بسم الله الرحمن الرحیم

۲۷۱۰۱

دانشگاه تهران

بستارکیب

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

تیرداد شریف

استاد راهنما

دکتر سیامک یاسمی

خرداد ۱۳۷۸

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض**
آقای تیرداد شریف تحت عنوان :

بستار کیپ

در تاریخ ۷۸/۴/۹ **در دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.
هیأت داوران براساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات،
پایان نامه ایشان را برای دریافت درجه **کارشناسی ارشد** در رشته ریاضی محض معادل با
۶ واحد با نمره ۱۹/۵ نوزده و نیم با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیامک یاسمی	استادیار	تهران	
۲ - استاد داور	دکتر حسین ذاکری	استاد	تربیت معلم	
۳- استاد مشاور	دکتر رحیم زارع نهندی	استاد	تهران	

سرپرست تحصیلات تکمیلی گروه	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	محمد رضا درفشه	رسول اخروی

فهرست مطالب

«پیشگفتار»

در این پایان نامه بیش از همه مدیون جناب آقای دکتر یاسمی هستم که با راهنمائیهای خود و در اختیار قراردادن مراجع مناسب مرا یاری نمودند. از جناب استاد آقای دکتر زارع نهندی بعلت راهنمائیهای مناسبشان در قسمتهایی از این رساله سپاسگزارم همچنین نهایت قدردانی و تشکر را از سرکار خانم سمیع بعلت زحمات بیدریغشان در تایپ این پایان‌نامهٔ طولانی را دارا هستم. در نهایت از تمام استادان و معلمین عزیزم در تمام مراحل تحصیلم سپاسگزارم.

تیرداد شریف

مقدمه

نظریه بستارکیپ بسیار دشوار است. ذکر اسامی افرادی که این نظریه را پدید آورده‌اند وسعت و اهمیّت آنرا نشان میدهد. افرادی نظیر M. Hochster؛ C. Huneke؛ K. Smith؛ Aberbach؛ watanabe؛ P. Roberts؛ J. Lipman؛ J. Swanson. امّا ریشه‌های این نظریه را عمدتاً می‌توان در کارهای C. Peskine؛ L.S. Zpiro؛ M.Hochster و P.Roberts پیدا کرده در مواردی که قصد برگرداندن یک مسئله به مشخصه‌های مثبت را داریم روشهای کاری این افراد منشاء انتزاع نظریه بستارکیپ (Tight closure) بوده است؛ امّا بطور جدی این نظریه در یک مکالمه بین Huneke و Hochster آغاز شده است. اگر فرض کنیم که R حلقه‌ای جابجایی و نوتری و از مشخصه عدد اوّل p باشد و $I \subseteq R$، ایدآلی از آن، بستارکیپ I را که خود یک ایدآل است با I^* نمایش میدهیم. I^* شامل I است. ما بستارهای دیگری را هم می‌شناسیم مانند $\mathrm{Rad}(I)$ و بستار انتگرال (فصل دوّم) امّا I^* از دوتای دیگر به‌خود ایدآل نزدیکتر است. قصد از طراحی این بستار آنست که خواص ظریفی از ایدآل را حفظ کند امّا اهداف دیگری در شکل دهی این بستار موثر بوده‌اند که عبارتند از ۱ـ در حلقه‌های منظم $I^* = I$ برای هر ایدآلی درست باشد (حلقه‌هایی که چنین ویژگی مهمی را دارند، Fـمنظم ضعیف نامیده می‌شوند و خصوصیت فوق را برای حلقه‌های منظم در فصل اوّل ثابت خواهیم کرد) ۲ـ بستار در شرط Colon-Capturing صدق کند ۳ـ بستارکیپ I شامل بستار انتگرال توانی از ایدآل I باشد (بریانشون‌ـاسکودا) ۴ـ انقباضِ بستارکیپ توسیع یک ایدآل مشمول در بستارکیپ ایدآل مفروض باشد بعبارتی اگر $R \subseteq S$ حلقه‌هایی نوتری و از مشخصه $p > 0$ باشند. $I \subseteq R$ آنگاه $(IS)^* \cap R \subseteq I^*$ (قضیهٔ (۱ـ۸) را ببینید) اگر با طرفداران مکتب اصالت عمل (پراگمانیسم) در مورد نظریه‌های علمی و ریاضی موافق باشیم و صدق را، سودمندی بدانیم، باید بگوئیم بستارکیپ بسیار سودمند است و لذا از درجهٔ صدق بالایی برخوردار است چراکه ما را در حل حدسهایی بسیار مهم در جبر جابجایی و همولوژی یاری رسانده است. در این رساله دو حدس مهم از جبر جابجایی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

