بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور شیراز
پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته ریاضی محض گرایش جبر

دانشکده : علوم
گروه علمی : ریاضی

عنوا ن پایان نامه :

بررسی ایدآل های جمعوند در حلقه کاهشی تعویض پذیرR

استاد راهنما:
دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور :
دکتر منصوره معانی شیرازی

نگارش :
همتعلی راستی

تیر ماه 1387

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: **بررسی اید آ لهای جمعوند در حلقه کاهشی تعویض پذیرR**
که توسط همتعلی راستی در مرکز **شیراز** تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد
تایید می باشد تاریخ دفاع : 87/4/31 نمره : 18/25 درجه ارزشیابی : **عالی**

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	**هیات داوران**	**مرتبه علمی**	**امضاء**
1- **دکتر احمد خاکساری**	**استاد راهنما**	**استادیار**	
2- **دکتر منصوره معانی شیرازی**	**استاد مشاور**	**استاد یار**	
3- **دکتر بهمن یوسفی**	**استاد داور**	**استاد**	
4-**دکتر مهناز پروانه شیرازی**	**نماینده تحصیلات تکمیلی**	**استاد یار**	

تقدیم به :

همسرم رو یا فرزندم نیما

قدردانی :

خدای را سپاسگزارم که بر بنده اش منت نهاد و در زمره ی دانشجویان قرار داد .

از زحمات بی دریغ و تلاش دلسوزانه استاد گران قدر جناب آقای دکتر احمد خاکساری که با تجارب گران مایه خود راهنما و راهگشای اینجانب بودند نهایت سپاس و امتنان را دارم .

از استاد ارجمند خانم دکتر منصوره معانی شیرازی که افتخار شاگردی ایشان را دارم تشکر می کنم امیدوارم که درسایه الطاف ایزد منان بیش از بیش موفق باشند .

از جناب آقای دکتر بهمن یوسفی که با تقبل داوری این پایان نامه بر من منت نهادند سپاسگزارم. .توفیقات روز افزون ایشان را از خداوند بزرگ خواهانم همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی استاد ارجمند خانم دکتر مهناز پروانه شیرازی تشکر می کنم .

چکیده

ویژگی اشتراک جمعوند SIP و ویژگی مجموع جمعوند SSP در مورد مدولها بوسیله ویلسون (1986) گارسیا (1989) بررسی شده اند همچنین این ویژگی ها در مورد حلقه $C(x)$بوسیله آذر پناه (1999) بررسی شده اند .

در این پایان نامه تعدادی شناسه توپولوژیکی ازاین ویژگی ها در مورد یک حلقه کاهشی تعویضپذیر R ، ارائه می کنیم.

در این تحقیق نشان داده ایم که Rویژگی SIP دارد اگر و تنها اگر هر اشتراک از زیر مجموعه های کلوپن از $Spec(R)$ درون بسته باشند این شناسه نشان می دهد که Rویژگی SIP دارد هر گاه $Spec(R)$ موضعاً همبند یا کلاً ناهمبند باشد.

همچین نشان داده ایم که Rویژگی SSP دارد اگر و تنها اگر $Spec(R)$ تنها تعدادی متناهی مولفه داشته باشد .

هر گاه j یک زیر فضای قوی از $Spec(R)$ باشد می توانیم جای jرا با $Spec(R)$عوض کنیم و نتایج بالا معتبر باقی می ماند. در حلقه های نیم اولیه گلفاند SIP ، SSPهم ارزند.

واژگان کلیدی : عناصر خود توان ـ توپولوژی زاریسکی ـ زیر فضای قوی ـ حلقه های گلفاند ـ زیر مجموعه ها کلوپن

فهرست مطالب

عنوان : **صفحه :**

مقدمه:

این پایان نامه شامل سه فصل می باشد در فصل اول واژگان کلیدی و تعاریف ، لم ها و قضایای پیش نیاز ارائه می گردد . در فصل دوم حلقهR را با ویژگیهای SSP وSIP در فضای Spec(R) توصیف می کنیم و لم ها و قضایای مربوط را اثبات می کنیم . در فصل سوم زیر فضاهای چگال و اید آل های جمعوند را بررسی می کنیم .

فصل اول
پیش نیازها
عناصر خودتوان

1-1 **تعریف** . فرض کنید R یک حلقه باشد. عضو $e\in R$ را خود توان گوییم، هر گاه $e^2=e$.
واضح است که e خود توان است اگر و تنها اگر $1-e$ خود توان باشد.

2-1 **تعریف** . حلقه R را یک حلقه بولی گوییم، هر گاه هر عضو آن خود توان باشد.

توجه کنید که هر حلقه بولی، جابجایی است. مثال اگر S مجموعه ی همه عناصر خود توان R باشد، در این صورت $(S,\oplus,\times)$ یک حلقه ی بولی است . جایکه جمع روی S بصورت $e\oplus e'=e+e'-ee'$ و ضرب روی S همان ضرب روی R تعریف می شود.

اثبات . فرض کنید $e,e',e_1,e_2\in S$ در اینصورت

$$(e\oplus e')^2=(e+e'-ee')^2=e+e'+ee'+2ee'-2ee'-2ee'=e+e'-ee'=e\oplus e'$$

$$e_1(e_2e_3)=(e_1e_2)e_3,\ e(e_1\oplus e_2)=(e_1+e_2-e_1e_2)=ee_1+ee_2-ee_1e_2=ee_1\oplus ee_2$$

بنابراین S یک حلقه بولی است.

