بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

آشوب مقاوم در خانواده نگاشت های یک پارامتری که در بازه های حقیقی تعریف شده اند

نگارش
فاطمه قشلاقی

استاد راهنما: خانم دکتر منیره اکبری

استاد مشاور: آقای عبدالرضا اسکویی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

شهریور ۱۳۹۱

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **فاطمه قشلاقی** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/ رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم‌سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.

نام و نام‌خانوادگی دانشجو
امضاء

تهران- لویزان- کد پستی ۱۶۷۸۸ - صندوق پستی ۱۶۳- ۱۶۷۸۵ تلفن ۰۶۰-۲۲۹۷۰۰۶۰-۹ (داخلی ۲۳۴۷)
نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی sru@sru.ac.ir

چکیده

در این جا مفهوم آشوب مقاوم با ارائه ی مثال های متعدد مورد بررسی قرار می گیرد. ثابت می شود تمام اعضای یک خانواده نگاشت های هموار یک کوهانی با آشوب مقاوم با هم مزودج توپولوژیک هستند. اما در مورد نگاشت های چند کوهانی این مطلب برقرار نیست. و به طور کلی هذلولوی بودن در خانواده نگاشت های نوعی چگال است.

کلید واژه‌ها: آشوب مقاوم ، تزویج توپولوژیک ، نگاشت یک کوهانی ، ناوردای نیدینگ.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

۱ آشوب ۱

۱.۱ تعاریف ۲

۲ آشوب مقاوم ۹

۱.۲ تعاریف ۱۰

۲.۲ مثال ها ۱۳

۳.۲ مثالی از یک خانواده با آشوب مقاوم ۱۵

۳ قضایایی مرتبط با آشوب مقاوم ۲۶

۱.۳ تعاریف ۲۷

۲.۳ قضایا ۲۹

۳.۳ مثال از خانواده نگاشت هایی با درجه ی بالاتر ۳۶

۴ مجموعه های هذلولوی ۳۸

۱.۴ تعاریف ۳۹

۲.۴ قضایا ۴۰

۳.۴ نتیجه ۵۷

مقدمه

آشوب پدیده ای است که در بسیاری از سیستم های دینامیکی رخ می دهد . با بررسی دینامیک یک سیستم می توان امکان رخ دادن این پدیده را در آن بررسی نمود. اصطلاح آشوب برای اولین بار در سال ۱۹۷۵ ، توسط Li و $Yorke$ معرفی شد.[۹] پس از آن تعاریف مختلفی برای آشوب ارائه شد. تعریف دوینی از آشوب در تحقیقات بسیاری مورد استفاده قرار می گیرد.[۴]
اگر به بررسی دینامیک یک خانواده از نگاشت ها بپردازیم ، ممکن است در برخی از این خانواده ها مشاهده شود، در یک همسایگی از فضای پارامتر این خانواده، به ازای هر پارامتر در آن همسایگی، نگاشت ها همچنان آشوبناک هستند. به عبارت دیگر در آن بازه، آشوب در این خانواده از نگاشت ها مقاوم است[۱].
اصطلاح آشوب مقاوم برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ مطرح شد[۳]. در همان مقاله حدس زده شد آشوب مقاوم روی خانواده نگاشت های هموار رخ نمی دهد. اما در [۱] مثالی از یک خانواده از نگاشت های هموار ارائه شد که دارای آشوب مقاوم هستند. همچنین توانستند یک مولد کلی برای چنین خانواده هایی معرفی کنند.[۲]. آن چه در ادامه ذهن را به خود مشغول می سازد این است که آیا تمام نگاشت های یک خانواده با آشوب مقاوم، با هم مزدوج توپولوژیک هستند؟
$Demelo$ و $V.Strien$ در [۵] پس از بررسی مثال هایی که در متن خواهید دید، به بررسی این سوال پرداختند که در این جا به بیان آن می پردازیم.
در فصل نخست با تعریف آشوب و نگاهی به برخی نگاشت های آشوبناک، زمینه ی ورود به مبحث اصلی را فراهم می نماییم. در فصل دوم به بررسی برخی از خانواده های سیستم های دینامیکی با آشوب مقاوم پرداخته و تلاش می کنیم خانواده ای از نگاشت ها با آشوب مقاوم ارائه دهیم[۱].
در فصل سوم با ارائه ی قضایایی بر آشوب مقاوم به بررسی یک سؤال اساسی، یعنی وجود تزویج توپولوژیکی میان نگاشت های این خانواده ها می پردازیم[۵]. و در نهایت در فصل چهارم از دیدی کلی تر به سیستم های دینامیکی می نگریم و با ارائه ی قضایایی نتیجه می گیریم هذلولوی بودن در سیستم های دینامیکی چگال است[۵]، [۶]، [۷] و [۸].