در سال ۱۹۷۳ M. Hochster حدس زیر را ارائه کرد:

فرض کنیم که R, S حلقه‌هایی جابجایی و یکدار بوده که S حلقه‌ای منظم و شامل R باشد. اگر R به‌عنوان R مدول جمعوند S باشد آیا R، C.M است؟

این حدس تحت عنوان "Direct Summand of a regular ring" معروف می‌باشد که هنوز مسئله‌ای باز است. با طراحی بستارکیب که دارای ویژگیهای چهارگانه فوق باشد این حدس را در حالتی که مشخصهٔ R عدد اول $p > 0$ باشد در فصل اوّل حل خواهیم کرد که تاکنون بدون کمک بستارکیب با این کلیت حل نگردیده است. امّا مسئله بار دیگری که به‌آن خواهیم پرداخت مسئله معروف monomial conjecture می‌باشد و آن چنین است:

اگر (R, m) حلقه‌ای موضعی و نوتری باشد و $x_1, \cdots, x_n \in R$ یک سیستم پارامتری باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی t: $(x_1 \cdots x_n)^t \notin (x_1^{t+1}, \cdots, x_n^{t+1})$.

ما این مسئله را پس از حدس Hochster در فصل اوّل پایان‌نامه در حالتی که حلقه R از مشخصه $p > 0$ باشد حل خواهیم کرد. بستارکیب در حلقه‌های با مشخصهٔ صفر و مرکب تاکنون تعریف نشده است امّا زمانی که R روی یک میدان از مشخصه صفر، یک جبر متناهی مولد باشد تعاریفی موجود است ولی بنابر آنها هنوز نمی‌دانیم که آیا I^* یک ایدآل است یا خیر؟ همچنین برای زیرمدولهای یک مدول متناهی مولد روی یک حلقه نوتری از مشخصهٔ p، بستارکیب را تعریف کرده‌اند که متّکی برفانکتور فروبنیوس است. امّا ما در این رساله فرصت پرداختن به‌آنرا نخواهیم داشت. آنچه را که ما در این پایان‌نامه بیان خواهیم کرد مقدماتی است و شاید بهتر باشد عنوان این رساله را مقدمه‌ای بر بستارکیب بنامیم.

ویژگی عجیب I^* آنست که زمانی که انتظار رفتار طبیعی را از آن داریم با دشواریهای بسیار جدی وگاه با مسائلی باز روبرو خواهیم شد. امّا I^* در غیر طبیعی‌ترین موقعیتها ظاهر شده و ما را با شگفتی مواجه میسازد. دو مسئله طبیعی که پیکره اصلی فصل سوّم این رساله را تشکیل میدهند هر دو از مسائلی بسیار دشوار و باز در نظریهٔ Tight closure هستند آنها عبارتند از: آیا این بستار با موضعی‌سازی تعویض پذیر است؟ بعبارتی اگر $W \subset R$ بسته ضربی و $I \subseteq R$ یک ایدآل از آن باشد، آیا $(W^{-1}I)^* = W^{-1}(I^*)$؟ و آیا اگر R، F منظم ضعیف باشد آنگاه برای هر ایدآل اول p، R_p، Fـمنظم ضعیف است؟ (این مسئله معادل آنست که اگر R، Fـمنظم ضعیف باشد، آیا Fـمنظم است؟ برای علت این امر رجوع شود به‌فصل اوّل) پرداختن جدی به این نظریه در سطح بالاتری از یک رساله کارشناسی ارشد هم ممکن نمی‌باشد با این حال سعی من در این رساله این بوده است که در حد امکان اثباتها را بطرزی کاملاً مقدماتی بیان کرده

