دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

حل عددی معادلات دیفرانسیل به روش های تجزیه آدومیان و آدومیان اصلاح یافته

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا مراثی

استاد مشاور

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

معصومه نیکبخت دین آباد

۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

یگانه خالق هستی

و تقدیم به:

همسرم که با تمام وجود، مرا در تحقق
اهدافم یاری می‌نماید.

تقدیر و تشکر

شایسته است تشکرات قلبی خود را تقدیم اساتید محترم، جناب آقای دکتر رحیمی و همینطور آقای دکتر رنجبری نمایم که در طول دوران تحصیلاتم هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر مراثی که با راهنمایی‌های سودمندشان مرا در تهیه و تدوین این پایان نامه، یاری کرده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر خیری که زحمت مشاوره این پایان نامه را قبول نموده‌اند، سپاسگزاری کنم.

معصومه نیکبخت دین آباد

پاییز ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: نیکبخت دین آباد نام: معصومه

عنوان: حل عددی معادلات دیفرانسیل به روش های تجزیه آدومیان و آدومیان اصلاح یافته

استاد راهنما : دکتر حمیدرضا مراثی

استاد مشاور: دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۱۰۱

کلید واژه‌ها: روش تجزیه آدومیان ، روش تجزیه آدومیان اصلاح یافته، مسائل مقدار ویژه

چکیده

در این پایان‌نامه، روش‌های تجزیه آدومیان و آدومیان اصلاح یافته را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌بریم. هر دو روش دقت قابل ملاحظه‌ای را برای تقریب جواب‌های دقیق فراهم می‌کنند. نتایج نشان می‌دهد که روش تجزیه آدومیان اصلاح یافته، جواب‌های به دست آمده از روش تجزیه آدومیان را بهبود می‌بخشد.

فهرست مطالب

مقدمه

پدیده‌های خطی که در حوزه‌های بسیاری از رشته‌های علمی پدیدار می‌شوند، بوسیله معادلات دیفرانسیل می‌توانند شکل داده شوند. دسته وسیعی از روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی در حل این مسائل استفاده شده است.

در این پایان نامه چندین روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل، ارائه شده و سپس روش‌های پیشرفته جدید تحت عناوین روش تجزیه آدومیان و روش تجزیه آدومیان اصلاح یافته معرفی شده است.

در فصل اول پایان‌نامه به ارائه تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی پرداخته شده که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.

روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی در فصل دوم ارائه شده است.

در فصل سوم روش تجزیه آدومیان معرفی شده است که در سال ۱۹۸۰ توسط جورج آدومیان [1] ارائه شده است. این روش بر پایه یافتن جوابی بصورت سری می‌باشد که جملات آن به طور بازگشتی با استفاده از چندجمله‌ای‌های آدومیان محاسبه می‌شوند.

در فصل چهارم روش تجزیه آدومیان اصلاح یافته معرفی شده است که مانند روش تجزیه آدومیان بر پایه یافتن جوابی بصورت سری می‌باشد با این تفاوت که در تعریف چندجمله‌ای‌های آدومیان اصلاحاتی صورت گرفته است.

در فصل پنجم حل مسائل مقدار ویژه با روش تجزیه آدومیان مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل ششم نتیجه‌ای را که می‌توان در مورد دو روش مورد بحث گرفت، بیان شده است.

[1] George Adomian

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز است، می‌پردازیم.

۱.۱ معادله دیفرانسیل

معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که خود و مشتقات متوالی آن در معادله صدق می‌کنند.

تعریف ۱.۱ مرتبه بالاترین مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

۱.۱.۱ معادله دیفرانسیل معمولی

تعریف ۲.۱ معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود.

نکته: شکل کلی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام به صورت

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

و یا

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

می‌باشد.

تعریف ۳.۱ فرض می‌کنیم

$$f_j = f_j(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}), \quad j = 1, 2, ..., n$$

دسته ای از n تابع حقیقی $n+1$ متغیره باشد که در آن y تابعی از x و $a \leq x \leq b$ باشد. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y_1^{(n)}(x) = f_1(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \\ y_2^{(n)}(x) = f_2(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) = f_n(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \end{cases}$$

که در آن $a \leq x \leq b$، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه nام نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱ معادله دیفرانسیل به شکل

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x),$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n گویند.

