بسم الله الرحمن الرحیم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب فریده محمدی حاجی خانلو دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۰۳۱۱۵ که در تاریخ ۹۲/۰۶/۰۹ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "بررسی خصوصیات توپولوژیکی عملگرهای ضعیف فشرده" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: فریده محمدی حاجی خانلو

امضا

تاریخ

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

بررسی خصوصیات توپولوژیکی عملگرهای ضعیف فشرده

استاد راهنما:

دکتر کاظم حق نژاد آذر

استاد مشاور:

دکتر نسرین اقبالی

پژوهشگر:

فریده محمدی حاجی خانلو

شهریور۱۳۹۲

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه آموزشی ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:
بررسی خصوصیات توپولوژیکی عملگرهای ضعیف فشرده

پژوهشگر:

فرید‌ه محمدی حاجی خانلو

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته‌ی داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ....خوب........

امضاء	سمت	مرتبه‌ی علمی	نام و نام خانوادگی
	استاد راهنما و رییس کمیته‌ی داوران	استادیار	کاظم حق نژاد آذر
	استاد مشاور	استادیار	نسرین اقبالی
	داور	استادیار	محمدباقر مقیمی

شهریور – ۱۳۹۲

تقدیم به ساحت مقدس امام عصر (عج) و

پدر و مادر عزیزم و

برادر مهربانم، مصطفی

سپاس گزاری...

شکر و سپاس خدای را که به انسان نعمت تفکر و قدرت اندیشه عطا کرد تا بر اساس آن از فقر تا رفاه و از جهل تا کمال دانش و معنویت گام بردارد.

در آغاز بر خود می‌دانم که از پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگیم از هیچ گونه تلاشی برای موفقیت اینجانب دریغ نکرده و همواره مشوق من در ادامه تحصیل و چراغ هدایتی برایم بودند، صمیمانه تشکر کنم و بر دست پر مهرشان به نشانه‌ی سپاس، بوسه می‌زنم.

از استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکترکاظم حق نژاد آذر که از الطاف و رهنمودهای صبورانه، دلسوزانه و بی‌دریغشان در به پایان رساندن این پژوهش بهره گردیدم صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. از استاد مشاور ارجمندم، سرکار خانم دکتر نسرین اقبالی که مشاوره این پژوهش را بر عهده داشتند کمال سپاس و تشکر را دارم.

در نهایت از همه‌ی برادرانم و خواهران مهربانم که در تمام مراحل زندگیم هر کدام به نوعی کمکم کرده‌اند، نهایت سپاس‌گذاری و قدردانی را دارم و برای آنها آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون می‌کنم.

فریده محمدی حاجی خانلو

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی: محمدی حاجی خانلو نام: فریده

عنوان پایان‌نامه:
بررسی خصوصیات توپولوژیکی عملگرهای ضعیف فشرده

استاد راهنما: دکتر کاظم حق نژاد آذر
استاد مشاور: دکتر نسرین اقبالی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۰۶/۰۹ تعداد صفحات: ۷۰

چکیده

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و T یک عملگر خطی پیوسته از X به Y باشد. اگر Y دارای توپولوژی راست باشد که توسط نرم آن القا شده می‌خواهیم نشان دهیم که یک توپولوژی موضعا محدب برای X موجود است که عملگر T، نسبت به آن ضعیف فشرده است. در نهایت تحت شرایط جدید می‌خواهیم بدانیم که اگر $\sum x_n$ یک سری همگرای ضعیف در X باشد آیا سری $\sum Tx_n$ همگرای ضعیف در Y است.

کلیدواژه‌ها: توپولوژی راست، سری همگرای ضعیف، عملگر پیوسته، عملگرهای ضعیف فشرده

فهرست مطالب

مقدمه

عملگرهای فشرده اولین بار توسط هیلبرت [۱] (۱۹۰۶) مطرح گردید و بعد از آن ریس [۲] (۱۹۱۸) خواص عملگرهای فشرده را بررسی کرد. از آنجا که عملگرهای فشرده دارای خواص بسیار جالبی هستند، این سوال به وجود آمد که آیا این خاصیت‌ها در فضاهای توپولوژیک ضعیف هم برقرار است. بنابراین کاکوتانی [۳] (۱۹۳۸) و یوسیدا [۴] (۱۹۳۸) عملگرهای ضعیف فشرده را تعریف کرده و به مطالعه‌ی خواص این عملگرها پرداختند.