و همه پیش‌نیازهای لازم را گرد آورم. کتاب Tight closure تألیف Huneke خود دشوار است، اثباتها بطرزی خلاصه آورده شده‌اند و گاه از مطالبی عمیق و جدی اثباتی نمی‌توان یافت. پراکندگی موضوعات این نظریه بسیار زیاد است و یافتن و فراگرفتن آنها ناممکن بطوریکه حتی فرصت پرداختن جدی به مباحثی مهم در این نظریه نظیر Test element (برای تعریف آن به‌فصل دوّم رجوع شود) و تغییر پایه (Base change) را نداشته‌ام. در این نظریه حتی این سوال که آیا F-منظم ضعیف بودن (R,m)، F-منظم ضعیف بودن $\hat{R}$ (تحت m-ادیک توپولوژی) را نتیجه می‌دهد؟ مسئله‌ای بسیار دشوار و باز است و حتی حل آن در حالاتی خاص بسیار سنگین است در واقع این مسئله مستلزم بررسی عمیق حلقه‌های excellent و نگاشتهای منظم (Smooth base change) می‌باشد. (با اثباتی بسیار سنگین نشان داده می‌شود که اگر حلقه (R,m)، excellent و F منظم ضعیف (F-منظم) باشد آنگاه $\hat{R}$ هم همان خاصیت را دارد). امّا آنچه را که من جدّی تر به آن پرداخته‌ام رابطهٔ بین F منظم ضعیف بودن و F-منظم بودن و F-گویا بودن و همچنین دو حدس جبر جابجایی ذکر شده در قبل می‌باشد. از مهمترین قضایای نظریه بستارکیپ قضیهٔ Colon-Capturing است. همانگونه که میدانیم اگر $x_1,\cdots,x_n \in R$ یک R-دنباله باشد آنگاه $(x_1,\cdots,x_{n-1}) : x_n \subseteq (x_1,\cdots,x_{n-1})$. در این رساله x_iها را در حلقهٔ R چنان تعریف می‌کنیم (به‌تعریف پارامتر در فصل صفر رجوع شود)که در حلقه‌های C.M به‌همان R دنباله‌ها تبدیل می‌شوند.

با شرایطی روی حلقه R(تصویر یک حلقهٔ C.M و متساوی‌البعد بودن) به‌رابطهٔ

$$(x_1,\cdots,x_{n-1}) : x_n \subseteq (x_1,\cdots,x_{n-1})^*$$

میرسیم. این قضیه را Colon-Capturing می‌نامیم که دارای دو صورت است و ما هردو صورت آنرا در این پایان‌نامه اثبات خواهیم کرد، صورت اوّل را در فصل اوّل و صورت دوّم را در فصل سوم بیان خواهیم کرد و نشان میدهیم که صورت دوّم تعمیمی از صورت اوّلی است. صورت اوّل آن ما را در حل دو حدس بزرگ monomial conjecture, Direct Summand در حلقه‌های با مشخصهٔ $p>0$ کمک می‌کند و صورت دوّم آن ما را در تحلیل رده‌های مهمی از حلقه‌ها یعنی حلقه‌های F-منظم ضعیف و F-منظم یاری می‌دهد. به‌عنوان مثال اینکه در حلقه‌های گرنشتاین هر دو شرایط برهم منطبق می‌شوند بعبارتی یکی دیگری را نتیجه می‌دهد. در اینگونه حلقه‌ها خواهیم دید که R F-منظم ضعیف (F-منظم) خواهد بود اگر و تنها اگر فقط یک سیستم پارامتری بسته باشد. ساده‌ترین و

طبیعی‌ترین سوالات در این نظریه ما را با مسائلی باز و جدی مواجه می‌سازد که مثلاً بعضی از آنها عبارتند از:

۱ـ اگر R، F منظم ضعیف باشد و $x \in R$ مقسوم‌علیه صفر نباشد آیا $\frac{R}{xR}$ F منظم ضعیف است؟ عکس مطلب چطور؟

۲ـ اگر R، Fـمنظم ضعیف باشد، $R[x]$ و $R[[x]]$ چگونه‌اند؟

۳ـ اگر (R, m) نوتری و موضعی و $I \subseteq R$ ایدآلی از آن باشد آیا $(I\hat{R})^* = I^*\hat{R}$؟

