

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

باسمه تعالی



### تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب معتمد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی<sup>۱</sup> می‌باشد.

فاروق فتح‌الهی

امضاء



دانشگاه تربیت مدرس  
دانشکده علوم پایه

# بررسی درک و فهم دانشجویان از فرایند اثبات ریاضی و بررسی نگرش آن‌ها به اثبات‌های ریاضی

نگارش

فاروق فتح‌الهی

استاد راهنما: جناب آقای دکتر ابراهیم ریحانی

استاد مشاور: سرکار خانم فهیمه کلاهدوز

پایان نامه برای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد

در رشته ی آموزش ریاضی

شهریور ماه ۱۳۹۲

تأییدیہی ہیأت داوران

تقدیم به:

پدر بزرگووارم که درس چگونه زیستن،

مادر ارجمندم که درس محبت و دوست داشتن،

همسر گرامی ام که درس عشق و صبر در برابر سختی ها را به من آموخت.

و به همه ی کسانی که در عرصه علم و دانش راهنما و یاریگرم بودند.

## تقدیر و تشکر

حمد بی حد و سپاس بی عدد خداوندی را سزااست که واحد مطلق است و ما در مقابلش صفریم و صفر. کریمی که در تمام مراحل زندگی‌م والاترین پشتیبان و مهربانترین یاور من بوده است.

تقدیر و تشکر از استاد فرزانه جناب آقای دکتر ابراهیم ریحانی که از دانش غنی و تجربه ارزشمند ایشان بهرمنند گشتم.

سپاس فراوان از استاد گرامی سرکار خانم فهیمه کلاهدوز که با حمایت‌های علمی و خلاق، و با روحیه‌ای دلسوزانه در تمام مراحل این پژوهش مرا یاری دادند.

تشکر و قدرانی از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر امیر حسین اصغری و دکتر مجتبی قرانی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را پذیرفتند.

تشکر و قدردانی می‌کنم از همه‌ی اعضای خانواده‌ام به ویژه همسر، مادر و پدر عزیزم که با دلگرمی خود به من قوت قلب دادند.