مبدا پیدایش JB^*- سه‌گانه در ارتباط با مطالعه‌ی دامنه‌ی متقارن کراندار فضاهای باناخ با بعدهای متناهی و نامتناهی می‌باشد.

با فرض اینکه $C(\Omega)$ یک JB^*- سه‌گانه از تابعک‌های پیوسته مختلط روی فضای هاسدورف فشرده Ω باشد گروتندیک [۵] (۱۹۵۳) نشان داده است که زیر مجموعه‌ی K در $C(\Omega)^*$ به طور نسبی $\sigma(C(\Omega)^*, C(\Omega))$- فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی (O_n) از مجموعه‌های باز جدا از هم در Ω حد زیر موجود باشد یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\mu(O_n) : \mu \in K\} = ۰.$$

پلزینسکی [۶] (۱۹۶۲) هم معادلی را برای بیان گروتندیک به صورت زیر ثابت کرده است

مجموعه‌ی $K \subset C(\Omega)^*$ به طور نسبی فشرده ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر سری کوشی غیر شرطی ضعیف

[۱] Hilbert
[۲] Riesz
[۳] Kakutani
[۴] Yosida
[۵] Grothendiek
[۶] Pelczynski

$\sum f_n$ در $C(\Omega)$ حد زیر موجود باشد یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\mu(f_n) : \mu \in K\} = ۰.$$

پلزینسکی(۱۹۶۲) خاصیتی به نام خاصیت (V) را به صورت زیر بیان کرد

فضای باناخ Z خاصیت (V) را دارد هرگاه به ازای هر سری کوشی غیر شرطی ضعیف $\sum z_n$ در Z،

$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\varphi(Z_n)| : \varphi \in K\} = ۰$، آنگاه $K \subset Z^*$ به طور نسبی ضعیف فشرده باشد.

پفیتزنر [۱] (۱۹۹۴) این سوال را مطرح کرد که آیا JB^*- سه‌گانه خاصیت (V) را دارد. چو [۲] و ملون [۳] (۱۹۹۷) به این سوال پاسخ دادند و ثابت کردند هر JB^*- سه‌گانه خاصیت (V) را داراست.

محتوای این پایان‌نامه در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

در فصل اول به مفاهیم و تعاریف اولیه خواهیم پرداخت. در فصل دوم توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره را تعریف کرده و به طور مختصر برخی ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم و سپس عملگرهای فشرده و ضعیف فشرده را معرفی و خصوصیات آن‌ها را بررسی می‌کنیم، همچنین در این فصل قضیه‌ی گلدشتاین و قضیه‌ی گانت مچر که یکی از پرکاربردترین قضیه‌ها در این پایان‌نامه می‌باشد ارایه خواهیم داد. در این فصل توپولوژی‌های مکی و راست را تعریف کرده و به بررسی پیوستگی عملگرها نسبت به توپولوژی راست می‌پردازیم و تحت شرایطی، نتیجه خواهیم گرفت عملگر $T : X \to Y$ بین فضاهای باناخ، ضعیف فشرده است اگر وتنها اگر T از X با توپولوژی راست به توی Y با توپولوژی نرم پیوسته باشد. در فصل سوم عملگر شبه ضعیف فشرده و فضای باناخ راست دنباله‌ای را تعریف می‌کنیم همچنین در این فصل عملگر شبه پیوسته‌ی کامل را تعریف کرده و به بررسی برخی خصوصیات C^*- جبر می‌پردازیم. در این فصل خاصیت (V) پلزینسکی را بیان و ثابت خواهیم کرد هر فضای باناخ صادق در خاصیت (V)، راست دنباله‌ای است. همچنین در این فصل JB^*- سه‌گانه را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم هر JB^*- سه‌گانه خاصیت (V) پلزینسکی را دارد.