اینجا به‌جرآت می‌توان گفت که در حلقه‌های نوتری با مشخصه $p > 0$، اثبات یک موضوع در مورد بستارکیپ یک ایدآل همانقدر مهم است که در مورد خود ایدآل، نمونه‌ای از این امر تعمیم قضیهٔ بریانشون‌ـاسکودا می‌باشد آنچه را که من در این رساله انجام داده‌ام می‌تواند آغازی باشد برای کسانی که علاقه‌مند به‌کار روی این موضوع هستند. دو قسمت مهم دیگر از این نظریه یعنی Base change, test elemnt از غنا و محتوائی بسیار عمیق برخوردارند که فراگیری آنها حرکتی بسیار جدی را می‌طلبد؛ امّا به‌عنوان نظری شخصی معتقد هستم درک و شهود عمیقی از جبرجابجایی، کوهومولوژی موضعی (Local cohomology) هندسه جبری؛ regular base change؛ Etale Theory؛ Homology برای فراگیری جدی این نظریه ضروری است که از این دیدگاه برخورد من با این نظریه بسیار سطحی بوده است. بهرحال امیدوارم این رساله مقدمه‌ای برای علاقه‌مندان آینده باشد. تاچه مقبول افتد.

تیرداد شریف

فصل صفر

پیش‌نیازها

مطالبی که در این فصل آورده شده‌اند بعضاً درکتب درسی جبر جابجایی موجودند امّا اصطلاحات و نمادگذاریها از مرجع [۶] اقتباس شده‌اند. برهان تعدادی از قضایا در این مرجع موجودند و برهان قضایایی که بطور مشخص در آن ذکر نشده‌اند و یا به‌عنوان تمرین آورده شده‌اند را در همین قسمت آورده‌ایم.

در این فصل قضایا را با نمادهای سه‌تایی مرتب کرده‌ایم که مثلاً منظور از سه‌تائی (۰_۳_۲) به‌معنای آنست که این قضیه، در بخش پیش‌نیازها موجود میباشد و دومین قضیه‌ای است که در فصل سوم به‌عنوان پیش‌نیاز عنوان شده است. قضایای موجود در فصلهای بعدی را با نمادهایی ۲ تائی مرتب کرده‌ایم. تمامی حلقه‌هایی که در این رساله بکار میروند،

جابجایی، یکدار و نوتری هستند. تعدادی از قضایا در حالتی که مشخصهٔ حلقه عدد اول $p > 0$ باشد برقرارند که در این حالت می‌نویسیم $\mathrm{char}(R) = p$. امّا بیشتر قضایای این فصل در حالت کلی هم برقرارند. نظریه بستارکیپ که در این رساله به آن خواهیم پرداخت فقط برای حالتی که $\mathrm{char}(R) = p$ باشد شرح داده می‌شود. از آنجایی که حلقه‌های ما نوتری هستند، پس تعداد ایده‌آلهای اوّل مینیمال روی هر ایدآل I، متناهی است و مجموعهٔ آنها را با $\min(I)$ نمایش خواهیم داد و مجموعهٔ $\min(0)$ را با $\min(R)$ نمایش می‌دهیم.

همچنین $R^0 = R - \bigcup_{p \in \min(R)} p$. فرض کنیم I ایدالی از یک حلقه جابجایی و نوتری R باشد که $\mathrm{char}(R) = p$ و داشته باشیم $I = (a_1, \cdots, a_n)$ برای $q = p^e$ که e عددی صحیح و مثبت یا صفر است. $I^{[q]} =< i^q : i \in I >$. همچنین برای چون مشخصه حلقه p است، بنابر بسط دو جمله‌ای نیوتن بوضوح داریم $I^{[q]} =< a_1^q, \cdots, a_n^q >$. همچنین برای $q = p^e$، قرار می‌دهیم $F^e : R \longrightarrow R$ که $F^e(r) = r^q$. بسادگی F^e یک همریختی حلقه‌ای است که آنرا هومورفیسم فروبنیوس از مرتبهٔ e می‌نامیم. واضح است که $I^{[q]} = F^e(I)R$.