تعریف ۵.۱ اگر در معادله دیفرانسیل خطی، $Q(x)$ متحد با صفر باشد، آن را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام همگن می‌نامند. در غیر این صورت، آن را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام غیر همگن می‌نامند.

۲.۱.۱ معادله دیفرانسیل جزئی

تعریف ۶.۱ اگر در معادله دیفرانسیل بیش از یک متغیر مستقل وجود داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل جزئی می‌نامند. به عنوان مثال یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با دو متغیر مستقل x و t به صورت

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})=0$$

نوشته می‌شود، که شامل متغیرهای مستقل x و t، تابع مجهول u وابسته به این متغیرها و مشتقات جزئی تابع u نسبت به متغیرهای مستقل x و t می‌باشد.

تعریف ۷.۱ یک عملگر، عاملی است که یک تابع را به یک تابع دیگر تبدیل می‌کند. برای مثال عملگر مشتق، عملگری است که تابع مشتق‌پذیر u را به تابع u' تبدیل می‌کند. لازم به ذکر است که عملگر مشتق گیری را عملگر دیفرانسیل می‌نامند.

تعریف ۸.۱ یک عملگر دیفرانسیل جزئی، خطی نامیده می‌شود، اگر داشته باشیم:

$$\forall u_1,u_2 \quad L[c_1u_1+c_2u_2]=c_1L(u_1)+c_2L(u_2),$$

که c_1 و c_2 ثابت هستند.

قضیه ۹.۱ (قضیه تیلور): اگر تابع f در همسایگی نقطه x_0 مشتق مرتبه $(n+1)$ ام متناهی داشته باشد، در این صورت مقدار f در هر نقطه x متعلق به این همسایگی، به صورت

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2!}(x-x_0)^2f''(x_0)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}(x-x_0)^nf^{(n)}(x_0)+R_n(x), \end{aligned}$$

به دست می آید، که در آن

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),$$

و

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^kf}{dx^k}|_{x=x_0},$$

و ξ نقطه‌ای بین x_0 و x است.

برهان. رجوع کنید به [۱]. □

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید در قضیه تیلور همسایگی نقطه x_0 با $I = (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ نشان داده شود و به ازای هر $x \in I$،

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} R_n(x) = 0$$

در این صورت

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}h^nf^{(n)}(x_0) + \cdots$$

که سری توانی سمت راست، سری تیلور f در x_0 نامیده می‌شود.

نکته: سری تیلور در نقطه $x_0 = 0$، سری مک لورن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱ یک دنباله، تابعی است که دامنه‌اش مجموعه اعداد طبیعی باشد. آن را با $\{x_n\}$ نشان می‌دهند، که x_n ضابطه تابع یا جمله عمومی دنباله نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱۲ یک سری نامتناهی (یا یک سری) مجموعی به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + ...$$

است که از جمع کردن جملات دنباله $\{x_n\}$ ساخته شده است .

تعریف ۱.۱۳ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$، که در آن $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد و z متغیری مستقل می‌باشد، یک سری توانی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱۴ فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع $||.|| : X \longrightarrow R$ را یک نرم روی X گویند، هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\lambda \in R$ داشته باشیم

۱) $||x|| \geq 0$ و $||x|| = 0 \iff x = 0$،

۲) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$،

۳) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

نرم‌های اقلیدسی، بی نهایت و یک به ترتیب با نمادهای l_2، l_∞ و l_1 نشان داده می‌شوند و برای بردار $x = (x_1, \cdots, x_n)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱) $\| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$،

۲) $\| x \|_\infty = Max|x_i|, \quad 1 \leq i \leq n$،

۳) $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

نکته: فضای خطی X را به همراه نرم تعریف شده روی آن، فضای نرم‌دار می‌گویند.

