
بسم الله الرحمن الرحیم

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** است که در شهریور ۱۳۹۲ در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر محمدتقی حیدری** و مشاورهٔ **دکتر حمید رضایی** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

توابع ویژه‌ی عملگرهای ترکیبی هذلولوی

استاد راهنما

دکتر محمدتقی حیدری

پژوهشگر

محبوبه پاسداری

شهریور ۱۳۹۲

توابع ویژه‌ی عملگرهای ترکیبی هذلولوی

به وسیلهٔ

محبوبه پاسداری

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

ریاضی محض

در تاریخ ۱۳۹۲/۰۶/۳۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما:	دکتر محمدتقی حیدری	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور:	دکتر حمید رضایی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور اول :	دکتر علی ایلون کشکولی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور دوم:	دکتر روح الله پروینیان زاده	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر حمید رضا رجبی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و ریاضی را آفرید تا شاید عقل آدمی کمی از این دنیای فانی فاصله بگیرد که

آدمی در عالم فانی نمی‌آید به دست　　　عالمی دیگر بباید ساخت وز نو آدمی

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدتقی حیدری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر حمید رضایی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

محبوبه پاسداری

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

مساله‌ی زیرفضای پایا (ISP) برای عملگرهای فضای هیلبرت، معادل این سوال است که: آیا برای عملگرهای ترکیبی القایی روی فضای هاردی H^2 بوسیله‌ی خودریختی‌های هذلولوی از دیسک واحد، هر زیرفضای مینیمال ناصفر، یک بعدی است؟ (پدید آمده بوسیله یک بردار ویژه)

در این پایان نامه بعضی نتیجه‌های شناخته شده، فرضیه‌های ضعیف و اثبات‌های ساده آنها را بازگو می‌کنیم و همچنین نشان می‌دهیم:

اگر φ یک خودریختی هذلولوی با نقاط ثابت α و β باشد (هر دو باید روی مرز دایره‌ی واحد باشد) پس برای هر $f \in \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}H^2$، C_φ- زیرفضای دوری تولیدشده توسط f شامل تعدادی بردار ویژه‌ی مستقل است.

به طور دقیقتر، طیف نقطه‌ای تحدید C_φ به آن زیرفضا$(\sigma_P(C_\varphi |_{D_f}))$، دایره‌ی واحد را در یک مجموعه از اندازه‌ی مثبت قطع می‌کند، همچنین این تحدید C_φ، هذلولوی است.

تحت تحدید قویتر $f \in \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}H^p$ برای بعضی $p > 2$، طیف نقطه‌ای عملگر تحدیدشده، شامل یک طوق باز به مرکز مبدا است.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری iii

فصل ۱: تعاریف و مباحث مقدماتی ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ پیش‌نیازها ۳

۱-۳ زیر فضاهای پایا ۷

۱-۴ تخمین هسته‌ی پواسون ۱۰

۱-۵ فضای هاردی H^2 ۱۱

فصل ۲: عملگر ترکیبی القایی روی فضای هاردی H^2 به‌وسیله‌ی خودریختی هذلولوی ۱۸

۲-۱ عملگر ترکیبی ۱۸

۲-۲ طیف خودریختی هذلولوی عملگر ترکیبی ۲۱

۲-۳ ناحیه های تقرب ۲۷

فصل ۳: طیف عملگر ترکیبی C_φ ۲۹

۳-۱ نتیجه‌های اصلی ۲۹

فصل ۴: کاربردها و پیشنهادها ۳۷

۴-۱ خودریختی‌های هذلولوی غیرکانونی ۳۷

۴-۲ قضیه ی نوردگرین، روزنتهال و وینتروب ۴۰

۴-۳ دوری ۴۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۴۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۴۵

