بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۴۶۴۳ – ۲۰۱۲۵۳۶

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

نمایشی برای ابرجبرهای لی $B(0,N)$–مدرج مختصاتی شده با چنبره های کوانتومی

استادان راهنما:

دکتر ملیحه یوسف زاده

دکتر سعید اعظم

پژوهشگر:

مرضیه جمالی

آذرماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم مرضیه جمالی بیرگانی

تحت عنوان:

ابرجبرهای لی $(0,N)$ B– مدرج مختصاتی شده با چنبره‌های کوانتومی

در تاریخ ... ۸۸/۹/۲۸..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی........... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر ملیحه یوسف زاده با مرتبه علمی استادیار امضاء

۲- استاد راهنمای پایان نامه دکتر سعید اعظم با مرتبه علمی استاد امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر جواد باقریان با مرتبه علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر رسول رکنی زاده با مرتبه علمی دانشیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیر و تشکر

خداوند سبحان را از سویدای دل سپاس می گویم، او که همواره مرا در دریای رحمت و لطفش غرق کرده است.

در مسیر زندگی ام لطف انسانهای مهربانی شامل حالم شده که بی شک یاریگر ناتوانی هایی من بوده است، از معلم ابتدایی ام که چگونه قلم در دست گرفتن را به من آموخت تا اساتیدی که اکنون واژه های علم را برایم تفسیر می کنند.

شایسته است تشکر ویژه ای داشته باشم از استادان راهنمای مهربانم، سرکار خانم دکتر ملیحه یوسف زاده و جناب آقای دکتر سعید اعظم که صادقانه مرا یاری دادند. بر خود می بالم که شاگرد این اساتید عزیز بوده ام، رسم بهترین بودن در تمامی زمینه های زندگی درس بزرگی است که از ایشان آموخته ام.

همچنین زحمات اساتید داور، جناب آقای دکتر رکنی زاده داور خارجی و جناب آقای دکتر باقریان داور داخلی را ارج نهاده و از ایشان تشکر می کنم.

از پدر و مادر عزیزم و خواهر و برادران مهربانم که بی دریغ به من مهر ورزیدند و یاریگرم بوده اند بی نهایت سپاسگذارم.

در پایان از تمامی کسانی که در تدوین این پایان نامه مرا یاری دادند به ویژه سرکار خانم ها فرهمند، گرامی، غازی و معمار کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

دو فرشته مهربان که دعای خیرشان، همیشه بدرقه راهم بوده

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه ی ابرجبرهای لی می پردازیم و ابرجبرهای لی کلاسیک را دسته بندی می کنیم. همچنین به بررسی ابرجبرهای لی B(M,N)-مدرج، برای $M\in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ و $N\in \mathbb{Z}^{\geq 0}$، می پردازیم . در پایان نمایشی برای یک توسیع مرکزی از ابرجبرهای لی B(0,N)-مدرج که توسط چنبره های کوانتومی مختصاتی شده اند، به دست می آوریم.

کلید واژه ها: چنبره ی کوانتومی، جبر کلیفورد، ابرجبرلی B(M,N)-مدرج، توسیع مرکزی.

فهرست مطالب

پیش گفتار

اولنبگ [۱] و گوداسمیت [۲] در سال ۱۹۲۵ اظهار کردند که اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ذاتی، کاملاً مستقل از حرکت مداری، به هر الکترون وابسته است. این اندازه حرکت ذاتی، اسپین الکترون نامیده می‌شود. اسپین ذرات متفاوت همانند جرم و بار آن‌ها که متفاوت هستند، متفاوت است. اسپین یک ذره می‌تواند صفر، یک عدد صحیح و یا یک عدد نیم‌صحیح بزرگتر از صفر باشد، مثلاً اسپین الکترون $\frac{1}{2}$، فوتون ۱ و گراویتون ۲ است. ذراتی که اسپین نیم‌صحیح دارند را فرمیون می‌گوییم، که این نام به افتخار فیزیکدان ایتالیایی، انریکو فرمی [۳] انتخاب شده است و به ذراتی که اسپین صحیح دارند بوزون می‌گوییم که این نام نیز از نام فیزیکدان هندی، ساتیندرا نات بوز [۴] گرفته شده است. هر ذره‌ی بنیادی در مکانیک کوانتومی یا فرمیون است یا بوزون. در این پایان‌نامه از فرمیون‌ها و بوزون‌ها استفاده می‌کنیم تا نمایشی برای دسته‌ای از ابرجبرهای لی $B(0,N)$—مدرج به دست آوریم.