[۱] Pfitzner
[۲] Chu
[۳] Mellon

تدوین و نگارش این مجموعه عمدتا مبتنی بر مراجع (مگینسون [1]، ۱۹۹۸). و (رودین [2]، ۱۹۹۱). است. اصلی‌ترین مقاله در تهیه‌ی این پایان‌نامه مرجع (پرالتا و همکاران [3]، ۲۰۰۷). می‌باشد.

[1] Megginson
[2] Rudin
[3] Peralta et al

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند مرور می‌کنیم.

در سراسر این پایان‌نامه مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح مثبت با $\mathbb{N}$ و میدان اعداد حقیقی و مختلط به ترتیب با $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شوند. علامت $\mathbb{F}$ نشان دهنده‌ی میدانی است که می‌تواند $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. عناصر تشکیل دهنده‌ی $\mathbb{F}$ را اسکالر می‌نامند.

۱.۱ فضاهای برداری

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری [۱] روی میدان $\mathbb{F}$، مجموعه‌ای مانند X است که عناصرش را بردار می‌نامند و در آن دو عمل به نام‌های جمع از $X \times X$ به توی X و ضرب اسکالر از $X \times \mathbb{F}$ به توی X تعریف شده‌اند که دارای خواص جبری آشنای زیر هستند

۱. به ازای هر بردار $x, y, z \in X$ داریم

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{و} \quad x + y = y + x;$$

۲. X بردار منحصر بفردی مانند 0 (بردار صفر یا مبدا X) دارد به طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $x = 0 + x$؛

۳. به ازای هر $x \in X$، بردار منحصربفرد $-x$ در X وجود دارد به طوری که $x + (-x) = 0$؛

۴. برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و هر $x, y \in X$ داریم

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)x,\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x,\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

۵. برای هر $x \in X$، $1 \cdot x = x$.

یک فضای برداری حقیقی، فضایی است که در آن $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و یک فضای برداری مختلط، فضایی است که در آن $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

---
[1] Vector space

تعریف ۲.۱.۱. گردایه‌ی همه‌ی دنباله‌هایی که فقط تعداد متناهی از جملاتشان، غیر صفر باشد را فضای برداری دنباله‌های غیر صفر متناهی گویند.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی M همراه با رابطه‌ی ترتیبی $\preceq$ را یک مجموعه‌ی مرتب [۱] نامند هرگاه شرایط زیر به ازای هر $x, y, z \in M$ برقرار باشد

۱. به ازای هر $x \in M$، $x \preceq x$؛

۲. اگر $x \preceq y$ و $y \preceq x$، آنگاه $x = y$؛

۳. اگر $x \preceq y$ و $y \preceq z$، آنگاه $x \preceq z$.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه‌ی مرتب $(M, \preceq)$ را مشبکه [۲] نامند هرگاه هر دو عضو دلخواه $x, y \in M$ دارای کوچکترین کران بالا به صورت $x \vee y = \sup(x, y)$ و بزرگترین کران پایین به صورت $x \wedge y = \inf(x, y)$ در M باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید E فضای برداری حقیقی و مجموعه‌ای مرتب باشد. E را فضای برداری مرتب [۳] نامند، هرگاه رابطه‌ی ترتیبی $\preceq$ به ازای هر $x, y \in E$ در شرایط زیر صدق کند

۱. اگر $x \preceq y$، آنگاه رابطه‌ی $x + z \preceq y + z$ به ازای هر $z \in E$ برقرار باشد؛

۲. اگر $x \preceq y$، آنگاه رابطه‌ی $\alpha x \preceq \alpha y$ به ازای هر α حقیقی که $\alpha \geq 0$ برقرار باشد.

$x \in E$ را مثبت گویند هرگاه $0 \preceq x$. مجموعه‌ی تمام اعضای مثبت E را با E_+ نشان می‌دهند. در واقع

$$E_+ = \{x \in E \,|\, 0 \preceq x\}.$$

به علاوه اگر $(E, \preceq)$ یک مشبکه باشد، در این صورت E را فضای ریس [۴] یا مشبکه‌ی برداری می‌نامند.