## چکیده

استدلال و اثبات در آموزش ریاضیات در همه مقاطع تحصیلی از مدرسه تا دانشگاه از اهمیت خاصی برخوردار است و درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات تقریباً غیر ممکن است. در این مطالعه که به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام گرفته است، هدف محقق بررسی درک و فهم دانشجویان از فرایند ساخت اثبات ریاضی و همچنین بررسی نگرش آن‌ها به اثبات‌های ریاضی می‌باشد. نمونه مورد مطالعه ۱۷۰ نفر دانشجوی دختر و پسر در مقطع کارشناسی ریاضی از چهار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، شهید بهشتی، امیر کبیر و علم و صنعت می‌باشد که نمونه در دسترس محسوب می‌شود. ابزار اندازه‌گیری در پژوهش حاضر، پرسش‌نامه می‌باشد که خود شامل دو بخش اصلی است. طراحی بخش اول بر اساس تعمیمی از پرسش‌نامه روی، الکاک و انگلس می‌باشد. در این بخش قضیه‌ای همراه با اثباتش ارائه گردید و سپس از دانشجویان خواسته شد تا به سوالاتی که در مورد فرایند ساخت اثبات است، پاسخ دهند. همچنین طراحی بخش دوم پرسش‌نامه بر اساس مطالعات انجام گرفته در پیشینه تحقیق و نتایج پژوهش محققان دیگر در زمینه اهداف اثبات‌های ریاضی و مشکلات دانشجویان در استدلال و اثبات صورت گرفته است. مدل مورد استفاده در بخش اول پرسش‌نامه که بر اساس مدل راموس و همکاران می‌باشد از دو جنبه موضعی و کلی اثبات تشکیل شده است. این مدل هفت سطح مختلف از درک و فهم دانشجویان از فرایند ساخت اثبات ریاضی را بررسی می‌کند. جنبه‌ی موضعی اثبات بیشتر روی درک مفاهیم اولیه و چگونگی ارتباط میان گزاره‌ها و قضایا تأکید دارد ولی جنبه‌ی کلی اثبات بیشتر به روش‌های اصلی اثبات و بکاربردن آن در دیگر مفاهیم توجه می‌کند. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان داد که اکثر دانشجویان مورد مطالعه به جنبه‌های موضعی اثبات دست یافته‌اند. در واقع آن‌ها توانسته‌اند رابطه‌ی بین مفاهیم و گزاره‌های اثبات را درک کنند و ارتباط بین چند گزاره‌ی خاص را نشان دهند، ولی درصد کمی از آن‌ها ساختار کلی اثبات را درک کرده بودند. به نظر می‌رسد عدم توجه دانشجویان به فرض قضیه، ناتوانی آن‌ها در ارائه استدلال منطقی و سازماندهی منطقی گزاره‌های اثبات و از همه مهمتر، دانش ناکافی دانشجویان در برخی موارد می‌تواند از دلایل این ضعف باشد. علاوه بر این، نتایج بدست آمده از بخش دوم پرسش‌نامه نشان داد که از دیدگاه دانشجویان "تأیید یا رد گزاره‌های ریاضی" به عنوان مهمترین هدف اثبات‌های ریاضی و "فقدان دانش محتوایی" به عنوان مهمترین مانع در پرورش دادن درک فرایند اثبات ریاضی به شمار می‌آید. همچنین، مهمترین ویژگی یک اثبات ریاضی از دیدگاه دانشجویان "برخوردار بودن فرایند اثبات ریاضی از انسجام منطقی" می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** فرایند اثبات ریاضی، استدلال، درک و فهم دانشجویان، نگرش.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
أ	تأییدیه هیات داوران.....
ب	تقدیم به.....
ج	تقدیر و تشکر.....
د	چکیده.....
ه	فهرست مطالب.....
ز	فهرست جدولها .....
ح	فهرست نمودارها .....
ط	فهرست شکلها.....
۱	<b>فصل اول: کلیات تحقیق .....</b>
۲	۱-۱- مقدمه .....
۳	۲-۱- بیان مسأله .....
۴	۳-۱- اهمیت و ضرورت تحقیق .....
۶	۴-۱- مخاطبان تحقیق .....
۶	۵-۱- اهداف تحقیق .....
۶	۱-۵-۱- اهداف کلی .....
۶	۲-۵-۱- اهداف جزئی .....
۶	۶-۱- سؤالهای تحقیق .....
۶	۱-۶-۱- سؤالهای اصلی تحقیق .....
۷	۲-۶-۱- سؤالهای فرعی تحقیق .....
۷	۱-۷-۱- قلمرو تحقیق .....
۷	۱-۷-۱- قلمرو مکانی .....
۷	۲-۷-۱- قلمرو زمانی .....
۷	۱-۸- تعاریف واژه ها و مفاهیم کلیدی .....
۷	۱-۸-۱- تعریف نظری مفاهیم .....
۸	۲-۸-۱- تعریف عملیاتی مفاهیم .....
۹	<b>فصل دوم: مبانی نظری و ادبیات تحقیق .....</b>
۱۰	۱-۲- مقدمه .....
۱۰	۲-۲- آشنایی با پیدایش قضایای ریاضی و اثبات آنها .....
۱۱	۳-۲- ماهیت استدلال و اثبات .....



