{1}{4(l.P)} \frac{1}{2} \sum_{s_l, s'_l} \frac{1}{2} \sum_S \sum_X \int \frac{dP_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \times \delta^4(P + l - P_X - l') |M|^2 \frac{d^3 l'}{(2\pi)^3 2E'}. \quad (9.1)$$

چون پراکندگی ناکشسان غیرقطبیده در نظر گرفته شده است، در معادله فوق روی اسپین لپتون اولیه و اسپین نوکلئون میانگین گرفته و روی اسپین لپتون نهایی جمع زده خواهد شد. دامنه مربعی در

این معادله به صورت زیر می باشد

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{u}_l(l', s'_l) \gamma_\mu u_l(l, s_l)]^* [\bar{u}_l(l', s'_l) \gamma_\nu u_l(l, s_l)] \\ \times \langle X | J^\mu(\circ) | P, S \rangle^* \langle X | J^\nu(\circ) | P, S \rangle, \quad (10.1)$$

که در اینجا $u_l(l, s_l)$ و $\bar{u}_l(l', s'_l)$ به ترتیب اسپینور الکترون ورودی و خروجی هستند و خط دوم رابطه (10.1) فرایند $\gamma + p \rightarrow X$ را توصیف می کند. حال تانسور هادرونی $W^{\mu\nu}$ را به این صورت تعریف می کنیم [۳]

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \sum_S \sum_X \int \frac{dP_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta^4(P - q - P'_X) \\ \times \langle P, S | J^\mu(\circ) | X \rangle \langle P, S | J^\nu(\circ) | X \rangle \\ = \frac{1}{2\pi} \int d^4z e^{iq \cdot z} \langle N | J^\mu(z) J^\nu(\circ) | N \rangle. \quad (11.1)$$

تانسور لیتونی $L^{\mu\nu}$ به این صورت نمایش می دهیم

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma} \sum_{s_l, s'_l} [\bar{u}_l(l', s'_l) \gamma_\mu u_l(l, s_l)]^* [\bar{u}_l(l', s'_l) \gamma_\nu u_l(l, s_l)] \\ = 2(l_\mu l'_\nu + l_\nu l'_\mu - g_{\mu\nu} l \cdot l'). \quad (12.1)$$

اگر رابطه (10.1) را در (9.1) قرار دهیم و از رابطه های (11.1) و (12.1) نیز استفاده کنیم، سطح مقطع دیفرانسیلی در چارچوب مرجع هدف ساکن، که در آن رابطه $(l.P) = m_N E$ بر قرار است، به این صورت نوشته می شود [۴]

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2}{2m^2 Q^4} \frac{E}{E'} L^{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (13.1)$$

که در اینجا $\Omega = (\nu, \phi)$ زاویه ای است که راستای لیتون خروجی را مشخص می کند. تانسور هادرونی

$W^{\mu\nu}$ را به این صورت می‌توان نمایش داد

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_N} W^{\mu\nu} &= (-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) W_1(P.q, q^2) \\ &+ \frac{1}{m_N} [(p_\mu - \frac{P.q}{q^2} q_\mu)(p_\nu - \frac{P.q}{q^2} q_\nu)] W_2(P.q, q^2). \end{aligned} \quad (14.1)$$

پس در نهایت سطح مقطع پراکندگی را می‌توان به این صورت بر حسب دو تابع ساختار W_1 و W_2 به این صورت نوشت

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} [2W_1 \sin^2 \frac{\nu}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\nu}{2}], \quad (15.1)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سطح مقطع DIS غیر قطبیده به زاویه پراکندگی ν وابسته است، نه به زاویه سمتی ϕ که بتوان روی آن انتگرال گرفت. در نهایت توابع بدون بعد زیر تعریف خواهد شد [۳]

$$F_1(x, Q^2) = m_N W_1(\nu, Q^2), \quad (16.1)$$

$$F_2(x, Q^2) = \nu W_2(\nu, Q^2), \quad (17.1)$$

بیورکن در سال ۱۹۶۹ ثابت کرد که در انرژی‌های بسیار بالا وابستگی توابع ساختاری با q^2 کاهش یافته و در حالت حدی فقط وابسته به x هستند، (حد بیورکن). در همین سال کالان و گروس رابطه میان توابع ساختار را بیان نمودند که با آزمایش نیز به اثبات رسید.