[۱] Ordered set
[۲] Lattice
[۳] Ordered vector spece
[۴] Riesz

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ای ناتهی باشد. گردایه‌ی τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی [۱] بر X گویند اگر دارای سه خاصیت زیر باشد

۱. $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$؛

۲. اگر به ازای $i = ۱, \ldots, n$، $X_i \in \tau$، آنگاه $X_۱ \cap X_۲ \cap \ldots \cap X_n \in \tau$؛

۳. اگر $\{X_\alpha\}$ گردایه‌ای دلخواه (متناهی، شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر) از اعضای τ باشد، آنگاه $\cup_\alpha X_\alpha \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی در مجموعه‌ی X باشد، آنگاه زوج (X, τ) را فضای توپولوژیک و یا فقط فضای توپولوژیک X می‌نامند و اعضای τ را مجموعه‌های باز X می‌گویند.

متداولترین فضاهای توپولوژیک فضاهای متریک هستند. یادآوری می‌کنیم تابع $d : X \times X \to [۰, +\infty)$ یک متر بر X است، هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ خواص زیر برقرار باشد

۱. $d(x, y) \geq ۰$ و $d(x, y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$؛

۲. $d(x, y) = d(y, x)$؛

۳. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

اگر d یک متر بر X باشد، آنگاه زوج (X, d) را فضای متریک می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱. یک دنباله در فضای توپولوژیک (X, τ) تابعی مانند x از $\mathbb{N}$ به X است. برای راحتی کار، این دنباله را به صورت (x_n) نمایش می‌دهند. این دنباله به عنصری مانند $x \in X$ همگرا است هرگاه برای هر همسایگی U از x عددی مانند $m \in \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر $n \geq m$، $x_n \in U$.

تعریف ۸.۱.۱. دنباله‌ی (x_n) در فضای متریک (X, d)، کوشی گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی N وجود داشته باشد به طوری‌که اگر $m, n \geq N$ آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

[۱] Topology

تعریف ۹.۱.۱. فضای متریک (X,d) را کامل [۱] نامند هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X به عضوی از X همگرا باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیر مجموعه‌ی S از فضای متریک X، را کراندار کلی [۲] گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، زیر مجموعه‌ی متناهی F_ε از S (یا معادلا از X) موجود باشد به طوری‌که فاصله‌ی هر نقطه‌ی S با عضو F_ε، ε باشد، یعنی S بوسیله‌ی گردایه‌ی متناهی از گوی‌های باز در X به شعاع ε و به مرکز نقاط‌هایی از F_ε پوشش داده شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. اگر توپولوژی τ به وسیله‌ی متر d القا شده باشد، گوییم d و τ باهم سازگار هستند.

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای توپولوژیک (X,τ) را فضای هاسدرف [۳] نامند هرگاه به ازای $p,q \in X$ که $q \neq p$، همسایگی‌هایی مانند U از p و V از q موجود باشد به طوری که $U \cap V = \phi$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و Y زیر مجموعه‌ای از X باشد، در این صورت $\tau_Y = \{G \cap Y; G \in \tau\}$ یک توپولوژی روی Y است. به τ_Y توپولوژی نسبی [۴] یا توپولوژی القایی [۵] می‌گویند.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید f تابعی دلخواه از فضای توپولوژیک (X,τ_1) به توی فضای توپولوژیک (Y,τ_2) باشد. f را در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته گوییم هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز W شامل $f(x)$ مجموعه‌ی باز U شامل x در X موجود باشد که $f(U) \subseteq W$. اگر f در همه‌ی نقاط X پیوسته باشد، f را پیوسته گوییم. می توان ثابت کرد که تابع f پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، باز باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. گردایه‌ی $C \subset \tau$ یک پایه برای τ است اگر هر عضو τ (یعنی هر مجموعه‌ی باز) اجتماعی از اعضای C باشد. گردایه‌ی B از همسایگی‌های نقطه‌ی $x \in X$ یک پایه‌ی موضعی در x است، اگر هر همسایگی x شامل عضوی از B باشد. در فضاهای برداری، اصطلاح پایه‌ی موضعی همیشه به معنی یک پایه‌ی موضعی در صفر است.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم τ یک توپولوژی برفضای برداری X باشد، به طوری‌که

[۱] Complete
[۲] Totally bounded
[۳] Hausdorff space
[۴] Relative topology
[۵] Induced topology

۱. هر نقطه‌ی تک عضوی X یک مجموعه‌ی بسته باشد؛

۲. اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشد.