فصل ۱

آشوب

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱ *نقطه ی ثابت:*
فرض کنید $I = [0, 1]$ و $f : I \longrightarrow I$.
نقطه ی ثابت x_0 در شرط $f(x_0) = x_0$ صدق می کند.

توجه داشته باشید که $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$ و به همین ترتیب $f^n(x_0) = x_0$.
بنابراین مدار یک نقطه ی ثابت معادل توسط یک دنباله ی ثابت $x_0, x_0, \ldots, x_0$ نمایش داده می شود.
مثلا نقاط ۰, ۱ نقاط ثابت نگاشت $f(x) = x^2$ هستند.

تعریف ۲.۱ *نقطه ی تناوبی:*
نقطه ی x_0 یک نقطه ی تناوبی است است هرگاه $f^n(x_0) = x_0$ برای یک $n > 0$. کوچکترین nای که در این شرط صدق کند تناوب اولیه نامیده می شود.
توجه داشته باشید که اگر نقطه ی x_0 نقطه ی تناوبی از دوره تناوب n باشد آن گاه مدار x_0 دنباله ی تکراری از نقاط $x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0), x_0, f(x_0), \ldots$ خواهد بود. به عنوان مثال $x = 0$ برای نگاشت $f(x) = x^2 - 1$ یک نقطه ی تناوبی از دوره تناوب ۲ می باشد و مدار آن به صورت $0, -1, 0, -1, \ldots$ خواهد بود.
به طور کلی یافتن نقاط تناوبی برای یک نگاشت بسیار مشکل خواهد بود. مثلا نگاشت $f(x) = x^2 - 2$ را در نظر بگیرید. برای یافتن نقاط تناوبی با دوره تناوب ۵ این نگاشت بایستی به حل معادله ی $f^5(x) - x = 0$ بپردازیم. این معادله یک چند جمله ای از درجه ی $2^5 = 32$ خواهد بود که حل دقیق چنین معادله ای ناممکن خواهد بود.
توجه داشته باشید که اگر نقطه ی تناوبی x_0 دارای دوره تناوب k باشد، $2k$ و ... و nk نیز دوره های تناوب x_0 خواهند بود.
همچنین اگر دوره تناوب x_0، k باشد آن گاه هر نقطه ی دیگری که در مدار x_0 قرار می گیرد دارای دوره تناوب k خواهد بود.

تعریف ۳.۱ *فرض کنید f یک همسانریختی باشد. مجموعه نقاط $O^{+}(x)=x,f(x),f^{۲}(x),\ldots$، مدار پیشرو x نامیده می شود.*
$O^{-}(x)=x,f^{-۱}(x),f^{-۲}(x),\ldots$ مدار پسرو x می باشد.