مراجع **۴۸**

فهرست علائم اختصاری

انتگرال پواسون تابع f .... $P[f]$

دایره‌ی واحد .... $\mathbb{T}$

دیسک باز واحد .... $\mathbb{U}$

زیرفضای بسته .... $\leq$

میدان اعداد مختلط .... $\mathbb{C}$

n امین ضریب فوریه‌ی تابع f .... $\hat{f}(n)$

ضرب داخلی متناظر با H .... $\langle .,. \rangle_H$

فضای توابع اندازه‌پذیر با نرم دو متناهی .... $L^2(\mu)$

فضای هاردی .... H^p

میدان اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$

معکوس عملگر T .... T^{-1}

میدان .... $\mathbb{F}$

نرم متناظر با H .... $\| . \|_H$

هسته‌ی T .... $KerT$

مساله زیرفضای پایا .... ISP

عملگر ترکیبی القاشده بوسیله‌ی خودریختی φ .... C_φ

طیف عملگر ترکیبی القایی .... $\sigma(C_\varphi)$

فضای تولیدشده‌ی خطی .... $span$

n امین تکرار ترکیبی φ .... φ_n

n امین تکرار ترکیبی φ^{-1} .... φ_{-n}

طوق باز به مرکز مبدا و شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 .... $A(R_1, R_2)$

مرز گوی واحد .... $\partial\mathbb{U}$
نیم صفحه‌ی راست .... Π^+
تبدیل خطی کیلی .... κ
مجموعه‌ی همه‌ی زیرفضاهای پایای عملگر T .... $Lat(T)$
مجموعه‌ی تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{U}$ .... $Hol(\mathbb{U})$
O بزرگ .... O
تقریبا همه جا .... ت.ه
کره‌ی ریمان .... $\hat{C}$
تابع حد شعاعی f .... f^*

فصل ۱

تعاریف و مباحث مقدماتی

در این فصل ابتدا تاریخچه‌ای از عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی H^2 و مساله‌ی زیرفضای پایا را بیان می‌کنیم و سپس به تعاریف مقدماتی و تعریف فضای هاردی می‌پردازیم.

۱-۱ مقدمه

بیش از ۲۰ سال پیش، نوردگرین [۱]، روزنتهال [۲] و وینتروب [۳]، یک مجموعه‌ی جالب از عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی H^2 و مساله‌ی زیرفضای پایا ساختند. "ISP" یعنی آیا هر عملگر روی فضای هیلبرت جداشدنی، یک زیرفضای پایای ناصفر دارد.(عملگر به معنی عملگر خطی کراندار است، زیرفضا به معنی منیفلد خطی بسته می‌باشد)
نوردگرین، روزنتهال و وینتروب ثابت کردند:
اگر φ یک خودریختی هذلولوی از دیسک واحد باز $\mathbb{U}$ و C_φ عملگر ترکیبی القاشده بوسیله‌ی φ روی فضای هاردی H^2 باشد، آنگاه
"ISP" یک جواب مشخص دارد اگر و تنها اگر هر زیرفضای پایای مینیمال ناصفر C_φ، یک بعدی باشد.

---

[۱] Nordgren

[۲] Rosenthal

[۳] Wintrobe

به آسانی دیده می‌شود، برای هر زیرفضای پایای مینیمال ناصفر V از عملگر T فضای هیلبرت، هر بردار غیرصفر $x \in V$، دوری است. به این معنی که فضای تولیدشده‌ی $\{T^n x : n = ۰, ۱, ۲, ...\}$ در V چگال است. بعلاوه اگر T معکوس‌پذیر باشد، این یک تحدید بر V است.

بنابراین برای T معکوس‌پذیر و V یک زیرفضای پایای مینیمال ناصفر از T و برای $۰ \neq x \in V$:

$$V = \overline{span}\{T^n x : n = ۰, ۱, ۲, ...\} = \overline{span}\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$$

نتیجه‌ی نوردگرین، روزنتهال و وینتروب پیشنهاد می‌کند که برای خودریختی هذلولوی φ، ویژگیهای تابع f در $H^۲\backslash\{۰\}$، چگونه بر خصوصیات عملگر $C_\varphi \mid D_f$ تاثیر میگذارد.

$$D_f := \overline{span}\{{C_\varphi}^n f : n \in \mathbb{Z}\} = \overline{span}\{f o \varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}) \qquad (۱-۱)$$