3-1 **قضیه** . اگر R یک حلقه بولی باشد ، در این صورت

1- هر اید آل اول R ، ماکسیمال است .

2- هر اید آل اول R، مینیمال است .

اثبات . 1- فرض کنید P یک ایدآل اول در R و M یک اید آل ماکسیمال شامل P و $e\in M$. از آنجا که $e(1-e)=0\in P$ و $1-e\notin P$ بنابراین $e\in P$. از اینرو P=M . اثبات قسمت 2 نیز مشابه 1 است.

4-1 **قضیه** . در حلقه R، اگر $I=Nil(R)$ و $a\in R$ چنان باشد که $\bar{a}=a+I\in\frac{R}{I}$ خود توان باشد ، در این صورت عضو خود توان $e\in(a)$ وجود دارد که $\bar{e}=e+I=\bar{a}$.

اثبات . قرار دهید b=1-a . لذا داریم $ab=a-a^2\in I$. زیرا، از $(a+I)^2=a+I$ نتیجه می شود $a^2-a\in I$. بنابراین $m\in N$ وجود دارد به گونه ای که $(ab)^m=0$. اما قرار می دهیم $1=(a+b)^{2m}=a^{2m}+r_1a^{2m-1}b+\dots+r_ma^mb^m+r_{m+1}a^{m-1}b^{m+1}+\dots+b^{2m}$

بوضوح $f=r_{m+1}a^{m-1}b^{m+1}+\ldots+b^{2m}$ ، $e=a^{2m}+r_1a^{2m-1}b+\ldots+r_ma^mb^m$. و از آنجا که $e\in(a)$ و $a^mb^m=0$ داریم $ef=0$. از اینرو

$e=e.1=e(e+f)=e^2+ef=e^2$ یعنی e خود توان است. اما از $ab\in I$ نتیجه می شود $e=a^{2m}\in I$. ازطرفی $a^2-a=a(a-1)\in I$ ، پس:

$a^{2m}-a=a(a-1)(a^{2m-2}+\ldots+1)\in I$. از اینرو $e-a=e-a^{2m}+a^{2m}-a\in I$. بنابراین $e+I=a+I$ ، یعنی ؛ $\bar{e}=\bar{a}$.

5-1 **قضیه** . اگر I اید آلی از حلقه R باشد که شامل هیچ عضو خود توان غیر صفری نباشد ، در اینصورت اگر $e,f\in R$ چنان باشند که $\bar{e}=\bar{f}$ در $\frac{R}{I}$ ، آنگاه $e=f$.

اثبات . اگر $\bar{e}=\bar{f}$ ، در این صورت $e+I=f+I$ و بنابراین $e-f\in I$. اما $e-f$ خود توان است (چون f و e اینگونه اند). لذا $e-f=0$ از اینرو e=f. حال اگر $\overline{ef}=0$ ، آنگاه $(e+I)(f+I)=I$. بنابراین $ef\in I$. اما ef خود توان است . لذا $\bar{e}\bar{f}=0$.

6-1 **تعریف** . حلقه R را یک حلقه کاهشی گوییم ، هرگاه هیچ عضو پوچتوان ناصفر نداشته باشد ، یعنی ؛ $Nil(R)=0$.

مثال2. بوضوح هر حوزه صحیح کاهشی است .همچنین C(X) ، حلقه ی توابع پیوسته حقیقی مقدار روی فضای توپولوژیک X ، نیز یک حلقه کاهشی است . زیرا اگر $f^n(x)=0$ آنگاه $f(x)=0$.

7-1**قضیه**. فرض کنید I یک ایدآل در حلقه R . در این صورت P یک ایدآل مینیمال I است اگر و تنها اگر برای هر $a\in P$ عنصر $x\in R-P$ وجود داشته باشد، گونه ای که $ax\in\sqrt{I}$

اثبات: فرض کنید P یک ایدآل مینیمال I باشد و $a\in P$ چنان باشد که برای هر $x\in R-P$ $ax\notin\sqrt{I}$ یعنی برای هر $n\in N$ $a^nx\notin I$. در این صورت، $S=(R-P)\cup\left\{a^nx : x\in R-P\ ,\ n\in N\right\}$ یک مجموعه بسته ضربی است که $I\cap S=\phi$. زیرا، R-P و $A=\left\{a^nx : x\in R-P\ ,\ n\in N\right\}$ دو مجموعه بسته ضربی هستند و اگر $y\in R-P$, $a^nx\in A$ آنگاه $a^nxy\in A$ زیرا $xy\in R-P$ بنابراین اید آل اول Q از R وجود دارد که $I\subseteq Q$, $Q\cap S=\phi$. لذا $Q\cap(R-P)=\phi$ پس $Q\not\subset P$ که با فرض P یک ایدآل مینیمال I است در تناقص است .

برعکس فرض کنید Q ایدآل اولی باشد که $I \subseteq Q \subseteq P$ و $a \in P$. بنابراین طبق فرض، عنصر $x \in R-P \subseteq R-Q$ و $n \in N$ وجود دارد که $a^n x^n \in I \subseteq Q$. حال چون Q اول است، پس $a \in Q$ و از اینرو P=Q یعنی P یک ایدآل اول مینیمال I است.