$$2xF_1(x) = F_2(x). \quad (18.1)$$

بنابراین در پراکندگی با انرژی بالا، دو تابع مجهول $F_1(x, Q^2)$ و $F_2(x, Q^2)$ جای خود را به یک

تابع مجهول از يك متغير $F_{\gamma}(x)$ می دهند و در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = f(F_{\gamma}, \theta, E, E'), \quad (19.1)$$

و چون متغیرهای E ، E' و θ قابل اندازه گیری در آزمایشگاه هستند، لذا می توان تابع ساختار را از داده های آزمایشگاهی استخراج نمود. در واقع سطح مقطع پراکندگی به صورت تابعی از x و y ، به این صورت با توابع ساختار در ارتباط است

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 s}{Q^2} xy^2 F_1(x, Q^2) + (1 - y - \frac{xy m_N^2}{s}) F_2(x, Q^2). \quad (20.1)$$

مقیاس بندی بیورکن نشان دهنده این موضوع است که نوکلئون ها از اجزای بدون ساختار (پارتون) تشکیل شده اند. نکته اساسی که از رابطه کالان - گروس (۱۶.۱) برداشت می شود این است که در انرژی های بسیار زیاد، فوتون تنها با یک پارتون برهم کنش می کند [۲]. به این ترتیب بود که اولین شواهد تجربی دال بر وجود کوارک ها در پراکندگی ژرف به دست آمد.

۴.۱ مدل پارتون

مدل پارتون در سال ۱۹۶۹ توسط ریچارد فاینمن معرفی شد. در این مدل فرض می شود که یک نوکلئون از اجزای بدون ساختار به نام پارتون تشکیل شده است. علاوه بر این، در انرژی های بالا فرض می شود نوکلئون در چارچوب مرجعی واقع است که دارای تکانه بی نهایت می شود (یک تقریب معتبر از پراکندگی در انرژی های بالا). بنابراین حرکت پارتون ها به دلیل اتساع زمان کند می گردد. همچنین توزیع بار نوکلئون یک ناوردای لورنتس است. در نتیجه ذرات برخوردکننده با نوکلئون بلافاصله به صورت ناهمدوس پراکنده خواهند شد [۵].

همچنین مقیاس بندی بیورکن نشان دهنده این حقیقت است که وابستگی توابع ساختار نوکلئون به Q^2 در انرژی های بالا کاهش می یابد و در حد فقط به x وابسته خواهند بود. متغیر x کسری از تکانه نوکلئون است که توسط پارتونی که مورد اصابت فوتون قرار گرفته است، حمل می شود. بنابراین توابع ساختاری که صرفاً وابسته به x هستند، نحوه توزیع تکانه نوکلئون را در میان پارتون های تشکیل دهنده

آن، مشخص می‌کنند.

مطابق با این مدل توابع توزیع پارتونی با توابع ساختار $F_1(x)$ و $F_2(x)$ به صورت زیر در ارتباط هستند.

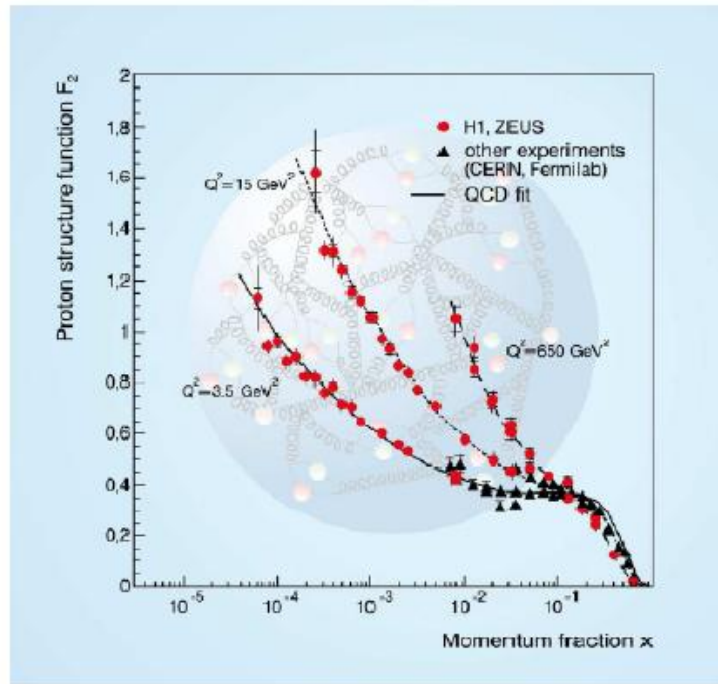
$$F_1(x) = \frac{1}{\gamma} \sum_i e_i^\gamma f_i(x), \quad (21.1)$$

