دانشکده علوم پایه

# درباره رنگ آمیزی قوی یالی گراف ها

نگارش

فهیمه نصیری

استاد راهنما :دکتر حمید رضا میمنی

استاد مشاور :دکتر فرحبخش کمالی خمسه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

خرداد ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

**بسمه تعالی**

مدیریت تحصیلات تکمیلی

## تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب فهیمه نصیری متعهد می شوم که مطالب مندرج در این  پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و ماخذ ذکر گردیده است . این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است . در صورت اثبات تخلف ( در هر زمان ) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می باشد .

نام و نام خانوادگی دانشجو : فهیمه نصیری

امضاء

**تهران- لویزان – کد پستی ۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۸۵ – تلفن ۹ – ۲۲۹۷۰۰۶۰(داخلی ۲۳۴۷) – نمابر۲۲۹۷۰۰۱۱ –**
**پست الکترونیکی:** sru@sru.ac.ir

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

# درباره رنگ آمیزی قوی یالی گراف ها

نگارش

فهیمه نصیری

استاد راهنما :دکتر حمید رضا میمنی

استاد مشاور :دکتر فرحبخش کمالی خمسه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

خرداد ماه ۱۳۸۹

بسمه تعالی

شماره: ۱۰۹۴۴/۱۴
تاریخ: ۸۹/۶/۱
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

## صورتجلسهٔ دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد خانم **فهیمه نصیری** رشتهٔ **ریاضی‌کاربردی** تحت عنوان **درباره رنگ‌آمیزی قوی یالی گراف‌ها** ،که در تاریخ: ۸۹/۳/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی برگزار گردید و نتیجه به شرح زیر می باشد.

☐ قبول (بادرجه ......عالی...... امتیاز ......۱۸/۴......) ☐ دفاع مجدد ☐مردود

۱ ـعالی (۲۰ – ۱۸) هیجده و چهار دهم

۲ ـ بسیار خوب (۱۷/۹۹ – ۱۶)

۳ ـ خوب (۱۵/۹۹ – ۱۴)

۴ ـ قابل قبول (۱۳/۹۹ – ۱۲)

| اعضاء | نام و نام خانوادگی | مرتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| استاد راهنما | دکتر حمیدرضا میمنی | دانشیار | |
| استاد مشاور | دکتر فرحبخش‌کمالی | استادیار | |
| استاد داور داخلی | دکتر علی زعیم‌باشی | استادیار | |
| استاد داور خارجی | دکتر سعید اکبری | استاد | |
| نماینده تحصیلات تکمیلی | دکتر جلال ولی‌الهی | استادیار | |

دکتر ایوب اسماعیل‌پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران ،لویزان ،کدپستی :۱۵۸۱۱ – ۱۶۷۸۸
صندوق پستی :۱۶۳ – ۱۶۷۸۵
تلفن :۹– ۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس :۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به

# مادر دلسوزم و پدر بزرگوارم

## به پاس سال ها تلاش

## تا بیاموزم

## پدر عزیز، مادر مهربان سربلند باشید که سربلندیم مرهون زحمات شماست

## قدردانی و تشکر:

حال که با فضل و عنایت خداوند رحمان موفق به تنظیم و تدوین این پایان نامه شده ام، بر خود لازم می دانم از کلیه عزیزانی که در تدوین این رساله مرا مورد لطف و عنایت خود قرار داده اند، تقدیر نمایم.

شایسته ترین مراتب سپاس و تشکر خود را خدمت استاد عزیز و عالیقدرم؛ جناب آقای دکتر میمنی که راهنمایی های ارزشمند ایشان راهگشای من بودند، تقدیم می دارم.

به استاد مشاور گرامیم؛ سر کار خانم دکتر کمالی خمسه به خاطر مساعدت، راهنمایی و دقت نظرشان نهایت تشکر و قدردانی را تقدیم می دارم.

از استاد فرهمند جناب آقای دکتر Gyula O. H. Katona که با همکاری های صمیمانه و بی شائبه خویش گره گشای بسیاری از مشکلات این پژوهش بودند، صمیمانه سپاسگذاری می کنم.