8-1 **قضیه**: فرض کنید R یک حلقه ی کاهشی و P یک ایدآل اول در آن باشد. در این صورت P یک اید آل اول مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in P$ عنصر $x \in R-P$ وجود داشته باشد به طوری که $ax = 0$.

اثبات: بنابر قضیه 7-1 حکم واضح است.

9-1 **قضیه** . فرض کنید R یک حلقه کاهشی باشد . در اینصورت $\bigcup_{P \in Min(R)} P$ برابر است با مجموعه ی همه مقسوم علیه های صفر R .

اثبات . بوضوح طبق قضیه قبل ، هر عضو $\bigcup_{P \in Min(R)} P$ یک مقسوم علیه صفر است . حال اگر $0 \neq x \in R$ یک مقسوم علیه صفر باشد، در این صورت $0 \neq y \in R$ وجود دارد که $xy = 0$. از آنجا که R یک حلقه کاهشی است، لذا $\bigcap_{P \in Min(R)} P$. بنابراین $P' \in Min(R)$ وجود دارد که $y \notin P'$. از اینرو از $xy = 0 \in P'$ نتیجه می شود $x \in P'$.

10-1 **قضیه** . فرض کنید I یک اید آل متناهی مولد در حلقه کاهشی R باشد. در این صورت I مشمول در یک اید آل اول مینیمال R است اگر و تنها اگر $Ann I \neq (0)$.

اثبات . فرض کنید $I = Ra_1 + ... + Ra_n$ و P یک ایدآل مینیمال R باشد که $I \subseteq P$. بنابراین طبق قضیه 8-1 ، به ازای هر $b_i \in R-P, 1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $a_i b_i = 0$. قرار دهید $b = b_1 ... b_n$. بوضوح $b \in R-P$، $b \neq 0$ و $b \in Ann I$. برعکس ، فرض کنید $Ann I \neq (0)$. لذا از آنجا که $\bigcap_{P \in Min(R)} P = Nil(R) = (0)$ ، ایده آل اول مینیمال P' در R وجود دارد که $Ann I \not\subset P'$. از اینرو $I \subseteq P'$ ، زیرا اگر $a \in I$, $x \in Ann I$ چنان باشد که $x \notin P'$ ، آنگاه $ax = 0 \in P'$. و در نتیجه $a \in P'$. همانطور که در اثبات مشاهده می شود ، در این قسمت نیازی به متناهی مولد بودن I نیست . به این ترتیب برای هر اید آل دلخواه I از R ، کفایت شرط برقرار است .

11-1 **تعریف** . ایدآل I در حلقه R ، یک جمعوند مستقیم حلقه R نامیده می شود ، هر گاه ایدآل J در R وجود داشته باشد به گونه ای که $I \oplus J = R$ ، یعنی ؛ $I \cap J = (0), I + J = R$.

مثال 3. بوضوح برای هر عضو خود توان $e \in R$ اید آل (e) یک جمعوند مستقیم حلقه ی R است. زیرا، $(e) + (1-e) = R$, $(e) \cap (1-e) = (0)$. **قضیه** زیر نشان می دهد که عکس مطلب فوق نیز برقرار است .

12-1 **قضیه** . اگر اید آل I یک اید آل جمعوند مستقیم حلقه R باشد ،آنگاه $I=(a)$ که در آن a یک عضو خودتوان R است.

اثبات. از آنجایی که I یک ایدآل جمعوند مستقیم حلقه R است ایدآل J از R وجود دارد که I+J=R و $I \cap J=(0)$. پس عناصر $b\in J\ ,a\in I$ وجود دارند که a+b=1. اما $ab=0$ زیرا، $ab\in I\cap J=0$و لذا $a=a.1=a(a+b)=a^2$ ،یعنی؛ a خودتوان است. حال اگر $x\in I$ آنگاه $x=x.1=x.(a+b)=xa+xb=xa\in(a)$ ؛ زیرا، $xb\in I\cap J=(0)$. از اینرو $I=(a)$.

13-1 **تعریف** . حلقه R یک حلقه منظم [1] یا به اختصار VNR نامیده می شود، هرگاه هرایدآل اصلی در R ، یک اید آل جمعوند مستقیم R باشد. بعبارت معادل هر اید آل اصلی در R توسط یک خود توان تولید شود.

مثال 4 .بوضوح هر حلقه بولی یک حلقه VNR است .

14-1 **قضیه**. گزاره های زیر هم ارزند:

R-1 یک حلقه منظم است .

R-2 یک حلقه کاهشی است و هر اید آل اول آن، اول مینیمال است .

3- برای هر $a\in R$ عنصر $b\in R$ وجود دارد که $a=a^2b$.

اثبات. $(2)\Rightarrow(1)$ فرض کنید R یک حلقه منظم و I یک اید آل در R باشد و $x\in R$ چنان باشد که $x^n\in I$، برای یک $n\in$. بنابراین عضو خود توان $e\in R$ وجود دارد که $(x)=(e)$. لذ عناصر $r,r'\in R$ وجود دارند که $x=re\ ,e=r'x$ و از اینرو $x^{n-1}=r^{n-1}e=r^{n-1}r'x=r'r^ne=r'x^n\in I$. به همین ترتیب ثابت می شود که $x\in I$ ، یعنی ؛ I یک حلقه نیمه اول است. در حالت خاص اگر $I=(0)$، دیده می شود که R کاهشی است. حال فرض کنید P یک اید آل اول در R باشد و $x\in P$. بنابراین $(1-e)x=0$ ، زیرا $x=re$. اما $1-e\notin P$ ، زیرا از $(e)=(x)$ نتیجه می شود $e\in P$و از اینرو طبق قضیه ی: 1-8، P یک ایدآل اول مینیمال R است.