$$F_2(x) = \sum_i e_i^\gamma x f_i(x). \quad (22.1)$$

در این روابط e_i بار کوارک i و $f_i(x)$ احتمال این که کوارک i کسر x از تکانه نوکلئون را حمل نماید. در نتیجه برای استخراج تابع ساختار نوکلئون می‌بایست توابع احتمال $f_i(x)$ را به دست آوریم. نکته قابل بیان دیگر در مورد مدل پارتونی این است که در این مدل فرض می‌شود پارتون‌ها به صورت ذرات آزاد رفتار می‌کنند. این موضوع بیانگر این است که این مدل حالت ساده‌ای از ساختار نوکلئون را بیان می‌کند. در حالی می‌دانیم گلوئون به عنوان واسطه نیروی رنگ در تعیین ساختار نوکلئون نقش اساسی را ایفا می‌کند. به عنوان مثال، این امکان وجود دارد که قبل از برخورد فوتون مجازی با کوارک و یا پس از برخورد، کوارک یک گلوئون را تابش کند. همچنین خود گلوئون نیز می‌تواند از فرایند $(\gamma * +g \rightarrow q\bar{q})$ تولید زوج $q\bar{q}$ نماید.

با در نظر گرفتن نظریه اختلالی، فرض مقیاس‌بندی بیورکن نقض می‌شود. به این مفهوم که توابع ساختار وابسته به Q^2 خواهند شد. در این حالت $F_2(x, Q^2)$ در x های کوچک با افزایش Q^2 افزایش یافته و در x های بزرگ با افزایش Q^2 کاهش می‌یابد. نقض مقیاس‌بندی بیورکن نشانه مستقیمی از تابش‌های گلوئونی کوارک‌ها است.

به طور کلی پارتونی که با فوتون مجازی برخورد می‌کند یا یکی از اجزای اصلی نوکلئون است و یا ممکن است در اثر برهم‌کنش‌های داخل نوکلئون ایجاد شده باشد. در طول موج‌های کوچکتر فوتون (Q^2 های بزرگتر) تعداد بیشتری از پارتون‌های تولید شده در اثر نوسانات کوانتمی را می‌توان مشاهده نمود. در نتیجه تعداد کوارک‌های دریا (جفت‌های کوارک-پادکوارک) و گلوئون‌ها افزایش می‌یابد. بنابراین تابع ساختار $F_2(x, Q^2)$ که شامل توزیع کوارک‌های دریا و ظرفیت است، در x های کوچک با افزایش Q^2 افزایش و در x های بزرگ با افزایش Q^2 کاهش می‌یابد، تصویر (۳.۱).

شکل ۳.۱: وابستگی F_2 به Q^2 .

۵.۱ تحلیل QCD داده‌های تجربی پراکندگی‌های ناکشسان

هدف از تحلیل QCD داده‌ها، به دست آوردن توابع توزیع پارتون‌ها از سطح مقطع‌ها یا توابع ساختار است. برای این کار، ابتدا باید توابع توزیع را در یک مقیاس ورودی از $Q^2 = (1 - 2) GeV^2$ پارامتربندی نمود. سپس آن را با استفاده از معادله تحول توزیع پارتون‌ها $DGLAP$ در مرتبه LO یا NLO ^۴ گسترش داد. از آنجایی که نظریه QCD قادر به بیان چگونگی وابستگی توابع توزیع به x نمی‌باشد، فرم تابعی توابع توزیع در Q^2 می‌بایست حدس زده شود.