۱۲	..... ۴-۲- استدلال ریاضی
۱۳	..... ۵-۲- تقسیم‌بندی اثبات از دیدگاه‌های مختلف
۱۷	..... ۲-۵-۱- انواع اثبات
۱۹	..... ۲-۶- اهداف و کارکرد اثبات
۲۲	..... ۲-۷- اثبات در ریاضیات و آموزش ریاضی
۲۵	..... ۲-۸- مشکلات دانشجویان در زمینه اثبات ریاضی
۳۰	..... ۲-۹- استدلال و اثبات در کتاب‌ها و برنامه درسی
۳۱	..... ۲-۱۰- چگونگی رشد توانایی استدلال و اثبات
۳۳	..... ۲-۱۱- اثبات و حل مسأله
۳۵	..... ۲-۱۲- معرفی انواع مدل‌ها و چارچوب در ارتباط با فرایند اثبات
۴۱	..... ۲-۱۳- نگرش
۴۲	..... ۲-۱۳-۱- اجزای نگرش
۴۲	..... ۲-۱۳-۲- فرایند شکل‌گیری و تغییر نگرش
۴۳	..... ۲-۱۴- جمع‌بندی
۴۴	..... <b>فصل سوم: روش تحقیق</b>
۴۵	..... ۳-۱- مقدمه
۴۵	..... ۳-۲- روش و طرح تحقیق
۴۵	..... ۳-۳- فرایند تحقیق
۴۶	..... ۳-۴- جامعه آماری
۴۶	..... ۳-۵- نمونه، روش نمونه‌گیری و حجم نمونه
۴۶	..... ۳-۶- ابزار گردآوری داده‌ها
۴۸	..... ۳-۷- تعیین روایی پرسش‌نامه
۴۹	..... ۳-۸- تعیین پایایی پرسش‌نامه
۴۹	..... ۳-۹- روش جمع‌آوری اطلاعات
۵۰	..... ۳-۱۰- روش تجزیه و تحلیل اطلاعات
۵۲	..... <b>فصل چهارم: تجزیه و تحلیل داده‌ها (یافته‌های تحقیق)</b>
۵۳	..... ۴-۱- مقدمه
۵۳	..... ۴-۲- وضعیت جمعیت شناختی دانشجویان بر اساس جنسیت، تعداد و نوع دانشگاه
۵۴	..... ۴-۳- سؤالات بخش اول پرسش‌نامه
۵۴	..... ۴-۳-۱- سؤال اصلی تحقیق
۵۴	..... ۴-۳-۲- سؤال فرعی تحقیق
۸۷	..... <b>فصل پنجم: بحث و نتیجه‌گیری، پیشنهادات و محدودیت‌ها</b>
۸۸	..... ۵-۱- مقدمه

۸۸	..... ۵-۲- خلاصه نتایج تحقیق
۸۸	..... ۵-۲-۱- نتایج به دست آمده بر اساس پرسش‌های اصلی تحقیق
۹۱	..... ۵-۲-۲- نتایج به دست آمده بر اساس پرسش‌های فرعی تحقیق
۹۲	..... ۵-۳- بحث و نتیجه‌گیری
۹۴	..... ۵-۴- توصیه‌های برگرفته از یافته‌های پژوهش
۹۵	..... ۵-۵- محدودیت‌های پژوهش
۹۵	..... ۵-۶- پیشنهادهایی برای پژوهش‌های بعدی
۹۶	..... پیوست
۹۷	..... پیوست شماره ۱: پرسش‌نامه‌ی تحقیق
۱۰۱	..... پیوست شماره ۲: پرسش‌نامه روی، الکاک و انگلس (۲۰۱۰)
۱۰۳	..... فهرست مقالات ارائه شده
۱۰۴	..... فهرست منابع
۱۰۴	..... منابع فارسی
۱۰۶	..... منابع خارجی

### فهرست جداول

۳۶	..... جدول ۱-۲: سطوح درک اثبات از دیدگاه یانگ و لین (۲۰۰۸)
۳۷	..... جدول ۲-۲: جنبه‌های درک اثبات از دیدگاه یانگ و لین (۲۰۰۸)
۴۶	..... جدول ۱-۳: فراوانی نمونه آماری تحقیق
۵۰	..... جدول ۲-۳: مدل بکاربرده شده در مطالعه‌ی حاضر
۵۳	..... جدول ۱-۴: توزیع فراوانی دانشجویان شرکت کننده در پژوهش
۵۵	..... جدول ۲-۴: سطوح مدل ارزیابی درک دانشجویان از فرایند اثبات
۵۶	..... جدول ۳-۴: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۶
۵۷	..... جدول ۴-۴: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۶
۵۸	..... جدول ۵-۴: مقایسه پاسخ دانشجویان در درک کلی صورت قضیه بر اساس تفکیک جنسیت
۵۸	..... جدول ۶-۴: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۷
۶۰	..... جدول ۷-۴: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۷
۶۰	..... جدول ۸-۴: مقایسه پاسخ دانشجویان در درک جزئیات صورت قضیه بر اساس تفکیک جنسیت
۶۱	..... جدول ۹-۴: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۴
۶۲	..... جدول ۱۰-۴: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۴
۶۲	..... جدول ۱۱-۴: مقایسه پاسخ دانشجویان در پیدا کردن ارتباط منطقی بین گزاره‌های اثبات بر اساس تفکیک جنسیت