تعریف ۱.۱۵ دنباله $\{x_n\}$ از عناصر فضای نرم‌دار X در X همگرا است، هرگاه $\alpha \in X$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$\lim_{X \longrightarrow \infty} \| x_n - \alpha \| = 0,$$

به عبارت دیگر

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad (\, n \geq N \quad \longrightarrow \quad \| \, x_n - \alpha \, \| < \epsilon \,).$$

فصل ۲

حل عددی معادلات دیفرانسیل

۱.۲ مقدمه

در حل معادلات دیفرانسیل، روش‌های عددی، بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد. به این دلیل که در برخی موارد، جواب تحلیلی برای مسأله وجود ندارد یا حتی در صورت وجود جواب تحلیلی، این جواب می‌تواند چنان پیچیده باشد که استفاده از آن، عملاً غیر ممکن است. زیرا جواب به صورت یک سری نامتناهی از توابع می‌باشد.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل معمولی

در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی را به طور جداگانه مورد بحث قرار داده و چندین روش عددی برای حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۲ مسائل مقدار اولیه

در این بخش، به مطالعه روش‌های عددی حل مسائلی از نوع

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b \tag{۱.۲}$$

با شرط اولیه

$$y(a) = y_0$$

می‌پردازیم. چنین مسائلی را مسائل مقدار اولیه IVP [1] می‌گوییم.
چندین روش خوب برای حل عددی مسأله مقدار اولیه (۱.۲) وجود دارد. روش‌هایی که بررسی خواهیم کرد، در واقع، پایه‌ای برای روش‌های دیگر بوده و به سادگی می‌توان آن‌ها را به حل دستگاه معادلات مرتبه اول تعمیم داد.

۱− روش اویلر

ساده‌ترین روش عددی حل مسأله مقدار اولیه (۱.۲)، روش اویلر است.
جواب مسأله مقدار اولیه

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = y_0 \tag{۲.۲}$$

Intial Value Problem[1]

را بر بازه $[a,b]$ به دست می‌آوریم. در روش اویلر، بازه $[a,b]$ را به N زیر بازه با طول $h=\frac{b-a}{N}$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت، نقاط شبکه t_i عبارتند از

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, ..., N$$

h را، اندازه گام یا طول گام می‌نامند. یک روش عددی برای حل مسأله مقدار اولیه (۱.۲)، با شروع از شرط اولیه y_0، تقریب‌های y_1، y_2، ...، y_N را برای مقدار دقیق $y(t)$ در نقاط شبکه t_1، t_2، ...، t_N می‌سازد.

برای به دست آوردن روش اویلر، از بسط تیلور y حول نقاط t_i، $i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ استفاده می‌کنیم. اگر y بر بازه $[a,b]$ دو بار پیوسته و مشتق پذیر باشد. داریم

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \qquad (۳.۲)$$

که درآن ξ عددی بین t_i و $t_i + h$ است. با صرف نظر کردن از جمله آخر در رابطه (۳.۲) که جمله خطا است و با استفاده از رابطه (۲.۲)، داریم

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$$

اگر $y_i \approx y(t_i)$ آنگاه، روش اویلر به صورت

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \cdots, N$$

به دست می‌آید.

مثال ۱.۲ مسأله مقدار اولیه

$$y' = 2t - y, \quad y(0) = -1$$

را با $N = 10$ برای بدست آوردن مقدار y در $t = 1$ حل می‌کنیم.
با $h = \frac{1}{10}$ و $f(t, y) = 2t - y$ داریم

$$\begin{aligned} y(0.1) \approx y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= -1 + (0.1)[2(0) - (-1)] \\ &= -0.9 \end{aligned}$$

برای تقریب $y(0.2)$، روند را با نقطه $(0.1, -0.9)$ تکرار می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} y(0.2) \approx y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) \\ &= -0.9 + (0.1)[2(0.1) - (-0.9)] \\ &= -0.79 \end{aligned}$$

با ادامه این روند، تقریب‌های دیگر y به دست می آیند.

۲– روش‌های سری تیلور مرتبه بالاتر

روش اویلر با استفاده از دو جمله اول بسط تیلور به دست می‌آید. واضح است که می‌توانیم یک جواب تقریبی برای (۲.۲) با استفاده از جملات بیشتر سری تیلور به دست آوریم. برای این منظور، اکنون از چهار جمله اول سری تیلور استفاده می‌کنیم.
فرض کنیم جواب $y(t)$ مسأله (۲.۲) چهار مشتق پیوسته داشته باشد. با بسط $y(t_{i+1})$ حول نقطه $t = t_i$ داریم

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(t_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_i), \qquad (۴.۲)$$