با تاکید روی این سوال که چه موقع طیف نقطه‌ای عملگر$C_\varphi \mid D_f$ ، غیرتهی است. در ادامه، والنتین ماتاچه[۴]، نتایجی جالب روی زیرفضاهای پایای مینیمال برای عملگرهای ترکیبی القایی خودریختی‌های هذلولوی بدست آورده، برای مثال او اثبات کرد که اگر یک زیرفضای پایای مینیمال برای چنین عملگری، بعدی بزرگتر از یک داشته باشد، آنگاه در هیچ یک از نقاط ثابت φ، هیچکدام از عضوهای غیرصفر این زیرفضا نمی‌توانند پیوسته و غیرصفر باشند(از آنجایی که φ یک خودریختی هذلولوی از دیسک واحد است، نقاط ثابت آن لزوما روی مرز دایره‌ی واحد قرار می‌گیرد)

چندین سال بعد، ویتالی چکلیر[۳] نتیجه‌های زیر را برای عملگر ترکیبی C_φ اثبات کرد:

اگر $f \in H^۲\backslash\{۰\}$ در نزدیکی یک نقطه ثابت از φ کراندار باشد و در نقاط ثابت دیگر به صفر میل کند آنگاه طیف نقطه‌ای $C_\varphi |_{D_f}$، شامل یک طوق باز به مرکز مبدا می‌باشد.

بعدا، ماتاچه نتایج مشابهی تحت تحدید شرایط بدست آورد.

در این پایان نامه بعد از تعدادی اثبات در فصل اول، در فصل دوم و سوم کار چکلیر و ماتاچه که اثبات‌های ساده‌تر از نتیجه‌های قویتر را نشان دادند بررسی می‌کنیم.برای نمونه

برای خودریختی هذلولوی φ از $\mathbb{U}$ با نقاط ثابت α و β (لزوما روی $\partial\mathbb{U}$) :

(a) اگر $f \in \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}H^{2}\backslash\{0\}$ آنگاه $\sigma_P(C_\varphi \mid D_f)$، دایره‌ی واحد را در یک مجموعه از اندازه‌ی مثبت، قطع می‌کند.

(b) اگر $f \in \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}H^{p}\backslash\{0\}$ برای بعضی $p > 2$، آنگاه $\sigma_p(C_\varphi \mid D_f)$، شامل یک طوق باز به مرکز مبدا می‌باشد.

۱-۲ پیش‌نیازها

تعریف ۱-۲-۱. فضاهای متری: فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، تابع حقیقی d نامنفی تعریف شده بر $X \times X$ را یک متر روی X نامیم، هرگاه برای هر $z, y, z \in X$ داشته باشیم:

(الف) $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y) = 0$ اگر وتنها اگر $x = y$

(ب) $d(x,y) = d(y,x)$

(پ) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (نابرابری مثلثی)

مجموعه‌ی X با متر d را یک فضای متری نامیده، و آن را با (X,d) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۲. (زیرفضا [۴]) . زیرمجموعه M از فضای برداری V را یک زیرفضای V می‌نامیم اگر M نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در V خود یک فضای برداری باشد. شرط لازم و کافی برای آن‌که $M \subset V$ یک زیرفضا باشد این است که هر وقت $x, y \in M$ و α اسکالر باشد آن‌گاه،$\alpha x \in M, x+y \in M$.

تعریف ۱-۲-۳. اگرفضای متری X،یک فضای برداری هم باشد، زیرفضای بسته H زیرفضایی است که نسبت به توپولوژی القا شده به وسیله‌ی متر H مجموعه‌ی بسته باشد.

تعریف ۱-۲-۴. اگر X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک نیم‌نرم تابعی مانند $p : X \longrightarrow [0,\infty)$ است که دارای خواص زیر می‌باشد.

(الف) برای هر y و x در X داریم $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

---

[۴] Subspace

(ب) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داریم: $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

(ج) $p(\circ) = \circ$

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط و $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

(الف) $\|x\| \geq \circ$ و $\|x\| = \circ$ اگر وتنها اگر $x = \circ$

(ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(پ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**نابرابری مثلثی**)

آنگاه $\|.\|$ را یک نرم بر X نامیم و X را یک فضای نرم‌دار گوییم.

