بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی‌کاربردی

پیش‌شرط سازی GAOR برای حل مسائل کمترین مربعات وزن‌دار

توسط

حمید پناهی‌پور

استاد راهنما

دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر داوود رستمی

اسفند ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب .... دانشجوی رشته .... مقطع تحصیلی ....
بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان .... را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء و تاریخ

تقدیم به یگانه های زندگی ام

همسرم، الهه عشق و زیبایی، مریم

پدرم، اسطوره ایثار

مادرم، دریای مهر

برادرم، مهدی

به نام پروردگار یکتا

که آرامش و ستیز را در گذر لحظات سخت، سربلندی را در دورنمایی مبهم و آسمان رقابت و شکست را در میدان رویارویی جلوه های حیات قرار داده است. محبوبی که رایت فتح در پهنه بیکران کیهان، جز به فرمانش برافراشته نگردد و جبروت و شکوه بی انتها، جز او را نشاید.

مراتب تشکر خویش را تقدیم استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر سعید عباس‌بندی می‌دارم که حضورشان برایم افتخاری بزرگ بود و رهنمودهایشان فرصتی ارزشمند.

همچنین از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر داوود رستمی که در مراحل مختلف تحقیق مساعدت‌های بیشماری را مبذول فرمودند و مطالب رساله را با دقت تمام مطالعه فرمودند، بینهایت سپاسگذارم.

از مساعدت‌های ارزنده اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر رازانی و جناب آقای دکتر جوادی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از خانواده عزیزم که در تمام لحظات زندگی عشق و محبت بی‌پایانشان راهگشای من بوده، متشکرم.

در پایان از همه عزیزانی که مرا در نوشتن این پایان‌نامه همراهی کردند و دوستان گرامیم آقایان هادی روحانی، اقبال محمدی و محمد رمضانی تقدیر و تشکر می‌نمایم.

چکیده:

روش‌های تکراری برای حل دستگاه خطی $Ax = b$، هنگامی که بعد ماتریس A بزرگ باشد یا ماتریس A تنک باشد، کاراتر از روش‌های مستقیم می‌باشند.
در این پایان‌نامه، روش تکراری $GAOR$[1] را برای حل مسایل کمترین مربعات وزن دار معرفی می‌کنیم و همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم.
در ادامه، برای افزایش سرعت همگرایی روش $GAOR$ ، دو نوع ماتریس پیش‌شرط ساز را معرفی کرده و شعاع طیفی ماتریس تکرار روش $GAOR$ پیش‌شرط سازی شده و روش اصلی را با یکدیگر مقایسه کرده و نشان می‌دهیم در صورت همگرایی روش $GAOR$، سرعت همگرایی روش $GAOR$ پیش‌شرط سازی شده از روش اصلی بیشتر خواهد بود.
در پایان برخی، نتایج عددی ارایه می‌شود که کارایی پیش‌شرط سازی روش $GAOR$ را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: پیش‌شرط سازی – روش GAOR – مسایل کمترین مربعات وزن‌دار – دستگاه خطی – همگرایی .

[1] Generalized Accelerated Overrelaxation

فهرست مطالب

[۲] Jacobi method

[۳] Jacobi with Relaxation method

[۴] Gauss-Seidel method

[۵] Successive Overrelaxation method

[۶] Accelerated Overrelaxation

لیست جدول‌ها

لیست شکل‌ها

مقدمه

در این پایان‌نامه به مطالعه روش‌های عددی برای حل دستگاه خطی $Ax = b$ می‌پردازیم که در آن ماتریس ضرایب $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $b \in \mathbb{R}^{n\times ۱}$ می باشد و x بردار مجهول می‌باشد.
لزوم حل دستگاه‌های خطی در علوم گوناگون از قبیل علوم مهندسی، مدل‌های فیزیکی و علوم اجتماعی و نیز در قسمت‌های مختلف ریاضی از جمله حل عددی مسایل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزیی، معادلات انتگرالی، تقریب توابع و··· دانشمندان ریاضی را بر آن داشته که مطالعات وسیعی را در این شاخه از ریاضی داشته باشند و روش‌های متفاوتی را ارایه کنند.
این روش‌ها را می‌توان به دو دسته روش‌های مستقیم و تکراری دسته‌بندی کرد که هر کدام دارای معایب و محاسنی هستند که با توجه به ویژگی ماتریس ضرایب دستگاه مورد استفاده قرار می‌گیرند.
استفاده از معکوس ماتریس ضرایب، تجزیه LU و QR از جمله مهم‌ترین روش‌های مستقیم می‌باشند.