ابرجبرهای لی در فیزیک نظری از این جهت حایز اهمیت هستند که ابرتقارنها را می‌توانیم با آنها توصیف کنیم. ابرتقارن، تقارنی است که یک ذره‌ی بنیادی با یک اسپین خاص را به یک ذره‌ی بنیادی دیگری مرتبط می‌کند که تفاوت اسپین آنها با هم $\frac{1}{2}$ است، به بیان دیگر برای هر بوزون، یک فرمیون متناظر وجود دارد و بالعکس. در بیشتر نظریات فیزیکی، عناصر زوج یک ابرجبرلی متناظر با بوزون‌ها و

---

[۱] G. Uhlenbeck

[۲] S. Goudsmit

[۳] E. Fermi

[۴] S. N. Bose

عناصر فرد آن متناظر با فرمیون‌ها هستند.

در سال ۱۹۸۰ و ۱۹۸۱ فرنکل [۵][۱۰، ۹] و کز [۶] و پترسون [۷][۱۸] نمایش‌های بوزونی و فرمیونی را برای جبرهای لی کز–مودی آفین مورد مطالعه قرار دادند، همچنین در سال ۱۹۸۵ فاین‌گلد [۸] و فرنکل [۸] نمایش‌هایی برای همه جبرهای لی آفین کلاسیک با استفاده از جبرهای وایل و کلیفورد با تعداد نامتناهی مولد به‌دست آوردند. آنها همچنین تحققی برای دسته‌ای از ابرجبرهای لی آفین شامل جبرهای آفین $B(0,N)$–مدرج که N یک عدد صحیح مثبت می‌باشد، ارایه کردند. همچنین گائو [۹][۱۱]، تعدادی نمایش فرمیونی و بوزونی برای جبرهای لی آفین تعمیم یافته $\widehat{gl_N(\mathbb{C}_q)}$ که در آن $\mathbb{C}_q$ یک چنبره‌ی کوانتومی با دو متغیر است به دست آورد، سپس چن [۱۰] و گائو [۶] با در نظر گرفتن توسیع‌های فرمیونی از یک مدول فرمیونی، مدولهایی برای بعضی از جبرهای لی BC_N–مدرج به دست آوردند.

این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ فصل می‌باشد، در فصل اول مطالبی راجع به چنبره‌های کوانتومی و جبر کلیفورد مطرح می‌کنیم. در فصل دوم با ابرجبرهای لی آشنا می‌شویم و ابرجبرهای لی کلاسیک را دسته‌بندی می‌کنیم و سپس مطالبی را پیرامون ابرجبرهای لی $B(M,N)$–مدرج، که M یک عدد صحیح نامنفی و N یک عدد صحیح مثبت می‌باشد، بیان می‌کنیم . ابرجبرهای لی $B(M,N)$–مدرج اولین بار در سال ۲۰۰۳ توسط بنکارت [۱۱] و الدوک [۱۲][۳] مورد بررسی قرار گرفتند و با تقریب توسیع مرکزی دسته‌بندی شدند. در فصل سوم، دسته‌ای از ابرجبرهای لی $B(0,N)$–مدرج که توسط چنبره‌های کوانتومی مختصاتی شده‌اند را معرفی می‌کنیم و در فصل چهارم، نمایشی برای توسیع مرکزی این ابرجبرهای لی به‌دست می‌آوریم.

I. B. Frenkel[۵]
V. G. Kac[۶]
D. H. Peterson[۷]
A. J. Feingold[۸]
Y. Gao[۹]
H. Chen[۱۰]
G. Benkart[۱۱]
A. Elduque[۱۲]

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این پایان‌نامه، قرارداد می‌کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان، e_{ij} ماتریسی که درایه‌ی سطر iام و ستون jام آن ۱ و بقیه‌ی درایه‌های آن صفر، δ_{ij} دلتای کرونکر و I_m ماتریس همانی باشد.
در این فصل، ابتدا مطالبی را پیرامون جبرهای لی بیان می‌کنیم، سپس با چنبره‌های کوانتومی و جبر کلیفورد آشنا می‌شویم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱ . به یک فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ همراه با نگاشت $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ که برای هر $x, y, z \in A$ و $c \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق می‌کند یک جبر می‌گوییم:

$$x.(y+z) = x.y + x.z, \qquad (x+y).z = x.z + y.z, \qquad c(x.y) = (cx).y = x.(cy).$$

به نگاشت فوق، ضرب A می‌گوییم و بعضی مواقع جبر A را با $(A, .)$ و برای سادگی $x.y$ را با xy نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ . اگر برای هر سه عضو دلخواه x, y, z از جبر A، داشته باشیم $x(yz) = (xy)z$، به جبر A یک جبر شرکت‌پذیر می‌گوییم.