$(1)\Rightarrow(2)$ فرض کنید R یک حلقه کاهشی که هر ایدآل اول در آن ، اول مینیمال باشد و $0\neq a\in R$. قرار می دهیم $I=Ann_R(a)$. از آنجا که R کاهشی است، لذا $(a)\cap I=(0)$. همچنین $(a)+I$ مشمول در هیچ ایدآل اول P نیست، زیرا اگر P یک ایدآل اول R باشد که $(a)+I\subseteq P$ ، آنگاه از آنجا که P طبق فرض، اول مینیمال است، طبق قضیه 1-8 ، برای $a\in(a)+I$عنصر

[1] -Vin- Neuman regular

$y\in R-P$ وجود دارد که $ay=\mathbf{0}$. اما در این صورت $y\in I\subseteq P$ که یک تناقض است. از اینرو $(a)+I=R$ و بنابراین (a) یک جمعوند مستقیم R است. به این ترتیب R یک حلقه ی منظم است .

$(1)\Rightarrow(3)$ فرض کنید $a\in R$. بنابراین عضو خود توان $e\in R$ وجود دارد که $(a)=(e)$ ، یعنی؛ عناصر $b,c\in R$ وجود دارند که $a=ec,e=ab$. از اینرو :

. $a=ec=abc=ecbc=e^2c^2b=a^2b$

$(3)\Rightarrow(2)$ فرض کنید $a\in R$ چنان باشد که برای $2\leq n\in$ ‎, $a^n=\mathbf{0}$. بنابراین طبق فرض، عنصر $b\in R$ وجود دارد که $a=a^2b$. لذا $a^{n-1}=a^{2n-2}b^{n-1}=0$ ، زیرا $2n-2\geq n$. به همین ترتیب، پس از طی $n-1$ مرحله، نتیجه می شود $a=\mathbf{0}$ ، یعنی؛ R یک حلقه کاهشی است. حال فرض کنید P و Q دو اید آل اول باشند که $Q\subseteq P$, $a\in P$. بنابراین $b\in R$ وجود دارد که $a=a^2b$. به عبارت دیگر $a(1-ab)=\mathbf{0}\in Q$. اما $1-ab\notin Q$ ، زیرا در غیر این صورت ، از $1-ab\in Q\subseteq P$ و $a\in P$ که نتیجه می شود $1\in P$ و این یک تناقض است. پس $a\in Q$ و لذا $P=Q$ ، یعنی؛ هر اید آل اول P در R ، اول مینیمال است.

1-15 **قضیه** . اگر R یک حلقه ی منظم (VNR) باشد، در این صورت:

1- هر اید آل R ، نیمه اول است.

2- هر اید آل اول R ، ماکسیمال است.

3- هر اید آل R ، اشتراکی از ایدآلهای ماکسیمال است.

اثبات.

1- این قسمت در اثبات قضیه ی قبل آمده است.

2- اگر P یک ایدآل اول در R باشد، آنگاه ایدآل ماکسیمال M وجود دارد که $P\subseteq M$. فرض کنید $a\in M$. در این صورت طبق فرض، $b\in R$ وجود دارد که $a=a^2b$. یا به طور معادل $a(1-ab)=\mathbf{0}\in P$. اما $1-ab\notin P$ ، زیرا در غیر این صورت از $1-ab\in P\subseteq M$ و $a\in M$ نتیجه می شود $1\in M$ که یک تناقض است و لذا $a\in P$. از اینرو $P=M$.

3- این قسمت نتیجه ای از بند 1و 2 است.

1-16 **تعریف**. اید آل ناصفرI از حلقه ی R را مینیمال گویند، هر گاه شامل هیچ ایدآل غیر صفری جز خودش نباشد.

بوضوح اگر I یک ایدآل مینیمال و $\mathbf{0}\neq a\in I$ ، آنگاه $(a)=I$.

17-1 قضیه. در هر حلقه کاهشی ، هر ایدآل مینیمال توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

اثبات. اگر $I=(a)$ یک ایدآل مینیمال (ناصفر) در حلقه ی کاهشی R باشد، آنگاه $(a)=(a^2)$، زیرا $a^2\neq 0$. لذا $x\in R$ وجود دارد بطوریکه $a=a^2x$. و در نتیجه $ax=a^2x^2$ از اینرو ax یک عضو خود توان ناصفر در R است. بنابراین $I=(ax)$.

18-1 قضیه. اگر $I=(a)$ یک ایدآل مینیمال در حلقه ی R باشد و $M=(1-a)\neq R$ ، در اینصورت M یک اید آل ماکسیمال در R است .

اثبات. فرض کنید M' ایدآل ماکسیمالی باشد که $M\subseteq M'$ اگر $m'\in M'$ در این صورت $m'=m'.1=m'(a+1-a)=m'a+m'(1-a)$. اما $m'a=0$ زیرا اگر $m'a\neq 0$، آنگاه از مینیمال بودن I نتیجه می شود $(a)=(m'a)$ و لذا $x\in R$ وجود دارد که $a=m'ax$ یا بطور معادل $a(1-m'x)=0\in M'$. اما $a\notin M'$. پس $1-m'x\in M'$ که با فرض $m'\in M'$ در تناقض است. از اینرو $m'=m'(1-a)\in(1-a)$، یعنی؛ $M=M'$ و بنابراین $M=(1-a)$ یک ایدآل ماکسیمال در R است.