روش‌های تکراری خود به روش‌های تکراری ایستا و غیرایستا تقسیم بندی می‌شوند.
در روش‌های تکراری ایستا ماتریس ضرایب A رابه فرم زیر تفکیک می‌کنیم

$$A = D - L - U \tag{۱.۰}$$

و سپس دستگاه $Ax = b$ را به فرم معادل آن به صورت

$$x = Px + c$$

تبدیل کرده و با انتخاب یک تقریب اولیه $x^{(0)}$ رابطه تکراری را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{۲.۰}$$

هنگامی که ماتریس D قطری باشد و ماتریس‌های L و U به ترتیب پایین مثلثی اکید و بالا مثلثی اکید باشند، روش‌های معروف ژاکوبی و گاوس-سایدل بدست می‌آید که توسط ورگا[۷] در [۲۷] و یونگ [۸] در [۲۹] بیان شده‌اند. برای تسریع در همگرایی روش‌های تکراری ایستا، با معرفی پارامتری مانند ω می‌توان روش معروف SOR را تولید کرد که توسط ورگا در [۲۷] و یونگ در [۲۹] بیان شده‌است. در سال ۱۹۷۸ هجی‌دیموس [۹] در[۱۰] به معرفی روش تکراری به فرم زیر پرداخت.

$$x^{(k+1)} = M_{r,\omega}\, x^{(k)} + c \tag{۳.۰}$$

که در آن:

$$M_{r,\omega} = (D - rL)^{-1}((1 - \omega)D + (\omega - r)L + \omega U) \tag{۴.۰}$$

و

$$c = \omega(D - rL)^{-1}b$$

روش تکراری معرفی شده در(۳.۰) به روش AOR [۱۰] شهرت دارد. r و ω معرفی شده در (۴.۰) به ترتیب پارامتر تسریع و پارامتر تخفیف نامیده می‌شود.

اگر در رابطه (۱.۰) فرض کنیم ماتریس D یک ماتریس نامنفرد باشد و شرط قطری بودن را نداشته باشد و نیز ماتریس‌های L و U بالا مثلثی و پایین مثلثی نباشند می‌توان روش AOR را توسعه داد که در [۲۳] و [۲۴] به این موضوع پرداخته شده است. هجی‌دیموس نیز در [۱۱] به معرفی روش $GAOR$

[۷] Varga
[۸] Young
[۹] Hadjidimos
[۱۰] Accelerated Overrelaxation method

پرداخته است.

روش‌های تکراری غیرایستا مبتنی بر جستجو هستند. در این روش‌ها نشان داده می‌شود که اگر ماتریس ضرایب متقارن و مثبت معین باشند، آنگاه $Ax = b$ اگر و فقط اگر بردار x تابع حقیقی $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را می‌نیمم کند.

$$F(v) = \frac{۱}{۲}v^T Av - b^T v \qquad (۵.۰)$$

روش‌های غیرایستا به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} + \alpha_k P_k \qquad k = ۱, ۲, \cdots \qquad (۶.۰)$$

که در $P_k \in \mathbb{R}^{n\times ۱}$ به عنوان جهت جستجو در هر مرحله تعیین می‌شود و α_k نیز طوری تعیین می‌شود که $x^{(k)} + \alpha_k P_k$ تابع F را روی خط $x^{(k)} + \alpha P_k$ می‌نیمم کند.

روش‌های QMR[۱۱] و CG[۱۲] و FOM[۱۳] از معروف ترین روش‌های تکراری غیرایستا هستند. در روش‌های تکراری سرعت همگرایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و در صورت همگرا بودن روش، هر چه قدر شعاع طیفی ماتریس تکرار کوچکتر باشد، سرعت همگرایی بالاتر خواهد بود. یکی از روش‌ها برای بهبود سرعت همگرایی روش‌های تکراری، استفاده از روش‌های پیش‌شرط سازی است. می‌دانیم که سرعت همگرایی یک روش تکراری به شعاع طیفی ماتریس ضرایب بستگی دارد. بنابراین برای داشتن دستگاهی با شعاع طیفی مناسب از ماتریس دیگری به نام ماتریس پیش‌شرط ساز استفاده می‌شود.

سیر موضوعی مطالب در این پایان نامه به شرح زیر می‌باشد: در فصل اول تعاریف و قضیه‌های مهم جبر خطی که در بررسی روش‌های تکراری برای حل دستگاه خطی $Ax = b$ لازم است بیان شده است.

در فصل دوم به معرفی رگرسیون خطی پرداخته و مسایل کمترین مربعات وزن‌دار را معرفی می‌کنیم که روش‌های تکراری برای حل این مسایل کاربرد فراوانی دارند.