استفاده از کلمه ی آشوب در سیستم های دینامیکی ابتدا در سال ۱۹۷۵ توسط Li و $Yorke$ صورت گرفت[۹]. آن ها نشان دادند اگر تابع پیوسته ی f روی خط حقیقی دارای نقطه تناوبی با دوره تناوب ۳ باشد، آنگاه مجموعه ی ناوردای S تحت f وجود دارد که به ازای هر $p,q\in S$ که $p\neq q$، داریم:

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}|f^{n}(p)-f^{n}(q)|>۰,\liminf_{n\longrightarrow\infty}|f^{n}(p)-f^{n}(q)|=۰$$

و نگاشت هایی که دارای خاصیت بالا بودند را آشوبناک نامیدند.
اما ما دنباله رو تعریفی خواهیم بود که دوینی از آشوب ارائه داد.

تعریف ۴.۱ *فرض کنید V یک مجموعه باشد. نگاشت $f:V\longrightarrow V$ آشوبناک خواهد بود هرگاه :*

۱− f دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه باشد.

۲− f ترایای توپولوژیک باشد.

۳− نقاط تناوبی f روی V چگال باشند.

تعریف ۵.۱ *نگاشت $f:J\longrightarrow J$ دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است هرگاه بتوان $\delta>۰$ به گونه ای یافت که برای هر $x\in J$ و هر همسایگی از آن، بتوان یک نقطه y در همان همسایگی و یک $n\geq o$ یافت که*

$$|f^{n}(x)-f^{n}(y)|>\delta$$

در واقع f وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد هرگاه نقاطی در نزدیکی x سرانجام تحت تکرارهای متوالی حداقل به اندازه δ از تکرار متناظر x دور شوند. لازم نیست هر نقطه ای در نزدیکی x تحت

تکرار از تکرار متناظر x دور شود اما بایستی در هر همسایگی از x، حداقل یک نقطه با این شرایط یافت شود.

تعریف ۶.۱ *نگاشت $f: J \longrightarrow J$ ترایای توپولوژیک خواهد بود هرگاه به ازای هر دو مجموعه ی باز $U,V \subset J$، عدد $k > 0$ به گونه ای یافت شود که $f^k(U) \cap V \neq \phi$.*

به طور مستقیم یک نگاشت متعدی توپولوژیک، دارای نقاطی است که تحت تکرار از یک همسایگی به همسایگی دیگر حرکت می کنند و در ادامه این سیستم دینامیکی قابل تفکیک به دو مجموعه ی باز مجزا که تحت نگاشت ناوردا هستند، نمی باشد.

مثال ۷.۱ *نگاشت $\begin{matrix} f: S^1 \longrightarrow S^1 \\ f(\theta) = 2\theta \end{matrix}$ آشوبناک است.*

۱– همانگونه که از ضابطه ی نگاشت پیداست، فاصله ی بین هر دو نقطه تحت هر تکرار دو برابر می شود. بنابراین f وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد.

۲– مشاهده می کنید که هر کمان کوچک در دایره ی S^1 سرانجام تحت تکرار f^k، کل دایره ی S^1 را فرا می گیرد و طبیعی است که هر کمان دیگری را هم در بر بگیرد. پس f ترایای توپولوژیک نیز هست.

۳– بایستی نشان دهیم در هر بازه ی دلخواه کوچک به طول δ، حداقل یک نقطه ی تناوبی وجود دارد. ریشه معادله ی $f^n(\theta) = \theta$، $\theta = 2k\pi 2^n - 1$ می باشد. با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، حتما حداقل یک نقطه ی تناوبی داخل هر بازه به طول ϵ یافت خواهد شد چرا که به ازای هر n، $2^n - 1$ نقطه روی محیط دایره قرار خواهند گرفت. لذا n را به گونه ای انتخاب می کنیم که

$$2^n - 1 > 2\pi\epsilon$$
$$2^n > 2\pi\epsilon + 1$$
$$n > \log_2(2\pi\epsilon + 1)$$

تعریف ۸.۱ *فرض کنید $f: A \longrightarrow A$ و $g: B \longrightarrow B$ دو نگاشت باشند. گوییم f و g مزدوج توپولوژیک هستند هرگاه یک همسانریختی $h: A \longrightarrow B$ موجود باشد به گونه ای که $hof = goh$.*