۶۳	..... جدول ۴-۱۲: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۳
۶۴	..... جدول ۴-۱۳: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۳
۶۴	..... جدول ۴-۱۴: مقایسه توانایی دانشجویان در پیدا کردن ارتباط منطقی بین قضایا و حقایق مورد قبول به تفکیک جنسیت
۶۵	..... جدول ۴-۱۵: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۱
۶۷	..... جدول ۴-۱۶: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۱
۶۷	..... جدول ۴-۱۷: مقایسه توانایی دانشجویان در توجیه درستی یا نادرستی یک گزاره‌ی ریاضی بر اساس تفکیک جنسیت
۶۸	..... جدول ۴-۱۸: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۸
۶۹	..... جدول ۴-۱۹: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۸
۶۹	..... جدول ۴-۲۰: مقایسه توانایی دانشجویان در پیدا کردن تضاد و ناسازگاری در فرایند اثبات، بر اساس تفکیک جنسیت
۷۰	..... جدول ۴-۲۱: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۲
۷۱	..... جدول ۴-۲۲: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۲
۷۱	..... جدول ۴-۲۳: مقایسه توانایی دانشجویان در پیدا کردن تضاد و ناسازگاری در فرایند اثبات، بر اساس تفکیک جنسیت
۷۲	..... جدول ۴-۲۴: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۵
۷۴	..... جدول ۴-۲۵: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۵
۷۴	..... جدول ۴-۲۶: مقایسه توانایی دانشجویان در درک روش اثبات یک گزاره‌ی ریاضی و بکارگیری آن در شرایط جدید، بر اساس تفکیک جنسیت
۷۵	..... جدول ۴-۲۷: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۹
۷۶	..... جدول ۴-۲۸: مقایسه درصد نسبی پاسخ دانشجویان دختر و پسر در پاسخگویی به سؤال ۹
۷۶	..... جدول ۴-۲۹: مقایسه توانایی دانشجویان در توضیح و توجیه اثبات ریاضی از طریق شکل هندسی، بر اساس تفکیک جنسیت
۷۹	..... جدول ۴-۳۰: داده‌های به دست آمده از سؤال ۱ در بخش اول پرسش‌نامه
۸۰	..... جدول ۴-۳۱: امتیازدهی گزینه‌های سؤال ۱ بخش دوم پرسش‌نامه به ترتیب نزولی
۸۱	..... جدول ۴-۳۲: داده‌های به دست آمده از سؤال ۲ در بخش اول پرسش‌نامه
۸۲	..... جدول ۴-۳۳: امتیازدهی گزینه‌های سؤال ۲ بخش دوم پرسش‌نامه به ترتیب نزولی
۸۴	..... جدول ۴-۳۴: داده‌های به دست آمده از سؤال ۳ در بخش اول پرسش‌نامه
۸۵	..... جدول ۴-۳۵: امتیازدهی گزینه‌های سؤال ۳ بخش دوم پرسش‌نامه به ترتیب نزولی

### فهرست نمودارها

۵۷	..... نمودار ۴-۱: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۶
----	--

۶۰	..... نمودار ۴-۲: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۷
۶۲	..... نمودار ۴-۳: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۴
۶۴	..... نمودار ۴-۴: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۳
۶۶	..... نمودار ۴-۵: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۱
۶۹	..... نمودار ۴-۶: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۸
۷۱	..... نمودار ۴-۷: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۲
۷۳	..... نمودار ۴-۸: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۵
۷۶	..... نمودار ۴-۹: فراوانی پاسخ دانشجویان به سؤال ۹
۸۰	..... نمودار ۴-۱۰: مجموع امتیازات گزینه‌های انتخابی در سؤال ۱ بخش دوم پرسش‌نامه
۸۳	..... نمودار ۴-۱۱: مجموع امتیازات گزینه‌های انتخابی در سؤال ۲ بخش دوم پرسش‌نامه
۸۶	..... نمودار ۴-۱۲: مجموع امتیازات گزینه‌های انتخابی در سؤال ۳ بخش دوم پرسش‌نامه