# چکیده

یک $k$-رنگ آمیزی قوی یالی گراف $G=(V,E)$ تابع $c: E \to [k]$ است به طوری که به هر دو یالی که منتهی به یک رأس یا مجاور با یک یال هستند، مقدارها (رنگ های) متفاوتی اختصاص داده شود. اندیس رنگی قوی گراف $G$ که آن را با $\chi'_s(G)$ نشان می دهیم، کوچکترین عدد $k$ است که یک $k$-رنگ آمیزی قوی یالی برای $G$ موجود باشد. در این پایان نامه $\chi'_s(G)$ را برای هالین گراف مکعبی کامل و گراف های دوبخشی $S_m(k,l)$ و $S_m(k,l,\lambda)$ مورد مطالعه قرار می دهیم. برولدی و کویین حدسی ارایه دادند مبنی بر این که برای هر گراف دوبخشی $G$، $\Delta_1\Delta_2$ کران بالایی برای $\chi'_s(G)$ است که در آن $\Delta_1$ و $\Delta_2$ ماکزیمم درجات در میان رئوس دو بخش گراف هستند. نکپرسیت درستی این حدس را در حالت $\Delta_1=2$ نشان داد. در اینجا این حدس و اثبات نکپرسیت را بررسی می کنیم. سپس کران های بالایی برای اندیس رنگی قوی سه نوع حاصل ضرب گراف ها برحسب اندیس رنگی قوی هرکدام از گراف ها و به طور خاص اندیس رنگی قوی تورهای $d$ بعدی، برخی تورهای چنبره ای و ابر مکعب های تعمیم یافته را به دست می آوریم. رنگ آمیزی دیگری که در اینجا آن را مد نظر قرار می دهیم، رنگ آمیزی قوی یالی مجاورتی گراف است. یک رنگ آمیزی قوی یالی مجاورتی گراف $G$ یک رنگ آمیزی یالی سره از گراف $G$ است به طوری که مجموعه رنگ یال های منتهی به رئوس مجاور گراف مساوی نباشند. کوچکترین عدد $\chi'_a(G)$ را که با آن تعداد رنگ، یک رنگ آمیزی قوی یالی مجاورتی برای گراف $G$ موجود باشد، عدد رنگی قوی یالی مجاورتی گراف نامیده می شود. ژانگ و همکارانش مقدار $\chi'_a(G)$ را برای برخی گراف های خاص به دست آوردند و نیز حدس زدند $\chi'_a(G) \leq \Delta + 2$. در این جا به مطالعه این حدس پرداخته و ثابت می کنیم این حدس برای همه ی گراف های دو بخشی و گراف هایی که در آن ها $\Delta(G) = 3$، برقرار می باشد.

کلمات کلیدی: گراف، عدد رنگی، اندیس رنگی قوی، عدد رنگی قوی یالی مجاورتی

**فهرست مطالب**

**عنوان** **صفحه**

# فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

# فهرست جداول

**عنوان** **صفحه**

## فهرست شکل ها

**عنوان** **صفحه**

# فهرست شکل ها

**عنوان** **صفحه**

# فهرست علائم و اختصارات

| | |
|---|---|
| مجموعه اعداد طبیعی | $\mathbb{N}$ |
| مجموعه اعداد صحیح | $\mathbb{Z}$ |
| مجموعه اعداد حقیقی | $\mathbb{R}$ |
| ترتیب جزئی | $\prec$ |
| ماکزیمم عدد در میان مجموعه درجات رئوس گراف G | $\Delta(G)$ |
| مجموعه رئوس گراف G | $V(G)$ |
| مجموعه یال های گراف G | $E(G)$ |
| همسایگی رأس v | $N(v)$ |
| درجه رأس v | $\deg v$ |
| مکمل گراف G | $\bar{G}$ |
| زیرگراف رأس القایی توسط S | $< S >$ |
| گراف دوبخشی زیر مجموعه | $G(X, Y)$ |
| مسیر از مرتبه n | $P_n$ |
| دور از مرتبه n | $C_n$ |
| گراف کامل از مرتبه n | $K_n$ |

# فهرست علائم و اختصارات

| | |
|---|---|
| گراف دوبخشی کامل m و n رأسی | $K_{m,n}$ |
| حاصل ضرب کارتزین گراف های G و H | $G \square H$ |
| حاصل ضرب کرونکر گراف های G و H | $G \times H$ |
| حاصل ضرب قوی گراف های G و H | $G \boxtimes H$ |
| گراف تور d بعدی | $M_{l_1,l_2,...,l_d}$ |
| گراف تور d بعدی از مرتبه n | $M_n^d$ |
| گراف تور چنبره ای d بعدی | $TM_{l_1,l_2,...,l_d}$ |
| گراف تور چنبره ای d بعدی از مرتبه n | $TM_n^d$ |
| گراف ابر مکعب تعمیم یافته d بعدی | $K_n^d$ |
| گراف ابر مکعب تعمیم یافته d بعدی از مرتبه۲ | $H_d$ |
| رنگ یال uv | $c(uv)$ |
| مجموعه ی رنگ یال های منتهی به رأس u | $S(u)$ |
| عدد رنگی رأسی گراف G | $\chi(G)$ |
| عدد رنگی یالی گراف G | $\chi'(G)$ |
| اندیس رنگی قوی یالی گراف G | $\chi'_s(G)$ |
| اندیس رنگی قوی مجاورتی گراف G | $\chi'_a(G)$ |