لم ۱.۰.۱. فرض کنیم $n \in \mathrm{N}$ عدد طبیعی باشد، آنگاه داریم:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$$

برهان: فرض کنیم که S مجموعه‌ای متناهی باشد و $A_i \subseteq S$ که $1 \leq i \leq q$ و $q \geq 2$ اگر $\overline{A}_i = S - A_i$ باشد. از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم (این اصل در نظریهٔ مجموعه‌های متناهی و ترکیبیات شناخته شده میباشد). بنابراین قضیه داریم:

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_q| = |S| - \sum_{i=1}^{q} |A_i| + \cdots + (-1)^t \sum_{i_1 < \cdots < i_t} |A i_1 \cap \cdots \cap A_{i_t}|$$
$$+ \cdots + (-1)^q |A_1 \cap \cdots \cap A_q|$$

حال فرض کنیم که n شی $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ را داشته باشیم. آنگاه اگر $S = \{p | p$ یک ترتیب n از n برای a_iهاست$\}$ بوضوح داریم $|S| = n^n$. زیر مجموعه‌های A_i را چنین تعریف می‌کنیم $A_i = \{p \in S | p$ فاقد شی a_i است$\}$ آنگاه $|A_i| = (n-1)^n$ و لذا $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}$ به‌معنای ترتیبهایی است که فاقد حروف $a_{i_1}, \cdots, a_{i_t}$ هستند.

پس $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (n-t)^n$. لذا بنابر تعریف A_i، مجموعهٔ $\overline{A_i}$ تعداد ترتیبهایی است که دارای حرف a_i هستند لذا $\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$ تعداد ترتیبهایی است که همه حروف را دارند، لذا این تعداد همان $n!$ است و بنابراین $|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = n!$. حال مطابق اصل شمول و عدم شمول

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1) + \cdots + (-1)^t\binom{n}{t}(n-t)^n + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^n$$
$$\Rightarrow n! = \sum_{t=0}^{n}(-1)^t\binom{n}{t}(n-t)^n \Rightarrow n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}k^n$$

و از طرفی چون $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ لذا $n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n$. □

قضیه ۰.۱.۱. فرض کنیم (R, m) حلقه‌ای موضعی و نوتری باشد. اگر $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی باشد آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} m^{n_i} = 0$.

برهان: فرض کنیم که a, b ایدالهایی از حلقه R باشند بقسمی‌که $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^{n_i} = b$. نشان می‌دهیم $b = ab$. بوضوح $ab \subseteq b$. حال فرض کنیم $ab = q_1 \cap \cdots \cap q_m$ که q_iها، p_i-اولیه‌اند. نشان می‌دهیم $b \subseteq q_i$ برای هر i. فرض کنیم که $b \not\subseteq q_1$. پس $y \in b - q_1$. حال $x \in a$ را دلخواه می‌گیریم:

$$xy \in ab \Longrightarrow xy \in q_1 \Longrightarrow x \in \sqrt{q_1} = p_1 \Longrightarrow a \subseteq p_1$$

امّا چون R نوتری است پس $p_1^r \subseteq q_1$ برای یک r طبیعی. پس $a^r \subseteq q_1$. چون n_iها دنباله‌ای صعودی‌اند و نامتناهی، پس برای لااقل یک i، $n_i > r$ و از آنجا برای $\forall j, j \geq i$ زنجیر $a^{n_j} \subseteq a^{n_i} \subseteq a^r \subseteq q_1$ را داریم، امّا $b \subseteq a^{n_j}$ برای $j \geq i$ پس $b \subseteq q_1$ که تناقض است، لذا $ab = b$. حال اگر $a = m$، داریم $mb = b$ و ازآنجا بنابر لم ناکایاما $b = 0$. □

قضیه ۰.۱.۲. اگر R حلقه‌ای جابجایی و I ایدآلی از R باشد و $I \subset p_1 \cup \cdots \cup p_n$ که حداکثر ۲ تا از p_iها اول نباشند آنگاه $I \subset p_i$ برای لااقل یک i.

قضیه ۳.۱.۰. $(Davis)$ اگر $p_1, \cdots, p_n$ ایدالهایی اوّل از حلقه جابجایی R باشند و I یک ایدآل و $x \in R$ بقسمی‌که $xR + I \not\subset p_1 \cup \cdots \cup p_n$، آنگاه $i \in I$ وجود دارد که $x + i \notin \bigcup_{j=1}^{n} p_j$. در این قضیه حداکثر دوتا از ایدالها می‌توانند اوّل نباشند.

قضیه ۴.۱.۰. فرض کنیم R, S حلقه‌هایی جابجایی باشند و $f : R \longrightarrow S$ یک هومورفیسم یکدست باشد (S به‌عنوان یک R مدول که تحت f القا می‌شود، یکدست باشد) اگر I، J ایدالهایی از حلقهٔ R باشند آنگاه $(I \cap J)S = IS \cap JS$ و اگر ایدآل J متناهی مولّد باشد آنگاه $(IS :_S JS) = (I :_R J)S$.