### فهرست شکل‌ها

۱۶	..... شکل ۲-۱: رویکردهای اثبات از نظر همی (۲۰۱۰)
۳۸	..... شکل ۲-۲: یکپارچگی چهار سطح و پنج جنبه اثبات از دیدگاه یانگ و لین (۲۰۰۸)
۴۷	..... شکل ۳-۱: بخش اول پرسش‌نامه مورد استفاده در تحقیق
۴۸	..... شکل ۳-۲: نمونه پاسخ دانشجویان در بخش دوم پرسش‌نامه
۵۶	..... شکل ۴-۱: چند نمونه از پاسخ صحیح و اشتباه دانشجویان به سؤال ۶
۵۹	..... شکل ۴-۲: چند نمونه از پاسخ اشتباه دانشجویان به سؤال ۷
۶۳	..... شکل ۴-۳: چند نمونه از پاسخ ناقص و اشتباه دانشجویان به سؤال ۳
۶۵	..... شکل ۴-۴: نمونه‌ی پاسخ صحیح دانشجویان به سؤال ۱
۶۵	..... شکل ۴-۵: نمونه‌ی پاسخ ناقص دانشجویان به سؤال ۱
۶۶	..... شکل ۴-۶: نمونه‌ی پاسخ اشتباه دانشجویان به سؤال ۱
۶۸	..... شکل ۴-۷: چند نمونه از پاسخ دانشجویان به سؤال ۸
۷۰	..... شکل ۴-۸: چند نمونه از پاسخ دانشجویان به سؤال ۲
۷۲	..... شکل ۴-۹: چند نمونه از پاسخ ناقص و اشتباه دانشجویان به سؤال ۵
۷۴	..... شکل ۴-۱۰:
۷۵	..... شکل ۴-۱۱: چند نمونه از پاسخ دانشجویان به سؤال ۹
۷۹	..... شکل ۴-۱۲: چند نمونه از اهداف اثبات از دیدگاه دانشجویان
۸۲	..... شکل ۴-۱۳: چند نمونه از موانع پرورش درک فرایند اثبات از دیدگاه دانشجویان
۸۵	..... شکل ۴-۱۴: چند نمونه از ویژگی اثبات ریاضی از دیدگاه دانشجویان

# فصل اول

## کلیات تحقیق

اثبات ریاضی مانند الماس، قاطع و شفاف است و با چیزی جز استدلال دقیق نمی توان به آن رسید. (جان لاک<sup>۱</sup>)

## ۱ - مقدمه

تحولات پیوسته علوم و تکنولوژی، تغییرات سریع در الگوهای زندگی و تنوع افکار، گرایش‌ها و اطلاعات، شرایطی فراهم آورده که زندگی در عصر حاضر را پیچیده کرده است. لذا افراد در زندگی روزانه به مهارت‌هایی نظیر تفکر نقادانه، استدلال و اثبات بسیار نیازمند خواهند بود. از ساده‌ترین خریدهای روزانه گرفته تا مسایل مهم‌تری چون تصمیمات سیاسی، اقتصادی و اجتماعی نیاز به چنین مهارت‌هایی احساس می‌شود. "به طور مثال از هر شهروند خواسته می‌شود که در انتخابات کشور خود شرکت کند. در مورد کاندیدا به قضاوت بنشیند، کاندیداهای خود را انتخاب نماید و با استدلال مناسب، دیگران را قانع کند. " از طرفی علم ریاضیات یکی از بهترین علوم برای توسعه‌ی چنین مهارت‌هایی است و به همین دلیل است که راس<sup>۲</sup>، یکی از مهمترین اهداف تدریس ریاضیات را آموزش استدلال منطقی به دانش‌آموزان و دانشجویان می‌داند (زمانی ابیانه، ۱۳۸۶). راس معتقد است که اساس ریاضیات، استدلال است و در حالی که علم توسط مشاهده تأیید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تأیید قرار می‌گیرد؛ بنابراین جوهره ریاضیات در اثبات نهفته است و باید به تفاوت بین مثال، حدسیه و اثبات توجه کرد. بال و باس<sup>۳</sup> (۲۰۰۳) معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه‌ی ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند و این دانش کسب شده که فاقد توجیه کردن است به راحتی می‌تواند غیر منطقی و غیر مستدل باشد، همچنین آن‌ها بر این باورند که استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. پولیا<sup>۴</sup> (۱۹۵۴) معتقد است، در صورتی که قواعد ریاضی را بدون دلیل به دانشجویان آموزش دهیم، انگیزه‌ای برای فهمیده شدن پیدا نمی‌کنند و این قواعد ناپیوسته هرچه زودتر فراموش می‌شوند. برخی از محققان و آموزشگران ریاضی بر این باورند که اثبات، قلب ریاضی است و تأکید کرد هاند که فرایند اثبات کردن در تجارب ریاضی دانش‌آموزان و دانشجویان باید یکی از اهداف اصلی آموزشگران ریاضی در هر مقطع تحصیلی باشد (NCTM<sup>۵</sup>، ۲۰۰۰؛ شونفلد<sup>۶</sup>، ۱۹۹۴؛ هارل<sup>۷</sup> و ساودر<sup>۸</sup>، ۱۹۹۸). همچنین آنپا<sup>۹</sup> و