19-1 قضیه. اگر a عضوی در حلقه ی R باشد که $M=(a)$ یک ایدآل ماکسیمال در R باشد، در این صورت $I=(1-a)$ یک ایدآل مینیمال است اگر و تنها اگر a خود توان باشد.

اثبات. فرض کنید $I=(1-a)$ یک ایدآل مینیمال باشد. نشان می دهیم $a(1-a)=0$، زیرا در غیر این صورت چون I یک ایدآل مینیمال است؛ لذا $(a(1-a))=(1-a)$. بنابراین $x\in R$ وجود دارد بطوریکه $1-a=xa(1-a)$. یا بطور معادل $(1-a)(1-xa)=0\in M$. اما از $a\in M$ نتیجه می شود $1-a\notin M$. از اینرو $1-xa\in M$ که نتیجه می دهد $1\in M$ و این یک تناقض است. لذا $a(1-a)=0$، یعنی؛ a یک عضو خود توان است.

برعکس، فرض کنید a یک عضو خود توان در R باشد و $J\neq 0$ اید آلی درR باشد که $J\subseteq I=(1-a)$. در اینصورت $I\cap M=(0)$، زیرا اگر $b\in M\cap I$، آنگاه x,y وجود دارد که $b=ax=(1-a)y$. بنابراین $b=ax=a^2x=a(1-a)y=0$. حال اگر $0\neq b'\in J$، آنگاه $b'\notin M$. لذا از ماکسیمال بودن M نتیجه می‌شود $M+(b')=R$. پس $x',y'\in R$ وجود دارند که $ax'+b'y'=1$. یا بطور معادل $b'y'=1-ax'\in J\subseteq I$. بنابراین $t\in R$ وجود دارد که $1-ax'=(1-a)t$. پس $a(1-ax')=a(1-a)t=0$. لذا $a=a^2x'=ax'$. بنابراین $b'y'=1-ax'=1-a\in J$، یعنی؛ $J=I=(1-a)$. به این ترتیب I یک اید آل مینیمال در R است.

20-1 **نتیجه**. فرض کنید $I=(a)$ ایدآل مینیمالی در حلقه ی R باشد که $(1-a)\neq R$. در اینصورت I توسط یک خود توان تولید می شود.

اثبات. این گزاره، نتیجه ی فوری دو قضیه ی قبل است.

قضیه زیر یک شناسه جبری برای ایدآلهای مینیمال در حلقه هایی که رادیکال جیکبسون آنها صفر است ارائه می دهد.

21-1 **قضیه**. فرض کنید R حلقه ای باشد که $\bigcap_{M\in Max(R)} M=(0)$. در این صورت اید آل ناصفر I از R مینیمال است اگر و تنها اگر I مشمول در هر اید آل ماکسیمال بجز دقیقاً یکی، که با یک خود توان تولید می شود، باشد.

اثبات. فرض کنید I یک ایدآل مینیمال در R باشد. بنابراین از آنجا که R کاهشی است، لذا از قضیه ی 1-17، نتیجه می شود عضو خود توان $e\neq 0$ در R وجود دارد بطوریکه $I=(e)$. در این صورت از آنجا که $(1-e)\neq R$، طبق قضیه ی 1-18، ایدآل $M_0=(1-e)$ ماکسیمال است و $I\not\subset M_0$، زیرا $e\notin M_0$. اما برای هر ایدآل ماکسیمال $M_0\neq M$ داریم $e(1-e)=0\in M$. لذا $e\in M$. به این ترتیب $I\subseteq \bigcap_{M\in Max(R)-\{M_0\}} M$.

برعکس، فرض کنید I ایدآلی باشد که مشمول در هر ایدآل ماکسیمال بجز ایدآل ماکسیمال M_0 باشد.

بنابراین $a\in I$ وجود دارد که $a\notin M_0$. نشان می دهیم $x\in R$ وجود دارد که ax یک عضو خود توان در R است و $M_0=(1-ax)$. از آنجا که $a\notin M_0$، لذا $x\in R$ و $m_0\in M_0$ وجود دارند که $m_0+ax=1$. پس: $ax\neq 0$, $a=a.1=a(m_0+ax)=am_0+a^2x$. اما $am_0\in \bigcap_{M\in Max(R)} M=(0)$، زیرا $m_0\in M_0$ و $a\in I\subseteq \bigcap_{M\in Max(R)-\{M_0\}} M$. بنابراین $am_0=0$ از اینرو $a=a^2x$ یا بطور معادل $a(1-ax)=0\in M_0$ و چون $a\notin M_0$، پس $1-ax\in M_0$. از طرفی $ax(1-ax)=0$. نتیجه می دهد که ax خود توان است. حال اگر $m\in M_0$، آنگاه از $amx\in \bigcap_{M\in Max(R)} M$ نتیجه می شود $amx=0$. لذا $m=m-amx=m(1-ax)$. از اینرو $M_0=(1-ax)$ پس طبق قضیه 19-1، (ax) یک ایدآل مینیمال است که $(ax)\subseteq I$. حال اگر $b\in I$، آنگاه $b(1-ax)\in \bigcap_{M\in Max(R)} M=(0)$، $b=bax$. بنابراین $I\subseteq (ax)$. لذا $I\subseteq (ax)$ یک ایدآل مینیمال در R است.