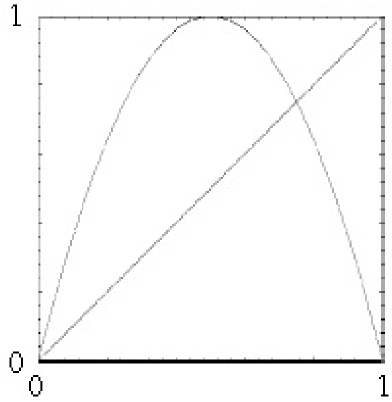
همسانریختی h یک تزویج توپولوژیک نامیده می شود.

نگاشت هایی که مزدوج توپولوژیک هستند دارای دینامیک یکسان هستند. دارای تعداد یکسان نقاط ثابت و تناوبی، مدارهای تناوبی و مجانبا تناوبی و ... هستند.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array} \tag{۱.۱}$$

مثال ۹.۱ *نگاشت لاجستیک با پارامتر ۴ را در نظر بگیرید.*

$$F_4 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$F_4(x) = 4x(1-x)$$



شکل ۱.۱: $F_4(x) = 4x(1-x)$

این نگاشت روی $I = [0,1]$ آشوبناک است.

نگاشت $\begin{array}{c} g : S^1 \longrightarrow S^1 \\ g(\theta) = 2\theta \end{array}$ را در نظر بگیرید.

سپس نگاشت

$$h_1 : S^1 \longrightarrow [-1,1]$$
$$h_1(\theta) = \cos\theta$$

را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$q(x) : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$$
$$q(x) = 2t^2 - 1$$

آنگاه می بینید که داریم

$$h_1 o g(\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = q o h_1(\theta)$$

مشاهده می کنید که $h_۱$، g و q را با یکدیگر مرتبط می سازد و نمودار

$$\begin{array}{ccc} S^۱ & \xrightarrow{g} & S^۱ \\ {\scriptstyle h_۱}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_۱} \\ [-۱,۱] & \xrightarrow{q} & [-۱,۱] \end{array} \qquad (۲.۱)$$

جابجایی می باشد.

حال نگاشت

$$h_۲ : [-۱,۱] \longrightarrow [۰,۱]$$
$$h_۲(t) = \frac{۱}{۲}(۱-t)$$

را در نظر بگیرید.
می بینید که داریم

$$F_۴ o h_۲(t) = ۴(\frac{۱}{۲}(۱-t))(۱-(\frac{۱}{۲}(۱-t)) = (۱-t)(۱+t) = ۱-t^۲$$
$$h_۲ o q(t) = h_۲(۲t^۲-۱) = \frac{۱}{۲}(۱-(۲t^۲-۱)) = ۱-t^۲$$

همین طور که می بینید $h_۲$، q و $F_۴$ را با یکدیگر مرتبط می سازد و نمودار

$$\begin{array}{ccc} [-۱,۱] & \xrightarrow{q} & [-۱,۱] \\ {\scriptstyle h_۲}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_۲} \\ [۰,۱] & \xrightarrow{F_۴} & [۰,۱] \end{array} \qquad (۳.۱)$$

نیز جابجایی می باشد.

و در نهایت نمودار

$$\begin{array}{ccc} S^۱ & \xrightarrow{g} & S^۱ \\ {\scriptstyle h_۱}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_۱} \\ [-۱,۱] & \xrightarrow{q} & [-۱,۱] \\ {\scriptstyle h_۲}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_۲} \\ [۰,۱] & \xrightarrow{F_۴} & [۰,۱] \end{array} \qquad (۴.۱)$$

جابجایی خواهد بود.

۱− F_4 وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد.