در این صورت گوییم τ یک توپولوژی برداری بر X است و X یک فضای برداری توپولوژیک [۱] می‌باشد.

پیوسته بودن جمع یعنی، نگاشت $(x, y) \to x + y$ از حاصل ضرب دکارتی $X \times X$ به توی X پیوسته باشد، به بیان دیگر اگر به ازای $x_1, x_2 \in X$، V یک همسایگی $x_1 + x_2$ باشد، آنگاه همسایگی‌هایی مانند V_1 از x_1 و V_2 از x_2 وجود داشته باشد به طوری که $V_1 + V_2 \subset V$.

به همین نحو، فرض پیوسته بودن ضرب اسکالر یعنی نگاشت $(\alpha, x) \to \alpha x$ از $\mathbb{F} \times X$ به توی X پیوسته است، یعنی هرگاه $x \in X$ و α اسکالر بوده، V یک همسایگی از αX باشد و همسایگی مانند W از X موجود باشد به طوری‌که هر وقت به ازای $r > 0$ ی $|\beta - \alpha| < r$، آنگاه $\beta W \subset V$.

تبصره ۱.۱.۱. با توجه به تعریف ۱۵.۱.۱، یک پایه‌ی موضعی فضای برداری توپولوژیک X، گردایه‌ای مانند B از همسایگی‌های صفر است به طوری که هر همسایگی صفر شامل عضوی از B می‌باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. X را موضعا فشرده نامند هرگاه یک همسایگی صفر با بست فشرده داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۱. اگر X فضای برداری توپولوژیک موضعا فشرده باشد آنگاه X با بعد متناهی است.

اثبات. برای اثبات رجوع شود به (رودین [۲]، ۱۹۹۱). □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد و $A \subset X$، کوچکترین زیرفضا از X که شامل A می‌باشد را غلاف خطی [۳] A می‌نامند، یعنی اشتراک همه‌ی زیرفضاهایی از X که شامل A می‌باشند. غلاف خطی A را با $\langle A \rangle$ نشان می‌دهند.

حال اگر X فضای برداری توپولوژیک باشد در این صورت کوچکترین زیرفضای بسته از X که شامل A می‌باشد را

[۱] Topological vector space
[۲] Rudin
[۳] Linear hull

غلاف خطی بسته [1] A می‌نامند، یعنی اشتراک همه‌ی زیرفضاهای بسته از X که شامل A می‌باشند. غلاف خطی بسته A را با $[A]$ نشان می‌دهند.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. در این صورت

۱. $[A] = \overline{\langle A \rangle}$؛

۲. اگر A یک زیرفضا از X باشد، آنگاه $\overline{A}$ نیز زیرفضایی از X است.

اثبات. برای اثبات رجوع شود به (مگینسون [2]، ۱۹۹۸). □

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد. X متر پذیر است اگر τ با متری مانند d سازگار باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱. زیر مجموعه‌ی E از یک فضای برداری توپولوژیک، کراندار است، اگر برای هر همسایگی U از ۰، $s > ۰$ ی وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $t > s$، $E \subseteq tU$.

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنید V یک همسایگی ۰ در فضای برداری توپولوژیک X باشد

۱. هرگاه $\ldots < r_۲ < r_۱ < ۰$ و وقتی $n \to \infty$، $r_n \to \infty$، آنگاه $X = \cup_{n=۱}^{\infty} r_n V$؛

۲. هر زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی K از X کراندار است؛

۳. هرگاه $\ldots > \delta_۲ > \delta_۱$ و وقتی $n \to \infty$، $\delta_n \to ۰$، و نیز V کراندار باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\{\delta_n V : n = ۱, ۲, \ldots\}$ یک پایه‌ی موضعی شمارش پذیر برای X می‌باشد.