22-1 **تعریف**. گردایه ناتهی $\{B_i\}_{i\in I}$ از ایدآلهای ناصفر حلقه ی R مستقل نامیده می شود، اگر برای هر $i\in I$, $B_i \cap (\sum_{i\neq j\in I} B_j)=(0)$. در اینحالت $\sum_{i\in I} B_i$ را با $\oplus_{i\in I} B_i$ نمایش می دهیم.

مثال 5. در یک حلقه ی کاهشی، هر ایدآل ناصفر و پوچساز آن مستقل اند، زیرا اگر $x\in I\cap Ann(I)$، آنگاه $x^2=0$ و چون R کاهشی است، لذا $x=0$.

23-1 لم. اگر I_1 و I_2 دو ایدآل مینیمال (ناصفر) متمایز در حلقه ی R باشند، در این صورت $I_1\cap I_2=(0)$.

اثبات. اگر $I_1\cap I_2\neq(0)$، آنگاه از $I_1\cap I_2\subseteq I_1$، $I_1\cap I_2\subseteq I_2$ و مینیمال بودن I_1, I_2 نتیجه می شود $I_1=I_1\cap I_2=I_2$ که با متمایز بودن I_1, I_2 در تناقض است.

24-1 **قضیه.** هر خانواده ناتهی از اید آلهای مینیمال متمایز ، در حلقه ی کاهشی R، مستقل است.

اثبات. فرض کنید $\{N_i\}_{i\in I}$ یک خانواده ی ناتهی از ایدآلهای متمایز در R باشد و $a\in N_i\cap(\sum_{i\neq j}N_j)$. بنابراین $a=a_1+...+a_n$ که برای هر $a_t\in N_t, 1\leq t\leq n$, $N_t\neq N_i$ جائیکه $i\neq t$. لذا $a^2=a_1a+...+a_na=0$، زیرا برای هر $1\leq t\leq n$, $a_ta\in N_i\cap N_t=(0)$. حال چون R کاهشی است، پس $a=0$. از اینرو $N_i\cap(\sum_{i\neq j}N_j)=(0)$، یعنی؛ $\{N_i\}_{i\in I}$ مستقل است.

25-1 **تعریف.** ایدآل E از حلقه ی R را اساسی گویند، هرگاه اشتراک آن با هر ایدآل ناصفر، ناصفر باشد.

26-1 لم. اگر I یک ایدآل ناصفر در حلقه ی R باشد، در این صورت $I+Ann(I)$ یا برابر R است یا یک ایدآل اساسی در R آن است.

اثبات. فرض کنید $I+ann(I)\neq R$ و J یک ایدآل ناصفر در R باشد. اگر $J\cap Ann(I)\neq(0)$، آنگاه $J\cap(I+Ann(I))\neq(0)$. پس فرض کنید $J\cap Ann(I)=(0)$. بنابراین برای هر $0\neq x\in J$ عنصر $0\neq a\in I$ وجود دارد که $ax\neq 0$. اما در این صورت $ax\in J\cap I$. لذا $ax\in J\cap(I+Ann(I))$. از اینرو $I+Ann(I)$ یک ایدآل اساسی در R است.

27-1 **تعریف** . مجموع همه ی ایدآلهای مینیمال حلقه R، ساکل آن حلقه نامیده شده، با $Soc(R)$ نمایش داده می شود، یعنی؛ $Soc(R)=\oplus_{i\in I}N_i$ که در آن $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده ی همه ایدآلهای مینیمال R است.

28-1 **تعریف.** فرض کنید R و R' دو حلقه و $f:R\to R'$ یک همریختی حلقه باشد. در این صورت اگر J ایدآلی از R' باشد، آنگاه $f^{-1}(J)$ همواره ایدآلی از R است که آنرا با J^c نمایش داده، انقباض J می نامیم.

حال اگر I ایدآلی در R باشد، f(I) لزوماً ایدآلی در R' نیست. اما $R'f(I)$ یک ایدآل در R' است که آنرا با I^e نمایش داده و گسترش (توسیع) I می نامند. در واقع:

$$I^e = (f(I)) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i) : x_i \in R' \ , a_i \in I \ , n \in \quad \right\}$$

بوضوح اگر P یک ایدآل اول در R' باشد، آنگاه $P^c = f^{-1}(P)$ نیز ایدآل اول در R است. اما این مطلب برای P^c که P یک ایدآل اول در R است، صحیح نیست.

توپولوژی زاریسکی

1-29 **تعریف**. خانواده t از زیر مجموعه های مجموعه X را یک توپولوژی در X می‌گوییم، اگر t از سه خاصیت زیر بهره مند باشد.

1- $f \in t$, $X \in t$.

2- هرگاه $\{V_a\}$ خانواده دلخواهی از اعضای t باشد آنگاه $U_a V_a \in t$.

3- برای عضوهای $V_1, V_2, ..., V_n$ از t داشته باشیم $\mathbf{I}_{i=1}^{n} v_n \in t$.

هرگاه t یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را فضای توپولوژیک و اعضای t را مجموعه باز در X می نامیم.

در این بخش با تعریفی مناسب از مجموعه های باز و بسته، مجموعه ایدآل های اول حلقه ی R را به یک فضای توپولوژیکی تبدیل می کنیم و خواص توپولوژیکی آن را مطالعه

می کنیم. همچنین مجموعه های $Max(R)$, $Min(R)$ را به عنوان زیر فضا هایی از $Spec(R)$ بررسی می کنیم.