توجه داشته باشید از آنجا که $h_2oh_1(x)$ پیوسته است، برای هر همسایگی U از $x \in I$، یک کمان $\hat{U}$ در S^1 وجود دارد به گونه ای که $g^n(\hat{U})$، تمام S^1 را می پوشاند. از آنجا که $h_2oh_1(x)$ پوشاست، $F_4(U)$ نیز کل بازه ی I را می پوشاند. بنابراین نقاطی در هر همسایگی از x وجود دارند که حداقل به اندازه ی $\delta = \frac{1}{2}$ تحت F_4^n از نقطه متناظر در مدار x دور شوند.

۲− F_4 ترایای توپولوژیک است.

برای هر دو مجموعه ی باز U و V در I،می توان کمان های باز $\hat{U}$ و $\hat{V}$ را از S^1 به گونه ای انتخاب نمود که تحت $h_2oh_1(x)$ به U و V بروند. از آنجا که k ای یافت می شود که $g^k(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \phi$ در نتیجه خواهیم داشت

$$F_n^k \cap V \neq \phi$$

۳− از آنجا که نقاط تناوبی g در S^1 چگال هستند، نقاط تناوبی F_4 نیز در I چگال خواهد بود.

ممکن است در ابتدا این سؤال مطرح شود که طبق نمودار می توان از تزویج توپولوژیک F_4 و g آشوبناک بودن F_4 را نتیجه گرفت. اما همانگونه که می بینید h_1 یک به یک نیست و همسانریختی نبودن h_2oh_1 مانع از این می شود که نتیجه بگیریم این دو نگاشت مزدوج توپولوژیک است.

فصل ۲

آشوب مقاوم

برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ مفهوم آشوب مقاوم مطرح شد. تعریفی که برای این مفهوم به کار برده شد، عدم وجود پنجره های تناوبی و بیش از یک رباینده در یک همسایگی از فضای پارامتر بود. بدین معنا که بتوان در یک خانواده از نگاشت ها، یک همسایگی در فضای پارامتر آن یافت که به ازای هر پارامتر در این همسایگی، نگاشت آشوبناک باقی بماند.

۱.۲ تعاریف

تعریف ۱.۲ *فرض کنید مجموعه ی $N \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه ی بسته باشد. N ناحیه ی تله ای نگاشت f است اگر $f(N) \subset int(N)$.*

$f(N)$ بسته است و $f(N) \subset N$. لذا برای هر n مجموعه ی $f^n(N)$ نیز بسته است. بنابراین

$$\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} f^n(N)$$

بسته است.

Λ مجموعه نقاطی است که تحت هر تکرار، هموار مدار پیشرو و پسرو آن ها در N باقی می ماند.

Λ یک رباینده نام دارد.

تعریف ۲.۲ *گوییم یک رباینده آشوبناک مقاوم است هر گاه یک همسایگی در فضای پارامترش موجود باشد که در این همسایگی هیچ رباینده ی تناوبی ای وجود نداشته باشد و رباینده ی آشوبناک در این همسایگی منحصر به فرد باشد.*

همان طور که مشاهده نمودید، نگاشت هموار لاجستیک با پارامتر ۴ دارای آشوب می باشد. اما با تغییر کوچکی در این پارامتر، برای مقادیر بزرگتر از ۴ آشوب روی بازه ی I از بین خواهد رفت. به عبارت دیگر آشوب در این خانواده ار نگاشت ها مقاوم نیست.