تعریف ۳.۱ . اگر جبر A شامل عضوی چون $1_A \in A = 1$ باشد، طوری که برای هر $x \in A$، $x = 1x = x1$، به جبر A، یک جبریکدار می‌گوییم. عضو 1_A را یکه‌ی A می‌نامیم.

تعریف ۴.۱ . اگر برای هر دو عضو دلخواه x, y از جبر A، داشته باشیم $xy = yx$، به جبر A، یک جبر جابجایی می‌گوییم.

مثال ۱.۱ . فضای برداری $End_{\mathbb{F}}\ V$ که مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی روی V می‌باشد، با عمل ترکیب توابع یک جبر شرکت‌پذیر و یکدار است که در حالت کلی جابجایی نیست.

تعریف ۵.۱ . به جبر $(L, [.,.])$ که برای هر $x, y, z \in L$ در شرایط زیر صدق می‌کند، یک جبرلی می‌گوییم:

$$[x, y] = -[y, x], \qquad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

عمل ضرب در یک جبرلی را یک براکت لی می‌نامیم.

تعریف ۶.۱ . اگر K یک زیرفضای برداری از جبرلی L و برای هر $x, y \in K$، $[x, y] \in K$، به K یک زیر جبرلی از L می‌گوییم.

تعریف ۷.۱ . اگر L_1 و L_2 دو جبرلی باشند، تبدیل خطی $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ را یک همریختی جبرهای لی می‌گوییم هرگاه:

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \qquad \forall x, y \in L_1.$$

تذکر ۲.۱ . روی جبر شرکت‌پذیر A براکت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a, b] = ab - ba, \qquad a, b \in A.$$

برای هر $a,b \in A$، $[a,b] = ab - ba = -(ba - ab) = -[b,a]$. همچنین با توجه به اینکه برای هر $a,b,c \in A$ داریم:

$$[a,bc] = abc - bca = abc - bac + bac - bca = [a,b]c + b[a,c].$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}[a,[b,c]] &= [a,bc-cb] = [a,bc] - [a,cb] \\ &= [a,b]c + b[a,c] - [a,c]b - c[a,b] \\ &= -[c,[a,b]] - [b,[c,a]].\end{aligned}$$

پس $(A,[.,.])$ یک جبرلی است.

مثال ۳.۱ . جبر شرکت‌پذیر $End_{\mathbb{F}}\, V$ با براکتی که در تذکر قبل تعریف کردیم یک جبرلی می‌شود. این جبرلی را با $gl(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱ . اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ یک نگاشت دوخطی باشد، به f یک فرم می‌گوییم. اگر برای هر $v,w \in V$، $f(v,w) = f(w,v)$، فرم f را متقارن و اگر $f(v,w) = -f(w,v)$، فرم را پاد–متقارن گوییم.

تعریف ۹.۱ . فرض کنیم f یک فرم روی فضای برداری V باشد، رادیکال فرم f را به‌صورت $rad\ f := \{x \in V \mid f(x,y) = 0,\ \forall y \in V\}$ تعریف می‌کنیم. اگر $rad\ f = 0$، فرم f را ناتباهیده گوییم.

مثال ۴.۱ . فرض کنیم V یک فضای برداری و f یک فرم ناتباهیده روی V باشد، تعریف می‌کنیم:

$$L_f := \{a \in gl(V) \mid f(av,w) = -f(v,aw),\ \forall v,w \in V\}. \tag{۱.۱}$$

برای هر $a, b \in L_f$ داریم:

$$\begin{aligned} f([a,b]v,w] &= f((ab-ba)v,w) = f(abv,w) - f(bav,w) \\ &= -f(bv,aw) + f(av,bw) = f(v,baw) - f(v,abw) \\ &= -f(v,[a,b]w), \qquad \forall v,w \in V. \end{aligned}$$

بنابراین L_f یک زیر جبرلی از $gl(V)$ است. اگر بعد V، n و f یک فرم متقارن باشد، به L_f جبرلی سیمپلکتیک[۱] (هم‌تافته) می‌گوییم و آن را با $sp_{2n}(\mathbb{F})$ نشان می‌دهیم و اگر V یک فضای برداری با بعد $2n+1$ و f یک فرم متقارن روی V باشد، به L_f جبرلی متعامد می‌گوییم و آن را با $o_{2n+1}(\mathbb{F})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۰ . مرکز یک جبر A و یک جبرلی L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(A) := \{x \in A \mid xy = yx, \ \ \forall y \in A\},$$

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x,y] = 0, \ \ \forall y \in L\}.$$

۲.۱ چنبره‌های کوانتومی

مطالب این بخش از مرجع [۴]، بیان شده است.