همچنین وابستگی به Q^2 توابع ساختار کاملاً توسط معادلات تحول قابل به دست آمدن است و از طریق آن می‌توان QCD اختلالی را مورد آزمون قرار داد.

تمام تحلیل‌هایی که روی داده‌های DIS صورت می‌پذیرد بر اساس معادلات $DGLAP$ و در تقریب‌های مورد نظر می‌باشد. این تحلیل‌ها بر اساس انتخاب نوع پارامتربندی در مقیاس اولیه Q^2 ، مقدار ثابت جفت‌شدگی α_s ، رفتار خطاهای آزمایشگاهی و ترتیب کوارک‌های سنگین، با یکدیگر تفاوت دارند.

^۳ Leading order

^۴ Next-to-leading order

فصل ۲

چند جمله ای های متعامد

۱.۲ توابع متعامد

در این بخش ابتدا تعاریف و خواص توابع متعامد به صورت کلی مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. سپس مطالبی درباره مفهوم تمامیت توابع متعامد و بسط به کمک آنها در فضای هیلبرت^۱، بیان خواهد شد.

ضرب داخلی: برای توابع f و g ، ضرب داخلی در بازه $[a, b]$ و نسبت به تابع وزنی $w(x)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \quad (1.2)$$

که در آن تابع وزنی $w(x)$ ، نامنفی می باشد.

تعامد: دو بردار \vec{d} و \vec{c} در یک فضای ضرب داخلی بر هم عمود هستند اگر ضرب داخلی آنها $\langle d, c \rangle$ مساوی صفر باشد.

با توجه به تعاریف بالا، دو تابع f و g در بازه $[a, b]$ و نسبت به تابع وزنی $w(x)$ بر یکدیگر عمود هستند اگر حاصل ضرب داخلی آن دو مساوی صفر باشد

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = 0, \quad (2.2)$$

^۱مجموعه همه توابع مجذوراً انتگرال پذیر

دنباله توابع متعامد: اعضای یک دنباله از توابع $\{f_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ در بازه $[a, b]$ و نسبت به تابع وزنی $w(x)$ ، متعامد هستند اگر

$$\langle f_i, f_j \rangle_w = \int_a^b f_i(x) f_j(x) w(x) dx = \|f_i\|^2 \delta_{i,j}, \quad (3.2)$$

و راست هنجار (متعامد یکه) هستند اگر

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_a^b f_i(x) f_j(x) w(x) dx = \delta_{i,j}, \quad (4.2)$$

تمامیت^۲: مجموعه $f_n(x)$ دارای خاصیت تمامیت است اگر هر تابع $F(x)$ خوش رفتار (دست کم پاره پاره پیوسته) را بتوان به تقریب با سری زیر نمایش داد

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x), \quad (5.2)$$

به عبارت دقیق‌تر، مجموعه $f_n(x)$ را در صورتی کامل (خاصیت تمامیت) گوئیم که حد خطای مربعی میانگین زیر صفر شود [۱۷]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b \left[F(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \right]^2 w(x) dx = 0, \quad (6.2)$$

این انتگرال از لحاظ تکنیکی یک انتگرال لبگ^۳ است. این شرط از این بابت وضع شده است که انتگرال مربع خطا می‌بایست در بازه $[a, b]$ صفر شود.

از دیدگاه جبر خطی، ما یک فضای خطی، یا همان فضای تابعی را در دست داریم که توابع متعامد بهنجار مستقل خطی $f_n(x)$ ، پایه این فضای بینهایت بعدی به شمار می‌آیند. معادله (۵.۲) نشان دهنده این موضوع است که توابع $f_n(x)$ این فضای خطی را تولید می‌کنند. این فضای خطی به همراه عمل ضرب داخلی تعریف شده توسط رابطه (۱.۲)، یک فضای هیلبرت را تشکیل می‌دهند.

Completeness^۲

Lebesgue^۳