تعریف ۳.۲ *مشتق شوارتزی:*
فرض کنید $f: I \longrightarrow I$ یک نگاشت $C^{۳}$ و $Df(x) \neq ۰$ باشد. مشتق شوارتزی f در x به صورت زیر تعریف می شود.

$$Sf(x) = D^{۳}f(x)Df(x) - \frac{۳}{۲}(D^{۲}f(x)Df(x))^{۲}$$

برای مثال تابع لاجستیک با پارامتر ۴ را در نظر بگیرید.

$$SF_{۴}(x) = -۶(۱ - ۲x)^{۲} < ۰$$

گزاره ۴.۲ *فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله ای باشد. اگر تمام ریشه های $P'(x)$ حقیقی و متمایز باشند آن گاه $SP(x) < ۰$.*

فرض کنید $P'(x) = \prod_{i=۱}^{N}(x - a_i)$ باشد که a_i ها متمایز و حقیقی هستند. آن گاه

$$P''(x) = \sum_{j=۱}^{N} P'(x)x - a_j = \sum_{j=۱}^{N} \prod_{i=۱}^{N}(x - a_i)x - a_j$$
$$P'''(x) = \sum_{j=۱}^{N} \sum_{j\neq k=۱}^{N} \prod_{i=۱}^{N}(x - a_i)(x - a_j)(x - a_k)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$SP(x) = \sum_{j\neq k} ۱(x - a_j)(x - a_k) - \frac{۳}{۲}(\sum_{j=۱}^{N} ۱x - a_j)^{۲}$$
$$= \frac{-۱}{۲} \sum_{j=۱}^{N}(۱x - a_j)^{۲} - (\sum_{j=۱}^{N} ۱x - a_j)^{۲} < ۰.$$

گزاره ۵.۲ *فرض کنید f و g دو نگاشت $C^{۳}$ باشند و $Df(x) \neq ۰$ و $Dg(x) \neq ۰$. اگر $Sf < ۰$ و $Sg < ۰$ باشند آن گاه $S(fog) < ۰$.*

با به کار بردن قاعده ی زنجیری در محاسبه ی مشتقات دوم و سوم خواهیم داشت

$$(fog)''(x) = f''(g(x)).(g'(x))^{۲} + f'(g(x)).g''(x).$$
$$(fog)'''(x) = f'''(g(x)).(g'(x))^{۳} + ۳f''(g(x)).g''(x)g'(x) + f'(g(x)).g'''(x)$$

مهم ترین نتیجه ای که از گزاره ی بالا می توان گرفت این است که اگر $Sf < ۰$ آن گاه $Sf^{n} < ۰$.

قضیه ۶.۲ *قضیه سینگر:*
فرض کنید $f: I \longrightarrow I$ یک نگاشت $C^{۳}$ با مشتق شوارتزی منفی باشد. در این صورت پهنه ی جذب بلافصل هر ربایننده ی تناوبی شامل یک نقطه ی بحرانی از نگاشت f و یا یک نقطه مرزی از بازه ی I می باشد.

فرض کنید p یک نقطه ی تناوبی جاذب با دوره تناوب n باشد که یک نقطه ی مرزی I در پهنه ی جذب بلافصل آن قرار دارد و T مولفه ی همبندی از پهنه ی جذب باشد که p در آن قرار دارد. در این صورت $f^n(T) \subset T$ و از آنجا که p یکی از نقاط مرزی I را جذب نمی کند داریم $f^n(\partial T) \subset \partial T$. اگر $x \in T$ وجود داشته باشد به طوری که $Df^n(x) = ۰$ در این صورت به ازای یک j، $۰ \leq j \leq n - ۱$، $f^j(x)$ یک نقطه ی بحرانی می باشد که به $f^j(T)$ تعلق دارد که پهنه ی جذب بلافصل $f^j(p)$ شامل این بازه می باشد و قضیه برای این حالت اثبات می شود.
حال فرض کنید برای هر $x \in T$، $Df^n(x) \neq ۰$. قرار دهید $m = n$ اگربرای هر $x \in T$، $Df^n(x) > ۰$ و $m = ۲n$ اگر برای هر $x \in T$ $Df^n(x) < ۰$. از آن جا که T یک مولفه از پهنه ی جذب $O(p)$ می باشد خواهیم داشت $Df^m(T) = T$ و برای هر $x \in T$، $Df^m(x) > ۰$ و برای $x \in \partial T$، $f^m(x) = x$. (اگر $x \in \partial T$ باشد آن گاه $Df^m(x) \geq ۱$ زیرا در غیر اینصورت x یک رباینده ی دوطرفه خواهد بود). با توجه به اصل می نیمم، به ازای هر $x \in T$ باید داشته باشیم $Df^m(x) > ۱$. که غیر ممکن است زیرا $Df^m(p) < ۱$. پس در پهنه ی جذب بلافصل مدار p بایستی یک نقطه ی بحرانی وجود داشته باشد.