فرض کنیم $\mathrm{q} = (q_{ij})$، ماتریسی $\nu \times \nu$ از اعداد مختلط ناصفر باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$q_{ii} = 1, \qquad q_{ij}^{-1} = q_{ji}, \qquad 1 \le i,j \le \nu. \tag{۲.۱}$$

و J_{q} ایده‌آلی از حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران ناجابجایی $S_{[\nu]} = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_\nu^{\pm 1}]$، تولید شده توسط عناصر $x_ix_j - q_{ij}x_jx_i$، $1 \le i,j \le \nu$ باشد. $\mathbb{C}_{\mathrm{q}} := \mathbb{C}_{\mathrm{q}}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_\nu^{\pm 1}]$ را حلقه‌ی خارج قسمتی $S_{[\nu]}/J_{\mathrm{q}}$

---

[۱] symplectic

تعریف می‌کنیم و آن را چنبره‌ی کوانتومی وابسته به q می‌نامیم. اگر $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_v) \in \mathbb{Z}^\nu$، قرار می‌دهیم $x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \ldots x_\nu^{a_\nu} \in \mathbb{C}_{\mathbf{q}}$. دقت می‌کنیم که $\mathbb{C}_{\mathbf{q}}$ یک جبر شرکت‌پذیر و یکدار است که لزوماً جابه‌جایی نیست.

نگاشت‌های $\sigma, f : \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu \longrightarrow \mathbb{C}^*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، ($\mathbb{C}^*$ مجموعه‌ی اعداد مختلط ناصفر می‌باشد):

$$\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b_i}, \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sigma(\mathbf{b}, \mathbf{a})^{-1}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^\nu. \qquad (3.1)$$

لم ۵.۱ . برای هر $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_\nu), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ روابط زیر برقرارند:

الف) $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ji}^{a_j b_i}$،

ب) $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{b}, \mathbf{a})^{-1}$،

ج) $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}, -\mathbf{a}) = 1$،

د) $\sigma(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sigma(\mathbf{a}', \mathbf{b})$ و $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}') = \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$.

اثبات. الف) برای هر $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_\nu), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sigma(\mathbf{b}, \mathbf{a})^{-1} &= \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b_i} \Big) \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} q_{ji}^{b_j a_i} \Big)^{-1} \\ &= \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b_i} \Big) \Big(\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant \nu} q_{ij}^{a_j b_i} \Big)^{-1} \\ &= \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b_i} \Big) \Big(\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant \nu} q_{ij}^{a_j b_i} \Big)^{-1} \\ &= \prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ji}^{a_j b_i}. \end{aligned}$$

ب) همچنین برای هر $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_\nu), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ji}^{a_j b_i} = \prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ij}^{b_j a_i}$$

$$= (\prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ji}^{b_j a_i})^{-1} = f(\mathbf{b},\mathbf{a})^{-1}.$$

ج) با توجه به قسمت قبل برای هر $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\nu$، $f(\mathbf{a},\mathbf{a}) = f(\mathbf{a},\mathbf{a})^{-1}$، پس $f(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 1$. همچنین:

$$f(\mathbf{a},-\mathbf{a}) = \prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ji}^{a_j(-a)_i} = \prod_{i,j=1}^{\nu} q_{ji}^{-a_j a_i} = f(-\mathbf{a},\mathbf{a}).$$

و از طرفی $f(\mathbf{a},-\mathbf{a}) = f(-\mathbf{a},\mathbf{a})^{-1}$، پس $f(-\mathbf{a},\mathbf{a}) = 1$.