در فصل سوم به معرفی روش‌های مختلف تکراری پرداخته و همگرایی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم مفهوم پیش‌شرط سازی بیان می‌شود و با ارایه دو نوع پیش‌شرط برای روش $GAOR$ ، سرعت همگرایی روش $GAOR$ پیش‌شرط سازی شده را با روش اصلی مقایسه خواهیم کرد و برنامه

---
[۱۱] Quasi Minimal Residual

[۱۲] Conjugate Gradient

[۱۳] Full Ortogonalization Method

کامپیوتری مقایسه شعاع طیفی روش $GAOR$ پیش‌شرط سازی شده با روش اصلی آورده شده‌است.

فصل ۱

مفاهیم پایه

در این فصل تعاریف و قضیه‌هایی از جبرخطی را بیان می‌کنیم که در بررسی روش‌های تکراری برای حل دستگاه خطی $Ax = b$ کاربرد فراوانی دارد.

۱—۱ تعاریف و مفاهیم

تعریف ۱.۱. فرض کنیم F یک هیأت دلخواه باشد. یک فضای برداری V روی F، عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند V همراه با دو عمل جمع و ضرب که از قواعد زیر برای هر $w, v, u \in V$ و $\alpha, \beta \in F$ پیروی کند:

الف) $u + v \in V$ و $\alpha \cdot u \in V$.

ب) $u + v = v + v$

ج) $u + (v + w) = (u + v) + w$

د) $0 \in V$ وجود دارد به قسمی که برای هر $u \in V$، $u + 0 = 0$ برقرار باشد.

ه) برای هر $u \in V$ یک بردار منحصربه‌فرد $-u \in V$ وجود دارد که $u + (-u) = 0$.

و) $1 \cdot u = u$

ز) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$

ح) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

ط) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

مثال ۲.۱. گیریم F هیأتی دلخواه و m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند. فرض کنیم $F^{m\times n}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. به منظور سهولت کار با نمادها، درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با a_{ij} نمایش می‌دهیم. در این فضای برداری جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(A+B)_{i,j} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n \tag{۱.۱}$$

و

$$\alpha.A = \alpha.a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n \tag{۲.۱}$$

که در آن $A, B \in F^{m\times n}$ و $\alpha \in F$ می‌باشند.

تعریف ۳.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را معکوس پذیر نامیم درصورتی که ماتریسی مانند $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود داشته باشد، به طوری که:

$$A \times B = B \times A = I_n$$

معکوس ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد است هرگاه برای هر $b \in \mathbb{R}^n$ یک بردار منحصر به فرد $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax = b$.

در غیر اینصورت ماتریس A منفرد است.

قضیه ۵.۱. اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آنگاه عبارت‌های زیر با هم معادلند:

الف) A نامنفرد است.

ب) $detA \neq 0$.

ج) اگر $Ax = 0$ آنگاه $x = 0$.

د)ماتریس A معکوس پذیر است.

اثبات. به مرجع [۲۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۶.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد. ماتریس $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ را ترانهاده ماتریس A گوییم، در صورتی که $a_{ij} = b_{ji}$ و ترانهاده ماتریس A را نماد A^T نمایش می‌دهیم.
ماتریس A را متقارن گوییم در صورتیکه $A = A^T$ و پادمتقارن گوییم در صورتیکه $A = -A^T$.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد. در اینصورت مزدوج ماتریس A عبارت است از $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ و ترانهاده مزدوج A برابر است با $\overline{A}^T = \overline{A^T}$ که آن را با A^H یا A^* نشان می‌دهند.
ماتریس A را هرمیتی گویند هرگاه $A = A^H$.

تعریف ۸.۱. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را بالامثلثی (پایین مثلثی) نامند هرگاه به ازای $i > j$ $(i < j)$ ، $(i, j = 1, \ldots, n)$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

تعریف ۹.۱. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را مثبت معین (معین مثبت) گوییم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$ داشته باشیم: $x^TAx > 0$.
اگر $x^TAx \geq 0$ باشد، A را نیمه‌مثبت معین گوییم.

قضیه ۱۰.۱. اگر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مثبت معین باشد، آنگاه:

الف) A نامنفرد است.

ب) برای $i = ۱, \ldots, n$ داریم $a_{ii} > ۰$

پ) زیرماتریس‌های اصلی A مثبت معین هستند.

اثبات. به مرجع [۲۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۱.۱. ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس جایگشت است هرگاه :

الف) در هر سطر و هر ستون فقط یک درایه با مقدار یک داشته باشد.

ب) درایه‌های دیگر ماتریس P صفر باشد.

تعریف ۱۲.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را تحویل پذیر گوییم هر گاه یک ماتریس جایگشت مانند $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود داشته باشد به طوری که :

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B_{۱۱} & B_{۱۲} \\ ۰ & B_{۲۲} \end{bmatrix}$$

که در آن $B_{۱۱} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ و $B_{۲۲} \in \mathbb{R}^{n-p\times n-p}$ می‌باشد.

اگر A تحویل پذیر نباشد، آن را تحویل ناپذیر گوییم.