برهان: هومورفیسم Rـمدول $\phi : R \longrightarrow \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J}$ دارای هستهٔ $\mathrm{Ker}\varphi = I \cap J$ است. پس

$$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi} \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J} \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای دقیق است از Rـمدولها. چون S یک R مدول یکدست است پس رشته مقابل هم دقیق است.

$$0 \longrightarrow (I \cap J) \otimes_R S \longrightarrow R \otimes_R S \xrightarrow{\varphi \otimes 1} \frac{R}{I} \otimes S \oplus \frac{R}{J} \otimes S \longrightarrow 0$$

و لذا رشته زیر دقیق است

$$0 \longrightarrow (I \cap J) \otimes_R S \longrightarrow S \xrightarrow{\overline{\varphi}} \frac{S}{IS} \oplus \frac{S}{JS} \longrightarrow 0$$

چون دنباله فوق دقیق است، پس $\mathrm{Ker}\overline{\varphi} = (I \cap J) \otimes_R S$ از طرفی $\mathrm{Ker}\overline{\varphi} = IS \cap JS$. پس $IS \cap JS = (I \cap J) \otimes_R S$. از طرفی S، Rـیکدست است پس برای هر ایدآل a از $a \otimes_R S = aS$ لذا $(I \cap J) \otimes_R S = (I \cap J)S$.

برای اثبات قسمت دوّم قضیه، فرض کنیم $J =< a_1, \cdots, a_n >$، لذا $< I : J >= \bigcap_{i=1}^{n} < I : a_i >$، بنابراین اگر حکم این قسمت را برای حالتی که J توسط یک عضو تولید می‌شود،نشان دهیم. بنابر قسمت قبل داریم

$$< I : J > S = (\bigcap_{i=1}^{n} < I : a_i >)S = \bigcap_{i=1}^{n}(I : a_i)S = \bigcap_{i=1}^{n}(IS : f(a_i)S >=< IS : JS >$$

لذا فرض کنیم $x \in R$ و S روی R یکدست باشد. نشان می‌دهیم که $(IS :_S f(x).S) = (I :_R x).S$. ابتدا فرض کنیم که $f(r).s$ برای $r \in (I :_R x)$ و $s \in S$، مولدی برای ایدآل $(I :_R x).S$ باشد و فرض کنیم $f(x).s' \in f(x).S$ داریم:

$$(f(r)s)(f(x)s') = f(rx)ss' \in f(I).S = IS$$

. از طرف دیگر رشته دقیق زیر را داریم

$$0 \longrightarrow \frac{R}{(I :_R x)} \xrightarrow{h} \frac{R}{I} \xrightarrow{g} \frac{R}{(I, x)} \longrightarrow 0$$

که توابع h, g چنین هستند:

$$h(r + (I :_R x)) = rx + I \quad , \quad g(r + I) = r + (I, x)$$

بسهولت می‌توان دید رشته فوق دقیق است. چون S، R یکدست است، پس

$$0 \longrightarrow \frac{R}{(I : x)} \otimes_R S \xrightarrow{\overline{h}} \frac{R}{I} \otimes_R S \xrightarrow{\overline{g}} \frac{R}{(I, x)} \otimes_R S \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow 0 \longrightarrow \frac{S}{(I : x)S} \xrightarrow{\overline{h}} \frac{S}{IS} \xrightarrow{\overline{g}} \frac{S}{(I, x)S} \longrightarrow 0$$

$$\overline{h}(s + (I : x)S) = x.s + IS = f(x)s + IS$$

$$\overline{g}(s + IS) = s + (I, x)S$$

حال فرض کنیم که $s \in S$ و $s \in (IS :_S x.S)$ پس $sx \in IS$ بعبارتی $f(x)s \in IS$ لذا $s + (I : x)S \in \mathrm{Ker}\overline{h}$ و چون $\overline{h}$ یک به یک است پس $s \in (I : x)S$ و از آنجا حکم برقرار است. □

قضیه ۵.۱.۰. اگر R یک حلقه موضعی و $C.M$ باشد و $x_1, \cdots, x_n \in m$ بقسمی‌که $ht(x_1, \cdots, x_n) = n$ آنگاه $x_1, \cdots, x_n$ یک Rـدنباله است.