د) برای هر $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_\nu), \mathbf{a}' = (a'_1,\ldots,a'_\nu), \mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{a}+\mathbf{a}',\mathbf{b}) &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} q_{ji}^{(\mathbf{a}+\mathbf{a}')_j b_i} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b_i} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} q_{ji}^{a'_j b_i} \\ &= \sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a}',\mathbf{b}).\end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{b}') &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} q_{ji}^{a_j (\mathbf{b}+\mathbf{b}')_i} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b_i} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \nu} q_{ji}^{a_j b'_i} \\ &= \sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b}').\end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. ■

لم ٦.١ . برای هر $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_\nu), \mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ داریم:

الف) $x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}} = \sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})\ x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$،

ب) $x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}(x^{\mathbf{a}})^{-1}(x^{\mathbf{b}})^{-1} = f(\mathbf{a},\mathbf{b})$،

ج) $[x^{\mathbf{a}},x^{\mathbf{b}}] := x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}} - x^{\mathbf{b}}x^{\mathbf{a}} = \sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})(f(\mathbf{a},\mathbf{b}) - 1)\ x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$.

اثبات. الف) با توجه به اینکه برای $1 \leqslant i,j \leqslant \nu$، $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$، پس $x_i^{a_i} x_j^{b_j} = q_{ij}^{a_i b_j} x_j^{b_j} x_i^{a_i}$ و بنابراین داریم:

$$x_i^{a_i} \ldots x_v^{a_v} x_i^{b_i} = \prod_{k=i+1}^{\nu} q_{ki}^{a_k b_i} x_i^{a_i+b_i} x_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots x_v^{a_v}.$$

لذا برای هر $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_\nu), \mathbf{b}=(b_1,\dots,b_\nu)\in\mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}=x_1^{a_1}\dots x_\nu^{a_\nu}x_1^{b_1}\dots x_\nu^{b_\nu}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant\nu}q_{ji}^{a_jb_i}(x_1^{a_1+b_1}\dots x_\nu^{a_\nu+b_\nu})$$
$$=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

ب) با توجه به قسمت قبل، برای هر $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_\nu), \mathbf{b}=(b_1,\dots,b_\nu)\in\mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}(x^{\mathbf{a}})^{-1}(x^{\mathbf{b}})^{-1}=x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}(x^{\mathbf{b}}x^{\mathbf{a}})^{-1}=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})x^{\mathbf{b}+\mathbf{a}})^{-1}$$
$$=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})^{-1}x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}})^{-1}$$
$$=f(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

ج) طبق قسمت (الف) همین لم، برای هر $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_\nu), \mathbf{b}=(b_1,\dots,b_\nu)\in\mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$[x^{\mathbf{a}},x^{\mathbf{b}}]=x^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}-x^{\mathbf{b}}x^{\mathbf{a}}=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}-\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$
$$=(\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})-\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a}))x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}=(\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})f(\mathbf{a},\mathbf{b})-\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a}))x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$
$$=\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})(f(\mathbf{a},\mathbf{b})-1)x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

بنابراین روابط بیان شده برقرارند و اثبات لم کامل می‌شود. ■

لم ۷.۱ . f را نگاشت تعریف شده در رابطه‌ی (۳.۱) درنظر می‌گیریم. رادیکال f که به صورت زیر تعریف می‌شود، زیرگروهی از $\mathbb{Z}^\nu$ است.

$$rad(f)=\{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu\mid f(\mathbf{a},\mathbf{b})=1\ ,\forall\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu\}.$$

اثبات. فرض کنیم $\mathbf{a},\mathbf{b}\in rad(f)$ باشند، در این‌صورت برای هر $\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^\nu$، $f(\mathbf{a},\mathbf{c})=f(\mathbf{b},\mathbf{c})=1$، پس $f(-\mathbf{b},\mathbf{c})=(f(\mathbf{b},\mathbf{c}))^{-1}=1$ و بنابراین $-\mathbf{b}\in rad(f)$، همچنین با توجه به قسمت (د) لم ۵.۱ داریم:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=\sigma(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})\sigma(\mathbf{c},\mathbf{a}+\mathbf{b})^{-1}=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{c})\sigma(\mathbf{b},\mathbf{c})\sigma(\mathbf{c},\mathbf{a})^{-1}\sigma(\mathbf{c},\mathbf{b})^{-1}$$

$$= (\sigma(\mathbf{a},\mathbf{c})\sigma(\mathbf{c},\mathbf{a})^{-۱})(\sigma(\mathbf{b},\mathbf{c})\sigma(\mathbf{c},\mathbf{b})^{-۱}) = f(\mathbf{a},\mathbf{c})f(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

$$= ۱ \times ۱ = ۱.$$

پس $\mathrm{a} + \mathrm{b} \in rad(f)$ و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. ■

گزاره ۸.۱ . اگر $\mathbb{C}_q$ یک چنبره‌ی کوانتومی باشد، در این‌صورت:

الف) مجموعه‌ی $\{x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in rad(f)\}$، یک پایه برای $Z(\mathbb{C}_{\mathbf{q}})$ می‌باشد.