اثبات. برای اثبات رجوع شود به (رودین، ۱۹۹۱). □

تعریف ۲۱.۱.۱. فضای برداری توپولوژیک X را جدایی پذیر [3] نامند هرگاه X یک زیر مجموعه‌ی چگال شمارا داشته باشد.

[1] Closed linear hull
[2] Megginson
[3] Separable

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری باشد و $۰ \leq t \leq ۱$، مجموعه‌ی $C \subset X$ را محدب گوییم اگر

$$tC + (۱ - t)C \subset C$$

به عبارت دیگر، اگر $x, y \in C$ و $۰ \leq t \leq ۱$ باشد آنگاه $tx + (۱ - t)y \in C$.

C مطلقا محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in C$ و اعداد $\lambda_۱, \lambda_۲$ که $|\lambda_۱| + |\lambda_۲| \leq ۱$ داشته باشیم $\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲ \in C$.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید τ یک توپولوژی باشد. اگر τ شامل یک پایه از مجموعه‌های محدب باشد در این صورت τ یک توپولوژی موضعا محدب است و فضای برداری توپولوژیک X، یک فضای موضعا محدب [۱] است.

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و Y زیرفضایی از X باشد. آنگاه توپولوژی نسبی Y که از X به ارث می‌برد یک توپولوژی برداری است. اگرتوپولوژی X، موضعا محدب باشد آنگاه توپولوژی نسبی Y نیز موضعا محدب است.

اثبات. برای اثبات رجوع شود به (مگینسون، ۱۹۹۸). □

نتیجه ۱.۱.۱. یک فضای برداری توپولوژیک، موضعا محدب است اگر و تنها اگر توپولوژی آن شامل یک پایه‌ی موضعی از مجموعه‌های محدب باشد.

اثبات. برای اثبات رجوع شود به (مگینسون، ۱۹۹۸). □

۲.۱ فضاهای نرم‌دار

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X فضای برداری و $p : X \to [۰, +\infty)$ یک تابع با خواص زیر باشد

۱. به ازای هر $x, y \in X$، $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$؛

۲. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

[۱] Locally convex space

در این صورت p را یک نیم‌نرم [1] می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. فضای برداری X یک فضای نرم‌دار [2] است هرگاه نگاشتی مانند $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ شرایط زیر برقرار باشند

۱. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

۳. $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

با تعریف $d(x,y) = \|x-y\|$، d در شرایط متر بودن صدق می‌کند و لذا هر فضای نرم‌دار یک فضای متریک است. d را متر تولید شده توسط نرم می‌نامیم.

مثال ۱.۲.۱. مجموعه‌ی تمام دنباله‌های کراندار با ℓ_∞ نشان داده می‌شود که همراه با اعمال زیر فضای برداری است

$$(\alpha_i) + (\beta_i) = (\alpha_i + \beta_i), \qquad (\alpha_i), (\beta_i) \in \ell_\infty$$

$$\alpha(\alpha_i) = (\alpha\alpha_i), \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{F}, (\alpha_i) \in \ell_\infty.$$

به ازای هر عضو (α_i) از این فضای برداری، نرم آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\|(\alpha_i)\|_\infty = \sup\{|\alpha_i| : i \in \mathbb{N}\} \ .$$

واضح است که $\|\cdot\|_\infty$ دارای خواص نرم می‌باشد.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید p عدد حقیقی و $p \geqslant ۱$. مجموعه‌ی تمام دنباله‌های (α_i) که $\sum_{i=۱}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$، یک فضای برداری می‌باشد. نرم $\|\cdot\|_p$ بر این فضای برداری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|(\alpha_i)\|_p = (\textstyle\sum_{i=۱}^{\infty} |\alpha_i|^p)^{\frac{۱}{p}}.$$

[1] Seminorm
[2] Normed space