اصل می نیمم.
فرض کنید $T = [a,b]$ و $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت با مشتق شوارتزی منفی باشد. اگر برای هر $x \in T$، $Df(x) \neq ۰$ باشد آن گاه برای هر x در (a,b) داریم

$$|Df^n(x)| > \min\{|Df^n(a)|, Df^n(b)|\}$$

فرض کنید $Sf < ۰$ باشد. اگر f دارای n نقطه ی بحرانی باشد بنا به قضیه ی سینگر f حداکثر دارای $n+۲$ مدار تناوبی جاذب خواهد بود. با استفاده از نکته ی بالا می توان نشان داد که نگاشت لاجستیک $F_\mu = \mu x(۱-x)$، برای هر μ می تواند حداکثر دارای یک مدار تناوبی جاذب باشد[۴].

فرض کنید $f : I \longrightarrow I$ یک تابع مشتق پذیر باشد. پایدار بودن نقاط ثابت سیستم دینامیکی (f,t) کاملا تحت تاثیر مشتقات نگاشت f می باشد. برای مثال اگر $x_۱$ یک نقطه ی ثابت نگاشت f باشد و $f'(x_۱) = a > ۱$، آن گاه مدار هر نقطه ی x در نزدیکی $x_۱$ تحت تکرارهای متوالی سرانجام از مدار $x_۱$ دور می شود.
حال نقطه ی تناوبی p با دوره تناوب k را در نظر بگیرید. در این جا بایستی مشتقات kامین تکرار نگاشت را در نقطه ی p در نظر بگیرید که با استفاده از قاعده ی زنجیری برابر است با حاصلضرب مشتقات k نقطه از مدار p. فرض کنید حاصلضرب این مشتقات برابر با $A > ۱$ باشد. آن گاه مدار هر نقطه x در همسایگی نقطه ی تناوبی $x_۱$ حداقل تحت k تکرار از نقطه ی $x_۱$ به اندازه ی A دور می شود. در واقع می توان تخمین زد تحت هر تکرار مدار x به اندازه ی $A^{\frac{۱}{k}}$ از $x_۱$ دور می

شود.
برای استفاده از این مقدار عددی به ارائه ی نمای لیاپانوف می پردازیم. عدد لیاپانوف برای تخمین میانگین فاصله ی نقاط مدار x از مدار x_1 که x در همسایگی x_1 قرار دارد بکار می رود و نمای لیاپانوف لگاریتم این عدد می باشد.
مثلا اگر عدد لیاپانوف یک نگاشت برای مدار یک نقطه ۲ باشد این بدان معناست که فاصله ی میان مدار x_1 و مدار نقطه ی x در همسایگی آن تحت هر تکرار به طور میانگین دو برابر می شود.
یعنی برای نقطه ی x_1 از دوره تناوب k داریم

$$|(f^k)'(x_i)| = |f'(x_1)||f'(x_2)|\dots|f'(x_k)| = 2^k$$

همان طور که می دانید یکی از خاصیت های مدارهای آشوبناک، وابستگی حساس آن ها به شرایط اولیه است. با توجه به آن چه در بالا ذکر شد، می توانیم بگوییم یک مدار آشوبناک مداری است که به یک نقطه ی تناوبی جذب نشود و نمای لیاپانوف آن مثبت باشد.
حال به ارائه ی تعریف دقیق نمای لیاپانوف می پردازیم.