تبصره ۱-۲-۶. *اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که d یک متر روی X است و لذا هر فضای نرم دار یک فضای متری است. d را متر تولید شده بوسیله‌ی نرم می‌نامیم.*

تعریف ۱-۲-۷. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه و $1 \leq p < \infty$ قرار می‌دهیم

$L^p(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ اندازه پذیر و f و $\int |f|^p d\mu < \infty\}$

تعریف ۱-۲-۸. برای هر $f \in L^p(\mu)$ به‌طوری‌که $1 \leq p < \infty$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف ۱-۲-۹. نامساوی هلدر: اگر p, q اعداد حقیقی نامنفی باشند به‌قسمی‌که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $f \in L^p(\mu)$ و $g \in L^q(\mu)$ آن‌گاه $fg \in L^1(\mu)$ و $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$ و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر اعداد نامنفی α،β وجود داشته باشند به‌قسمی‌که $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ تقریباً همه جا.

تعریف ۱-۲-۱۰. نامساوی مینکوفسکی: اگر f, g اعضای $L^p(\mu)$ باشند آن‌گاه

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

تعریف ۱-۲-۱۱. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $L^p(\mu)$ و $f \in L^p(\mu)$ گوییم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به f است (همگرایی در میانگین p) اگر $\|f_n - f\|_p \longrightarrow \circ$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ به طریق مشابه گوییم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $L^p(\mu)$ کوشی است اگر $\|f_n - f_m\|_p \longrightarrow \circ$ وقتی $m, n \longrightarrow \infty$

تعریف ۱-۲-۱۲. فضای متری (X,d) را کامل(تام) نامیم، هرگاه هر دنباله کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X به عضوی مانند $x \in X$ همگرا باشد.

گزاره ۱-۲-۱۳. *اگر X یک فضای نرم‌دار باشد آن‌گاه:*

(الف) *به‌ازای هر $x \in X$ مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته است .*

(ب) *تابع مجموع $X \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $x+y \longrightarrow (x,y)$ پیوسته است.*

(پ) *تابع ضرب $\mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $\alpha x \longrightarrow (\alpha,x)$ پیوسته است.*

تعریف ۱-۲-۱۴. فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ گوییم، هرگاه X نسبت به متر تولید شده بوسیله‌ی نرم، فضای متریک کامل باشد.

مثال ۱-۲-۱۵. اگر (X,Ω,μ) یک فضای اندازه و $1 \leq p < \infty$ آن‌گاه $L^p(X,\Omega,\mu)$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱-۲-۱۶. (عملگر خطی [5]) اگر H و K دو فضای نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند یک تبدیل خطی $T : H \longrightarrow K$ دارای خاصیت زیر می باشد

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

جایی‌که $x,y \in H$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$. تبدیل خطی T را کراندار گویند هرگاه عدد ثابت $c > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $\|Tx\| \leq c\|x\|$ برای هر $x \in H$. مجموعه همه تبدیل‌های خطی و کرندار از H در K را با $B(H,K)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $H = K$ آن‌گاه $B(H)$ بیان‌گر همه عملگرهای خطی کراندار از H در خودش هست.

گزاره ۱-۲-۱۷. *فرض کنیم X,Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد،آن‌گاه شرایط زیر با هم معادلند؛*

(الف) $T \in B(X,Y)$

(ب) *T در صفر پیوسته است، یعنی اگر $x_n \longrightarrow 0$ آن‌گاه $Tx_n \longrightarrow 0$*

(پ) *T در بعضی نقاط پیوسته است.*

---

[5] Linear OPerator

تعریف ۱-۲-۱۸. اگر $T \in B(X,Y)$ و $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ آن‌گاه

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

$$= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0\} = \inf\{c > 0 \|Tx\| \leq c\|x\| \text{ برای هر } x \in X\}$$