برهان: چون $C.M(R, m)$ است، پس $\operatorname{grad}(I, R) = n$ که $I = (x_1, \cdots, x_n)$. ابتدا فرض کنیم که a یک ایدآل حلقهٔ R باشد و $x \in R$ و $b = a + xR$، نشان می‌دهیم که $\operatorname{grad}(b, R) \leq 1 + \operatorname{grad}(a, R)$.

فرض کنیم $\operatorname{grad}(a) = m$ لذا $t_1, \cdots, t_m \in a$، Rـدنبالهٔ ماکسیمال a میگیریم، داریم: $R^* = \frac{R}{(t_1, \cdots, t_m)}$ پس $\operatorname{grad}(a^*, R^*) = 0$. لذا کافیست نشان دهیم که $\operatorname{grad}(b^*, R^*) \leq 1$ وقتی $a^* \subseteq Z(R^*)$.

پس مسئله را برای حالتی که $a \subset z(R)$ و $b = a + xR$ باشد حل کرده و نشان میدهیم $\operatorname{grad}(b, R) \leq 1$. اگر $b \subseteq z(R)$ پس $\operatorname{grad}(b) = 0$ لذا فرض کنیم که $b \not\subset Z(R)$ پس $a + xR \not\subset Z(R)$. حال مطابق (۰ـ۱ـ۳) $\alpha \in a$ موجود است که $u = \alpha + x \notin Z(R)$، بوضوح $b = uR + a$، کافیست نشان دهیم $b \subset Z\left(\frac{R}{uR}\right)$

$$y \in b \Rightarrow y = \alpha + ru, \quad \alpha \in a \subset Z(R) \Rightarrow \exists t \neq 0, \quad \alpha t = 0$$

$$\Longrightarrow yt = \alpha t + rut \in (u) \Longrightarrow y \in z\left(\frac{R}{UR}\right)$$

رابطه اخیر بشرطی برقرار است که $t \notin uR$. اگر $t \in uR$ پس $t = ut_1$ و از آنجا داریم:

$$\alpha t = 0 \Rightarrow \alpha t_1 u = 0 \Rightarrow \alpha t_1 = 0$$

زیرا $u \notin Z(R)$. اگر $t_1 \notin UR$، مجدداً $yt_1 \in UR$ و لذا $y \in z\left(\frac{R}{UR}\right)$ و اگر $t_1 \in UR$ پس $t_1 = Ut_2$ و از آنجا $t = U^2 t_2 \in U^2 R$. چون $u \in m$ پس $\bigcap_{n=1}^{\infty} u^n R = 0$ و لذا اگر $t \in u^n R$ پس $t = 0$. که تناقض است لذا t_k هست که $\alpha t_k = 0$ و $t_k \notin UR$ و از آنجا $\operatorname{grad}(b, R) = 1$. حال با توجه به استقرا ریاضی روی n، نشان میدهیم $x_1, \cdots, x_n \in R$، R دنباله است. $J = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ پس $\operatorname{grad}(J) \leq n - 1$ امّا $I = J + Rx_n$ لذا

$$\operatorname{grad}(I, R) \leq 1 + \operatorname{grad}(J, R) \Longrightarrow \operatorname{grad}(J, R) \geq n - 1 \Longrightarrow \operatorname{grad}(J, R) = n - 1$$

پس بنابر فرض استقرا $x_1, \cdots, x_{n-1}$، Rـدنباله‌اند. اگر $x_n \in Z\left(\frac{R}{J}\right)$ لذا $a \in R - J$ هست که $x_n a \in J$. نشان می‌دهیم $I \subset Z\left(\frac{R}{J}\right)$.

$$t \in I \Longrightarrow t = rx_1 + \cdots + r_n x_n \Longrightarrow ta \in J \Longrightarrow t \in Z\left(\frac{R}{J}\right) \Longrightarrow I \subseteq Z\left(\frac{R}{J}\right)$$

بنابراین $\operatorname{grad}(I, R) = n - 1$ که تناقض است، پس $x_n \notin Z\left(\frac{R}{J}\right)$ و از آنجا $x_1, \cdots, x_n \in m$ Rـدنباله‌اند. □