تعریف ۷.۲ *فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک نگاشت C^1 باشد. برای هر $x_0\in\mathbb{R}$ نمای لیاپانوف x_0، با علامت $\lambda(x_0)$ به صورت زیر تعریف می شود:*

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\log(|(f^n)'(x_0)|)$$

که بنا به قاعده ی زنجیری برابر است با

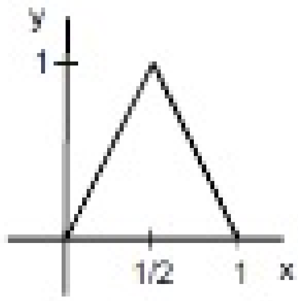
$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\Sigma_{n=0}^{\infty}\log(|f'(x_j)|),\qquad x_j=f^j(x_0)$$

۲.۲ مثال ها

مثال ۸.۲ *نگاشت خیمه را در نظر بگیرید:*

$$T_2(x)=\begin{cases} 2x & 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$$

اگر x_0 نقطه ای باشد که به ازای یک j، $x_j=T_2^j(x_0)=\frac{1}{2}$ آنگاه $\lambda(x_0)$ تعریف نشده است. که چنین نقاطی یک مجموعه ی شمارا را تشکیل میدهند و برای دیگر نقاط $x_0\in[0,1]$، به ازای هر j، $|f'(x_j)|=2$. لذا نمای لیاپانوف تمام این نقاط برابر با $\log(2)$ خواهد بود.



شکل ۱.۲: نگاشت خیمه

مثال ۹.۲ *نگاشت لاجستیک با پارامتر ۴ را در نظر بگیرید.*

$F_۴(x) = ۴x(۱ - x)$

برای آن دسته از نقاط $x. \in I$ که $x_j = F_۴^j(x.) = ۱۲$ برای یک j،

$$\log|F_۴'(x_j)| = \log|F_۴'(\tfrac{۱}{۲})| = \log(۰) = -\infty$$

لذا در این نقاط $\lambda(x.) = -\infty$ خواهد بود.
برای آن دسته از نقاط $x. \in I$ که هیچ گاه به مقادیر ۰ یا ۱ نخواهند رسید، از تزویج توپولوژیکی نگاشت با نگاشت خیمه که با همسانریختی $h(y) = \sin^۲(\frac{\pi y}{۲})$ به دست می‌آید استفاده می کنیم. از آنجا که h روی $[۰, ۱]$ نگاشتی مشتق پذیر است، بنابراین می توان $K > ۰$ را به گونه ای یافت که برای هر $y \in [۰, ۱]$ داشته باشیم $|h'(y)| < K$. همچنین در بازه ی باز $(۰, ۱)$ داریم $h'(y) > ۰$. پس برای هر $\delta > ۰$ کران K_δ به گونه ای وجود دارد که برای هر $h(y) \in [\delta, ۱ - \delta]$ داریم $k_\delta < |h'(y)|$. لذا برای $x.$ خواهیم داشت

$\lambda(x.) = \limsup_{n\longrightarrow\infty} ۱n\log(|(F_۴^n)'(x.)|)$
$= \limsup_{n\longrightarrow\infty} ۱n\log(|(hoT^n oh^{-۱})'(x.)|)$
$= \limsup_{n\longrightarrow\infty} ۱n[\log(|h'(y_n)|) + \log(|(T^n)'(y)|) + \log(|(h^{-۱})'(x.)|)]$
$\leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} ۱n(\log(k) + n\log(۲) + (h^{-۱})'(x.))$
$= \log(۲)$

از طرف دیگر برای این دنباله ها، می توانیم یک دنباله از اعداد صحیح n_j را به گونه ای انتخاب نماییم که به سمت بی نهایت میل کند و $x_{n_j} \in [\delta, ۱ - \delta]$ باشد. آن گاه با قرار دادن $y. = h^{-۱}(x.)$