فرض کنیم R یک حلقه باشد. می دانیم $R \neq \{0\}$ اگر و فقط اگر $Spec(R) \neq \varnothing$. برای هر زیر مجموعه ی X از R تعریف می‌کنیم:

$$V(X) = \{P \in Spec(R) | X \subseteq P\}$$

وقتی $X = \{a\}$، قرار می‌دهیم: $V(X) = V(a) = \{P \in Spec(R) | a \in P\}$

بدیهی است که برای هر $X \subseteq R$ داریم $V(X) = \mathbf{I}_{a \in X} V(a)$.

1-30 **قضیه**. اگر I ایدآل تولید شده توسط مجموعه ی X باشد، یعنی؛ $I = < X >$، آنگاه $V(X) = V(I)$.

اثبات. چون $X \subseteq I$ پس $V(I) \subseteq V(X)$. چنانچه $P \in V(X)$ پس $X \subseteq P$ و لذا $I = < X > \subseteq P$. به بیانی دیگر، چون $< X >, X \subseteq < X > \mathbf{I}\ P \subseteq < X >$ کوچکترین ایدآل شامل X

است، پس $<X> \cap P = <X>$ و لذا $<X> \subseteq P$، در نتیجه $P \in V(I)$ و بنابراین $V(I) = V(X)$.

حال با تعریف مجموعه های بسته به صورت $V(I)$ برای هر ایدآل I از R، یک توپولوژی روی $Spec(R)$ بر حسب مجموعه های بسته تعریف می‌کنیم. برای این منظور قرار می‌دهیم:

$F = \{V(I) \mid$ Iایدآل Rاست$\}$.

1) $Spec(R) = V(\mathbf{0}) \in F \; , \; \varnothing = V(1) = V(R) \in F$

2) اگر $\{A_i\}_i \in I$ خانواده ای از ایدآلهای R باشد، آنگاه $\bigcap_{i\in I} V(A_i) = V(\bigcup_{i\in I} A_i) \in F$

اثبات.

$$\begin{aligned} P \in V(\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i) &\Leftrightarrow \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq P \\ &\Leftrightarrow A_i \subseteq P \; , \; \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow P \in V(A_i) \; , \; \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow P \in \textstyle\bigcap_{i\in I} V(A_i) \end{aligned}$$

3) برای ایدآلهای $I_1 ... , I_n$ از R داریم: $\bigcup_{i=1}^{n} V(I_i) \in F$.

اثبات. فرض کنیم $P \in \bigcup_{i=1}^{n} V(I_i)$، پس $i \in \{1,...,n\}$ وجود دارد بطوریکه $P \in V(I_i)$ و لذا $I_i \subseteq P$ که این نتیجه می دهد $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq I_i \subseteq P$ و لذا داریم $P \in V(\bigcap_{i=1}^{n} I_i)$. برعکس؛ اگر $P \in V(\bigcap_{i=1}^{n} I_i)$، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$ و لذا $i \in \{1,...,n\}$ وجود دارد بطوریکه $I_i \subseteq P$ بنابراین $P \in V(I_i)$ و در نتیجه $P \in \bigcup_{i=1}^{n} V(I_i)$. در واقع داریم:

$\bigcup_{i=1}^{n} V(I_i) = V(\bigcap_{i=1}^{n} I_i) = V(I_1 I_2 ... I_n).$

بنابراین F در اصول موضوع فضاهای توپولوژیکی تعریف شده بر حسب زیر مجموعه های بسته صدق می‌کند که F پایه ای برای مجموعه های بسته تشکیل می‌دهد. این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی می‌نامیم.

حال برای هر $X \subseteq R$ فرض می‌کنیم $D(X)$ متمم $V(X)$ در $Spec(R)$ باشد، یعنی؛

$D(X) = Spec(R) - V(X) = \{P \in Spec(R) \mid X \not\subset P\}$

و برای هر $a \in R$، $D(a)$ متمم $V(a)$ در Spec(R) باشد. بطور مشابه وقتی $X \subseteq R$ داریم $D(X) = \bigcup_{a \in X} D(a) \; , \; D(X) = D(<X>)$.

قرار می‌دهیم: $H = \{D(I) \mid$ I ایدآل R است.$\}$. در این صورت H از مجموعه های باز تشکیل شده و داریم:

1) $Spec(R) = D(1) \in H \; , \; \varnothing = D(\mathbf{0}) \in H$،

2) اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از ایدآلهای R باشد، آنگاه:

$$\bigcup_{i\in I} D(A_i) = D(\bigcup_{i\in I} A_i) = D(\sum_{i\in I} A_i)\in H .$$

3) اگر $I_1...I_n$ ایدآلهایی از R باشند، آنگاه :

$$\bigcap_{i=1}^{n} D(I_i) = D(\bigcap_{i=1}^{n} I_i) = D(I_1 I_2 ... I_n) \in H \ .$$

بنابراین H به عنوان پایه ای برای مجموعه های باز یک توپولوژی بر حسب مجموعه های باز روی $Spec(R)$ تعریف می‌کند. هر مجموعه ی باز اجتماعی از اعضای H است.

Min(R), Max(R) با توپولوژی القایی یک زیر فضا از $Spec(R)$ تشکیل می‌دهند. Spec(R) و Max(R) و Min(R) را با توپولوژی زاریسکی به ترتیب طیف اول حلقه، طیف ماکزیمال حلقه و طیف اول مینیمال حلقه می‌گوییم.