مثال ۱۳.۱. ماتریس A را به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 7 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ماتریس جایگشت P را به فرم زیر معرفی می‌کنیم.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حال ماتریس PAP^T را تشکیل می‌دهیم:

$$PAP^T=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4\\ 5 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

با توجه به تعریف ۱۲.۱ واضح است که ماتریس A تحویل پذیر می‌باشد.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $1 \le i,j \le n$. یک A−زنجیر برای (i,j) عبارتست از دنباله‌ی $\{i, i_1, i_2, \cdots, i_k, j\}$ به قسمی که $\{a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \cdots, a_{i_k,j}\} \neq 0$ باشد.

قضیه ۱۵.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر برای هر کدام از اندیس‌های $i \neq j$، یک A–زنجیر برای (i,j) وجود داشته باشد.

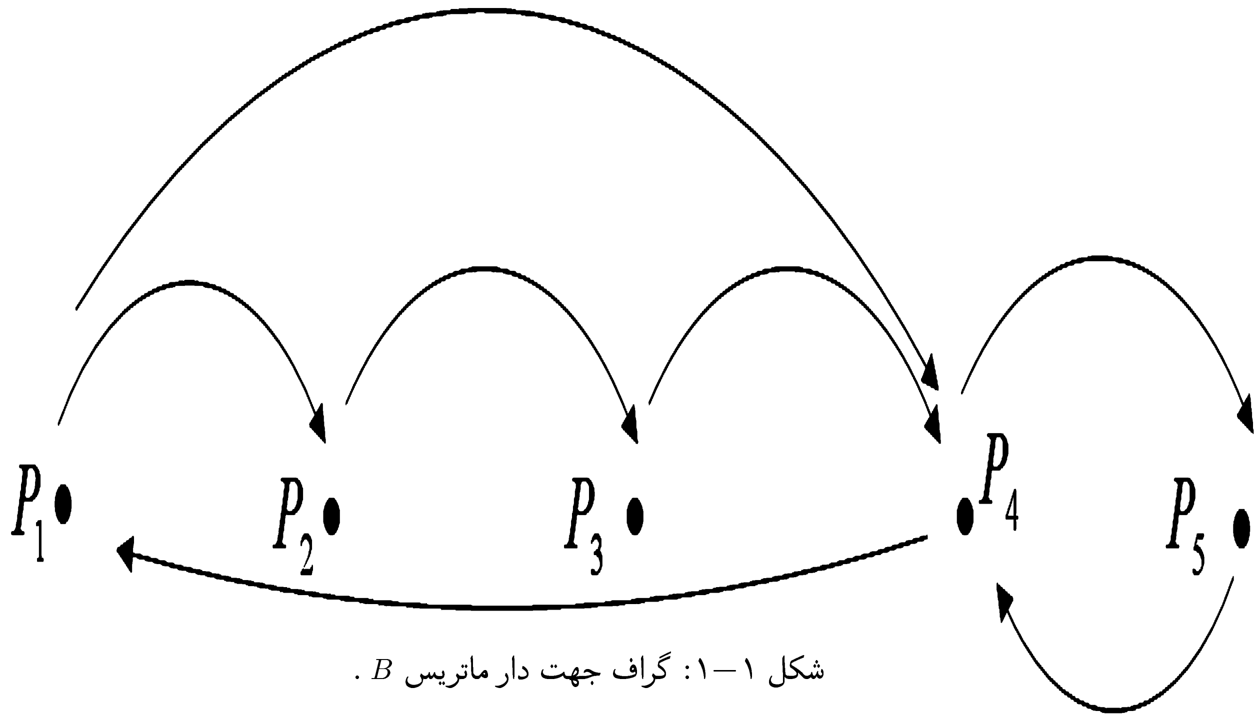
اثبات. به مرجع [۱۹] مراجعه شود. ■

تعبیر هندسی این قضیه به این صورت است که اگر فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و نقاط $P_1, \cdots, P_n$ نقاطی در صفحه باشند. سپس هر گاه در ماتریس A درایه $a_{ij} \neq 0$ باشد، یک فلش از P_i به سمت P_j رسم کنیم، با انجام این شیوه یک گراف جهت دار برای مجموعه $\{P_1, \cdots, P_n\}$ تولید می‌شود. طبق قضیه۱۵.۱ ماتریس A تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر برای هر اندیس $1 \leq i,j \leq n$، یک مسیر $P_i \to P_{i_1} \to P_{i_2} \cdots \to P_{i_k} \to P_j$ درآن گراف جهت دار وجود داشته باشد.

مثال ۱۶.۱. ماتریس B را به فرم زیر در نظر بگیرید.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حال با توجه به شکل (۱–۱) واضح است که ماتریس B تحویل ناپذیر است.



شکل ۱–۱: گراف جهت دار ماتریس B .