ب) مجموعه‌ی $\{x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \notin rad(f)\}$، یک پایه برای $[\mathbb{C}_{\mathbf{q}}, \mathbb{C}_{\mathbf{q}}]$ می‌باشد.

اثبات. الف) فرض کنیم $\circ \neq z \in Z(\mathbb{C}_{\mathbf{q}})$، پس z را به‌صورت $z = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}$ می‌نویسیم، در این‌صورت با توجه به قسمت (ج) لم ۶.۱، برای هر $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$\circ = [z, x^{\mathbf{b}}] = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}}[x^{\mathbf{a}}, x^{\mathbf{b}}] = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}}\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})(f(\mathbf{a},\mathbf{b}) - ۱)x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$

با توجه به‌اینکه مجموعه‌ی $\{x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\nu\}$ مستقل خطی است، پس برای هر $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^\nu$، $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = ۱$ و بنابراین $\mathbf{a} \in rad(f)$.

ب) فرض کنیم $\circ \neq z \in [\mathbb{C}_{\mathbf{q}}, \mathbb{C}_{\mathbf{q}}] \subseteq \mathbb{C}_{\mathbf{q}}$، پس z را به‌صورت $z = \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{c}} x^{\mathbf{c}}$ می‌نویسیم، از طرفی $\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}$ و $\sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{b}} x^{\mathbf{b}}$ وجود دارد به طوری که:

$$\begin{aligned}\circ \neq \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{c}} x^{\mathbf{c}} &= [\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}, \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{b}} x^{\mathbf{b}}] \\ &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}} r_{\mathbf{b}} [x^{\mathbf{a}}, x^{\mathbf{b}}] \\ &= \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}} r_{\mathbf{b}} \sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})(f(\mathbf{a},\mathbf{b}) - ۱)x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.\end{aligned}$$

بنابراین $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq ۱$، پس $\mathbf{a},\mathbf{b} \notin rad(f)$. از طرفی برای هر $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\nu$ داریم:

$$[z, x^{\mathbf{a}}] = \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{c}}[x^{\mathbf{c}}, x^{\mathbf{a}}] \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}} r_{\mathbf{c}} \sigma(\mathbf{a},\mathbf{c})(f(\mathbf{c},\mathbf{a}) - ۱)x^{\mathbf{c}+\mathbf{a}}.$$

همچنین:

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}}r_{\mathbf{b}}\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})(f(\mathbf{a},\mathbf{b})-1)[x^{\mathbf{a}+\mathbf{b}},x^{\mathbf{a}}]=$$

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^\nu} r_{\mathbf{a}}r_{\mathbf{b}}\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})(f(\mathbf{a},\mathbf{b})-1)\sigma(\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b})(f(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a})-1)x^{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

از طرفی با توجه به اینکه:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a})=\sigma(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a})\sigma(\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b})^{-1}$$

$$=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})\sigma(\mathbf{a},\mathbf{a})^{-1}\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})^{-1}=\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})^{-1}$$

$$=f(\mathbf{a},\mathbf{b})\neq 1.$$

بنابراین برای $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\nu$، $f(\mathbf{c},\mathbf{a})\neq 1$، پس $\mathbf{c}\notin rad(f)$. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. ■

لم ۹.۱ . فرض کنیم $\nu=2$ و q یک عدد مختلط ناصفر باشد، قرار می‌دهیم $\Lambda(q):=\{n\in\mathbb{Z}\mid q^n=1\}$، σ و f را نگاشتهای تعریف شده در رابطه‌ی (۳.۱) در نظر می‌گیریم، در این صورت:

$$rad(f)=\{(m,n)\mid m,n\in\Lambda(q)\}.$$

اثبات. فرض کنیم $\mathbf{a}=(m,n)\in rad(f)$، پس برای هر $\mathbf{b}=(r,s)\in\mathbb{Z}^2$، $f(\mathbf{a},\mathbf{b})=1$، پس:

$$1=f(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sigma(\mathbf{a},\mathbf{b})\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})^{-1}=q^{nr}q^{-ms}.$$

بنابراین برای هر $(r,s)\in\mathbb{Z}^2$ داریم:

$$q^{nr}=q^{ms}\Rightarrow q^m=q^n=1\Rightarrow m,n\in\Lambda(q)\Rightarrow rad(f)=\{(m,n)\mid m,n\in\Lambda(q)\}.$$

■