حال به بررسی خواص مجموعه های باز و بسته توپولوژی زاریسکی می‌پردازیم و نیز خواص توپولوژیکی طیف های یک حلقه را بررسی می‌کنیم.

31-1 **لم**. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:

1 -برای هر دو عضو a و b از حلقه ی R داریم:

$$D(a)\cap D(b)=D(ab)\ ,V(a)\cup V(b)=V(ab)$$

2-برای هر $a\in R$ و هر $n\in$ داریم: $D(a)=D(a^n)\ ,V(a)=V(a^n)$.

3-برای هر $a\in R$، $D(a)=f$ یا به طور معادل $V(a)=Spec(R)$ اگر و تنها اگر $a\in Nil(R)$،

4-برای هر $a\in R$، $D(a)=Spec(R)$ یا به طور معادل $V(a)=\varnothing$ اگر و تنها اگر a وارون پذیر باشد،

5-اگر A و B زیر مجموعه هایی از R باشند و $A\subseteq B$، آنگاه $D(A)\subseteq D(B)\ ,V(B)\subseteq V(A)$.

اثبات. ساده است.

32-1 **لم**. اگر F زیر مجموعه ی بسته از Spec(R) باشد، آنگاه

1) برای هر $P\in F$ داریم $V(P)\subseteq F$

2) برای هر $P\notin F$ زیر مجموعه ی بسته ای از $V(P)$ شامل $F\cap V(P)$ است، وجود دارد.

اثبات.

1) چون F در $Spec(R)$ بسته است پس ایدآل I از R وجود دارد چنانچه $F=V(I)$. در صورتیکه $P\in F$ پس $I\subseteq P$ و لذا $V(P)\subseteq V(I)=F$.

2) $P \notin F$ لذا $I \not\subseteq P$. چون $P \subseteq P+I$ پس $V(I+P) \subseteq V(P)$. فرض کنیم $Q \in F \cap V(P)$ پس $I \subseteq Q$ و $P \subseteq Q$. لذا $I+P \subseteq Q$ و در نتیجه $Q \in V(I+P)$. بنابراین مجموعه ی بسته ی $V(I+P)$ شامل $F \cap V(P)$ است.

1-33 **قضیه**. اگر I ایدآلی از حلقه R باشد، آنگاه $V(I)=V(\sqrt{I})$ و یا به طور معادل $D(I)=D(\sqrt{I})$

اثبات. از آنجا که $I \subseteq (\sqrt{I})$ پس $V(\sqrt{I}) \subseteq V(I)$. برعکس طبق قضایای قبل داریم $\sqrt{I} = \cap V(I)$ فرض کنیم $Q \in V(I)$، پس $\sqrt{I} = \cap V(I) \subseteq Q$ در نتیجه $Q \in V(\sqrt{I})$. بنابراین $V(I) \subseteq V(\sqrt{I})$.

1-34 **قضیه**. اگر I و J ایدآلهای از حلقه ی R باشند، آنگاه

1) $V(I)=V(J)$ یا به طور معادل $D(I)=D(J)$ اگر و تنها اگر $\sqrt{I}=\sqrt{J}$،

2) $V(J) \subseteq V(I)$ یا به طور معادل $D(I) \subseteq D(J)$ اگر و تنها اگر $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

اثبات.

1) چنانچه $\sqrt{I}=\sqrt{J}$، با استفاده از قضیه 1-33 داریم $V(I)=V(\sqrt{I})=V(\sqrt{J})=V(J)$. برعکس؛ چنانچه $V(I)=V(J)$ داریم $\sqrt{I} = \cap V(I) = \cap V(J) = \sqrt{J}$.

2) در صورتیکه $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$، پس $V(J)=V(\sqrt{J}) \subseteq V(\sqrt{I})=V(I)$. برعکس؛ اگر $V(J) \subseteq V(I)$، آنگاه $\sqrt{I} = \cap V(I) \subseteq \cap V(J) = \sqrt{J}$.

باید متذکر شد که از $V(I)=V(J)$ نمی توان نتیجه گرفت که $I=J$. چرا که برای هر ایدآل I از R و هر عدد طبیعی n داریم $V(I)=V(I^n)$ ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که $I=I^n$.

1-35**قضیه**. فرض کنیم $p \in Spec(R)$، مجموعه ی $\{P\}$ در $Spec(R)$ بسته است اگر و تنها اگر $P \in Max(R)$.

اثبات. اگر P ماکزیمال باشد، آنگاه $V(P)=\{P\}$ لذا $\{P\}$ بسته است. برعکس؛ اگر $\{P\}$ بسته باشد، آنگاه ایدآل I از R وجود دارد که $V(I)=\{P\}$. اگر P ماکزیمال نباشد، ایدآل اول Q وجود دارد بطوریکه $P \subset Q$ لذا $Q \in \{P\}$ که تناقض است.

1-36**نتیجه**. اگر R حلقه ای موضعی باشد، آنگاه $Spec(R)$ فقط یک زیر مجموعه بسته دارد.

اثبات. نتیجه مستقیم 1-35 است.

1-37 **قضیه**. اگر P و Q عناصر $Spec(R)$ باشند، آنگاه $Q \in \overline{\{P\}}$ اگر و تنها اگر $P \subseteq Q$.