<sup>۱</sup> -John locke

<sup>۲</sup> - Ross

<sup>۳</sup> -Ball & Bass

<sup>۴</sup> - Polya

<sup>۵</sup> -National council of teachers of mathematics

<sup>۶</sup> -Schoenfeld

<sup>۷</sup> -Harel

<sup>۸</sup> -Sowder

<sup>۹</sup> -Anapa

سامکار<sup>۱</sup> (۲۰۱۰) تأکید می‌کنند که باید به دانشجویان آموزش داد که چرا اثبات در ریاضیات مهم است، چه چیزی یک اثبات است و چگونه یک اثبات ساخته می‌شود. با توجه به مطالب فوق می‌توان استنباط کرد که فرایندهای استدلال و اثبات در آموزش ریاضیات در همه مقاطع تحصیلی از مدرسه تا دانشگاه از اهمیت خاصی برخوردارند و درک و فهم ریاضیات بدون تأکید بر این فرایندها تقریباً غیر ممکن است. در این مطالعه نیز، هدف محقق آن است که شناخت بهتری از درک و فهم دانشجویان در فرایند ساخت اثبات ریاضی بدست آورد.

## ۴۱ بیان مسأله

قرن ۶ قبل از میلاد مسیح، زمانی که ریاضیدانان یونانی روش اصل موضوعی را به وجود آوردند، ریاضیدانان، اثبات را امری ضروری در ریاضیات در نظر گرفتند. همانطور که دریفوس<sup>۲</sup> (۱۹۹۰) ادعا می‌کند، "اثبات هسته‌ی اصلی در ریاضیات است" و احتمالاً همین ویژگی وجه تمایز ریاضیات با دیگر رشته‌ها شده است. با این حال پرسش‌هایی از قبیل حقیقت اثبات چه بوده و چگونه ادامه یافته است، یک موضوع مورد بحث میان ریاضیدانان، مورخان ریاضی، فیلسوفان و آموزشگران ریاضی بوده است (رامان<sup>۳</sup>، ۲۰۰۲).

استدلال و اثبات<sup>۴</sup>، از جمله مهارت‌هایی هستند که به طور کلی در زندگی روزمره و به طور خاص در فرآیند آموزش ریاضی از جایگاه خاصی برخوردار می‌باشند و ریاضیات به عنوان شاخه‌ای از علوم، نقش مؤثری را در توسعه‌ی تفکر و قدرت استدلال افراد ایفا می‌کند (کلاهدوز، ۱۳۹۰). برخی از محققان (به عنوان مثال، مور<sup>۵</sup>، ۱۹۹۴؛ هارل و ساودر، ۱۹۹۸؛ سلدن و سلدن<sup>۶</sup>، ۱۹۹۵) در مطالعات خود مشاهده کرده‌اند، اغلب دانشجویانی که با اثبات مواجه می‌شوند؛ در بکاربردن نمادها و فهم زبان ریاضی، در استفاده از تعاریف برای استنتاج یک اثبات و در بسط و توضیح معنای یک گزاره یا قضیه ریاضی با مشکل مواجه می‌شوند. همچنین بعضی از تحقیقات (به عنوان مثال، آناپا و سامکار، ۲۰۱۰؛ دی ونس پرونسن، ۲۰۰۸؛ روی، الکاک و انگلس، ۲۰۱۰) بیانگر آن هستند که برخی از دانشجویان در استنباط احکام ریاضی برای بررسی اینکه یک سطر از یک اثبات صحیح است یا نه و اینکه در چه صورتی یک اثبات معتبر است، مشکل اساسی دارند.