# فصل اول: تعاریف

## ۱-۱ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف، مثال‌ها و قضایایی مـی‌پـردازیم کـه در فـصول آینـده از آن‌هـا اسـتفاده خواهیم کرد. بیشتر این تعاریف از کتاب های « نظریه الگوریتمی و کاربردی گراف ها » نوشته چارتراند و «نظریه گراف» نوشته باندی و مورتی آورده شده اند.

در بخش اول این فصل تعاریفی از گراف، زیر گراف و برخی خصوصیات آن ها به همراه قضایایی آورده شده.

در بخش دوم به معرفـی برخـی گـراف هـای خـاص ماننـد درخـت، دور، گـراف کامـل، چنـد گـراف دوبخشی،گراف های هالین و گراف $K(n,m)$ می پردازیم.

در بخش سوم سه نوع حاصل ضرب گراف ها و برخی گراف های خاص حاصل از این سه حاصل ضرب را معرفی می کنیم.

و بالاخره در آخرین بخش این فصل تعاریفی برای چند نوع رنگ آمیزی یالی و رأسی گراف هـا ارایـه می دهیم.

## ۱ـ۲ گراف و زیرگراف

تعریف ۱ـ۱: گراف$G$،  یک جفت منظم $(V(G),E(G))$ می باشد، که در آن $V(G)$ یک مجموعه از عناصری به نام رأس و $E(G)$ مجموعه ی عناصری به نام یال می باشد با یک تابع $\psi_G$ که هر یال $G$ را به یک جفت (نه لزوماً متمایز) از رئوس $G$ می برد.

تعریف ۱ـ۲: اگر $e = uv$ یالی از گراف $G$ باشد، گوییم $u$ و $v$ در $G$ مجاورند، یال $e$ دو رأس $u$ و $v$ را به هم متصل می‌کند و یال $e$ منتهی به یال‌های $u$ و $v$ است.

تعریف ۱ـ۳: اگر در گرافی دو رأس با بیش از یک یال به هم وصل شده باشند، یال‌هایی که آن دو رأس را به هم وصل می‌کنند، یال‌های موازی نامیده می‌شوند. یالی که یک رأس را به خودش وصل می‌کند، طوقه نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۴: گراف ساده گرافی است که یال موازی و طوقه نداشته باشد.

در سرتاسر این نوشتار منظور ما از گراف، گراف ساده است.

تعریف ۱ـ۵: تعداد رأس‌ها در گراف $G$ را مرتبه آن و تعداد یال‌ها را اندازه گراف می‌نامیم. مرتبه گراف $G$ را با $\left|V(G)\right|$ و اندازه آن را با $\left|E(G)\right|$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱ـ۶: برای یک رأس $v$ از گراف $G$ همسایگی $N(v)$ (یا $N_G(v)$) به صورت زیر تعریف می‌شود: $N(v)=\{u\in V(G)|uv\in E(G)\}$

و درجه $v$ که آن را با $\deg v$ (یا $\deg_G v$) نشان می‌دهیم برابر تعداد رئوسی است که در مجاورت $v$ هستند یعنی: $\deg v=\left|N(v)\right|$.

تعریف ۱ـ۷: گراف $\bar{G}$ مکمل گراف $G$، گرافی است که $V(G)=V(\bar{G})$ و $uv$ یک یال از $\bar{G}$ است اگر و تنها اگر $uv$ یالی در $G$ نباشد.

تعریف ۱ـ۸: یک گشت در گراف $G$ یک دنباله $v_0 v_1 \dots v_k$ از رئوس است به‌طوری که برای $i = 1,2,\dots,k$ ، $v_{i-1}v_i$ یک یال از گراف باشد و نیز می‌گوییم طول گشت برابر $k$ است. یک مسیر یک گشت است که رأس تکراری ندارد و یک دور ، یک گشت $v_0 v_1 \dots v_n$ است که $n \geq 3$ ، $v_0 = v_n$ و همچنین $n$ رأس $v_0, v_1, \dots, v_n$ مجزا باشند.