اثبات. به [۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۱۹. اگر X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد، یک نیم‌ضرب داخلی روی X عبارتست از یک تابع $u : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$ به‌طوری‌که برای هر α, β در $\mathbb{F}$، و x, y, z در X شرایط زیر برقرار باشد؛

(الف) $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x,z) + \beta u(y,z)$

(ب) $u(x,x) \geq 0$

(پ) $u(x,y) = \overline{u(y,x)}$

تبصره ۱-۲-۲۰. *یک نیم‌ضرب داخلی را ضرب داخلی می‌گویند اگر $u(x,x) = 0$ آن‌گاه $x = 0$*

تبصره ۱-۲-۲۱. *اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری H باشد، زوج $(H, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی مختلط و عدد مختلط $\langle x,y \rangle$ را برای هر $x, y \in H$ ضرب داخلی x, y می‌نامیم.*

قضیه ۱-۲-۲۲. نامساوی کوشی-مینکوفسکی - شوارتز *(CBS Inequality)*[۶] *اگر $\langle .,. \rangle$ نیم‌ضرب داخلی روی X باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in X$*

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$$

تساوی برقرار است اگر وتنها اگر اسکالرهای مانند $\alpha, \beta \neq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\langle \beta x + \alpha y, \beta x + \alpha y \rangle = 0$

اثبات. به [۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۲۳. در فضای ضرب داخلی H نرم x را با $\|x\|$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|x\|^2 = \langle x,x \rangle$$

---

[۶] cauchy-bunyakowsky-schwarz Inequality

نتیجه ۱-۲-۲۴. *اگر $\langle .,. \rangle$ یک نیم‌ضرب داخلی روی X و داشته باشیم $\|x\| \equiv \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$ آن‌گاه،*

(الف) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(نامساوی مثلثی)** [۷] *برای هر* $x, y \in X$.

(ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *برای هر* $\alpha \in \mathbb{F}$، $x \in X$

(ج) *اگر* $\langle .,. \rangle$ *یک ضرب داخلی باشد، آن‌گاه* $\|x\| = ۰$ *نتیجه می‌دهد* $x = ۰$.

اثبات. به [۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۲۵. **(فضای هیلبرت** [۸] **)** فضای برداری H روی $\mathbb{F}$ همراه با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ به‌طوری‌که نسبت به متر تولید شده بوسیله‌ی نرم، $d(x,y) = \|x-y\|$، یک فضای متریک کامل باشد را فضای هیلبرت می‌نامند.

مثال ۱-۲-۲۶. اگر $H = L^۲(\mu)$ و $\langle f,g \rangle = \int f\bar{g}d\mu$ آن‌گاه نسبت به نرم $\|f\|_۲ = \left(\int |f|^۲ d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای هیلبرت است.

مثال ۱-۲-۲۷. برای هر مجموعه دلخواه I فرض کنیم

$\ell^۲(I) = \{x : I \longrightarrow \mathbb{F}$ ،$i \in I$ که برای همه بجز تعدادی شمارش پذیر $x(i) = ۰\}$

و داشته باشیم

$$\sum_{i \in I} |x(i)|^۲ < \infty$$

اگر برای $x, y \in \ell^۲(I)$ ضرب داخلی

$$\langle x,y \rangle = \sum_i x(i)\overline{y(i)}$$

را تعریف کنیم، آن‌گاه $\ell^۲(I)$ همراه با این ضرب داخلی یک فضای هیلبرت هست .

۱-۳ زیر فضاهای پایا

تعریف ۱-۳-۱. اگر X یک فضای باناخ و $T \in B(X)$ خطی باشد، یک زیرفضای پایا برای T یک زیرفضای خطی بسته M از X هست به‌طوری‌که $Tx \in M$ جایی‌که $x \in M$.

[۷] Triangular inequality

[۸] Hilbert Space

تعریف ۱-۳-۲. مجموعه همه زیرفضاهای پایا برای T را با $LatT$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱-۳-۳. اگر X یک فضای متناهی البعد روی $\mathbb{C}$ و $T \in B(X)$ آن‌گاه $LatT$ غیربدیهی است.