تعریف ۱ـ۹: دور هامیلتونی دوری است که از همه‌ی رئوس گراف بگذرد. گراف $G$ هامیلتونی نامیده می‌شود اگر یک دور هامیلتونی داشته باشد.

تعریف ۱ـ۱۰: اگر $u$ و $v$ رئوسی در گراف $G$ باشند، می‌گوییم $u$ به $v$ مرتبط است اگر $G$ یک $u - v$ مسیر داشته باشد.

تعریف۱ـ۱۱: گراف $G$ همبند است اگر برای هر جفت $u$ و $v$ از رئوس $G$، $u$ به $v$ مرتبط باشد گرافی که همبند نیست، ناهمبند نامیده می‌شود. بنابراین، گراف ناهمبند $G$ دارای دو رأس $u$ و $v$ است به‌طوری که هیچ $u - v$ مسیری وجود نداشته باشد.

تعریف ۱ـ۱۲: زیر گراف $H$ از گراف $G$ یک مؤلفه از $G$ است هرگاه $H$ یک زیرگراف همبند باشند.

تعریف ۱ـ۱۳: اگر یک یال از گراف $G$ یک مؤلفه باشد آن را یال تنها می‌نامیم و به همین ترتیب اگر یک رأس از گراف $G$ یک مؤلفه باشد آن را یک رأس تنها می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۱۴: رأس $v$ در گراف $G$ یک رأس برشی نامیده می‌شود اگر تعداد مؤلفه‌های $G$-$v$ از تعداد مؤلفه‌های $G$ بیشتر باشد. به همین ترتیب یال $e$ در گراف $G$ یک پل نامیده می‌شود اگر تعداد مؤلفه‌های $G$-$e$ از تعداد مؤلفه‌های $G$ بیشتر باشد.

تعریف ۱ـ۱۵: گراف $G$، $r$- منتظم یا منظم از درجه $r$ گفته می‌شود، اگر هر رأس گراف $G$ از درجه $r$ باشد. یک گراف منتظم گفته می‌شود اگر مقدار صحیح غیرمنفی $r$ وجود داشته باشد که گراف، $r$-منتظم باشد.

تعریف ۱ـ۱۶: زیر گراف‌های ۱- منتظم فراگیر گراف $G$، ۱- عامل نامیده می‌شوند.

تعریف ۱ـ۱۷: یک جورسازی در گراف $G$ زیرمجموعه‌ی $M$ از $E(G)$ است به گونه‌ای که یال‌های $M$ دارای انتهای مشترک نباشند.

تعریف ۱ـ۱۸: فرض کنید $S$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از رئوس گراف $G$ باشد. زیرگراف القایی توسط $S$ بزرگترین زیرگراف $G$ با مجموعه رئوس $S$ است و آن را با نماد $<S>$ نمایش می‌دهیم. یعنی $<S>$ دقیقاً شامل آن یال‌هایی از $G$ است که دو رأس در $S$ را به هم وصل می‌کنند.

تعریف ۱ـ۱۹: یک زیرگراف $H$ از گراف $G$ یک زیرگراف القایی ـ رأسی یا یک زیر گراف القایی نامیده می‌شود اگر بتوان زیرمجموعه‌ای ناتهی مانند $S$ از رأس‌های $G$ به قسمی یافت که $H =< S >$.

تعریف ۱ـ۲۰: جورسازی القایی یک جورسازی است که مجموعه رئوس آن یک زیرگراف القایی باشد یعنی اگر در گراف $G$ یال‌های $uv$ و $wz$ یال‌هایی از جورسازی باشند جفت‌های $uw$، $uz$، $vw$ و $vz$ هیچکدام یال گراف $G$ نباشند.

قضیه تات۱-۱: گراف غیربدیهی $G$ دارای ۱- عامل است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه سره $S$ از $V(G)$ ، تعداد مؤلفه‌های فرد $G-S$ بیشتر از $|S|$ نباشد.

قضیه پترسون ۱ـ۲: هر گراف مکعبی بدون پل شامل ۱- عامل است.

## ۱ـ۳ گراف‌های خاص

در این بخش چند گراف خاص را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱ـ۲۱: یک گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامیم و رئوس درجه ۱ آن را برگ می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۲۲: یک گراف (همبند یا ناهمبند) بدون دور را جنگل می‌نامیم.

تعریف ۱ـ۲۳: یک گراف از مرتبه $P$ که هر دو رأس مجزای آن مجاور هستند، یک گراف کامل نامیده می‌شود و آن را با نماد $K_p$ نمایش می‌دهیم.