اثبات.

فرض کنیم $X = \mathbb{C}^d$ و فرض کنیم T یک ماتریس باشد آن‌گاه $P(z) = \det(T - \alpha T)$ یک چند جمله‌ای از درجه d هست. از این رو یک صفر مثل α دارد، اگر $\det(T - \alpha T) = ۰$ آن‌گاه $(T - \alpha T)$ وارون پذیر نیست. به این معنی که در فضای متناهی البعد $T - \alpha T$ یک به یک نیست. بنابراین $ker(T - \alpha T) \neq (۰)$ فرض کنیم $M \leq ker(T - \alpha T)$ به‌طوری‌که $M \neq (۰)$ اگر $x \in M$ آن‌گاه $Tx = \alpha x \in M$ بنابراین $M \in LatT$.

تعریف ۱-۳-۴. اگر H یک فضای هیلبرت و $A \in B(H)$ و $M \leq H$، M را زیرفضای پایای H نامیم اگر $h \in M$ آن‌گاه $Ah \in M$ یا به عبارت دیگر $AM \subseteq M$.

تبصره ۱-۳-۵. : *اگر* $\mathbb{A} \subseteq B(H)$ *آن‌گاه* $LatA = \bigcap\{LatT : T \in A\}$

تعریف ۱-۳-۶. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد، $\| f \|_\infty$ را سوپرمم اساسی $| f |$ تعریف کرده و فرض می‌کنیم $L^\infty(\mu)$ مجموعه‌ی تمام fهایی باشد که $\| f \|_\infty < \infty$. اعضای $L^\infty(\mu)$ را گاهی توابع اندازه‌پذیر به‌طور اساسی کراندار بر X می‌نامند.

تعریف ۱-۳-۷. $C(\mathbb{T})$ عبارتست از تمام توابع مختلط پیوسته f بر $\mathbb{T}$ با نرم

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$$

تعریف ۱-۳-۸. $L^\infty(\mathbb{T})$ فضای تمام (رده‌های هم ارزی) توابع به طور اساسی کراندار نسبت به اندازه لبگ است، به‌ازای $g \in L^\infty(\mathbb{T})$، $\|g\|_\infty$ یعنی سوپرمم اساسی $|g|$.

تعریف ۱-۳-۹. ضرایب فوریه: به‌ازای هر $f \in L^۱(\mathbb{T})$ ضرایب فوریه f را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{f}(n) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

و $(n \in \mathbb{Z})$ که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه تمام اعداد صحیح است. بدین ترتیب به هر $f \in L^۱(\mathbb{T})$ تابع $\hat{f}$ بر $\mathbb{Z}$ را مربوط می‌سازیم.

تعریف ۱-۳-۱۰. سری فوریه: سری فوریه f عبارتست از

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

و مجموع‌های جزئی‌اش عبارتست از

$$S_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} \qquad (N = ۰,\ ۱,\ ۲,\ ...) \qquad (۱)$$

قضیه ۱-۳-۱۱. (ریس- فیشر [۹]**)** *: هرگاه $\{C_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^۲ < \infty$$

آن‌گاه تابعی مانند $f \in L^۲(\pi)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $n \in \mathbb{Z}$.

$$C_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

اثبات. به [۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۱-۳-۱۲. (پارسوال [۱۰]**)** *. اگر $f \in L^۲(\mathbb{T})$ و $g \in L^۲(\mathbb{T})$ آن‌گاه،*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

که سری سمت چپ به طور مطلق همگراست. هرگاه S_N همان (۱) باشد، آن‌گاه

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \|f - S_N\|_۲ = ۰$$

.

اثبات. به [۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۳-۱۳. $C_۰$ فضای تمام توابع مختلط φ بر $\mathbb{Z}$ می‌باشد به طوری که وقتی $n \longrightarrow \pm\infty$، $\varphi(n) \longrightarrow ۰$. با نرم سوپرمم زیر

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| : n \in \mathbb{Z}\}$$

[۹] Ris-Phisher Theorem

[۱۰] Parsaval Theorem