توماس<sup>۷</sup> (۲۰۰۷) نیز در مطالعه خود، درک دانشجو-معلم از اثبات را مورد بررسی قرار می‌دهد و به این نتیجه دست می‌یابد که این دانشجو معلم درک محدودی از ماهیت و نقش اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای دارند و به نظر می‌رسد که آنها نیازمند تجربه بیشتری در کامل کردن اثبات‌های ریاضی سطح مدرسه‌ای می‌باشند. او همچنین تأکید می‌کند که اثبات و استدلال باید یکی از بخش‌های اساسی در آموزش دانشجو-معلم باشد (نقل شده در مهدوی، ۱۳۸۹). همچنین اعضای شورای ملی

<sup>۱</sup>-Samkar

<sup>۲</sup>-Dreyfus

<sup>۳</sup>-Raman

<sup>۴</sup>-Proof

<sup>۵</sup>- Moore

<sup>۶</sup>-Selden & Selden

<sup>۷</sup>-Tomas

معلمین ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM, ۲۰۰۰) در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای بیان می‌دارند که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های مختلف توسعه می‌دهد؛ همچنین آنها بیان می‌دارند افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند. این شورا اظهار می‌دارد استدلال و اثبات نباید به عنوان فعالیت‌های ویژه و مخصوصی که به صورت یک موضوع جداگانه و خاص در برنامه‌ی درسی باشند، در نظر گرفته شوند؛ بلکه این مفاهیم باید به طور طبیعی و مداوم در همه‌ی بحث‌های کلاسی حضور داشته باشند.

بسیاری از محققین آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند اثبات و استدلال برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعه تفکر منطقی ضروری بوده و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات می‌باشند (NCTM, ۲۰۰۰؛ بال و باس، ۲۰۰۳؛ هارل و ساودر، ۲۰۰۷؛ هانا<sup>۱</sup> و باربئو<sup>۲</sup>، ۲۰۰۸؛ یانکلویتز<sup>۳</sup>، ۲۰۰۹؛ کاگسی<sup>۴</sup> و همکاران، ۲۰۱۰؛ نقل شده در کلاهدوز).  
آناپا و سامکار (۲۰۱۰) در نتایج تحقیقات خود دریافتند که مشکلات دانشجویان در اثبات کردن، تا حدودی مربوط به چگونگی درک آنها از اثبات است. هنگامی که دانشجویان به اثبات کردن یک قضیه مایل نباشند، در اثبات آن نیز ناموفق خواهند بود. با این حال اهمیت اثبات را در آموزش ریاضی نمی‌توان نادیده گرفت. بنابراین اولین گام در کمک به دانشجویان در چنین مشکلاتی، بررسی درک و فهم آن‌ها از اثبات است.

## ۱ ۴ - اهمیت و ضرورت تحقیق

یکی از جنجالی‌ترین بحث‌های جامعه ریاضی طی قرن‌های متمادی، فرایند استدلال و اثبات بوده و هست و تاریخ تحلیلی ریاضی، گواه صادقی بر این ادعاست. تاریخ نشان می‌دهد که قبل از یونانی‌ها تا زمان حال، تبیین ریاضیدانان‌ها از ریاضی و چیستی آن، نگاه آن‌ها را به استدلال و اثبات شکل داده است. همانطور که مشخص است، در آموزش هم این فرایندها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند زیرا دانش‌آموز یا دانشجویی که استدلال ریاضی، تأثیر مطلوبی بر او نگذاشته باشد، از مهمترین جنبه تفکر روشن و تفکر انتقادی محروم مانده است (خلاقیت ریاضی، نقل شده در مهدوی، ۱۳۸۸). گرینر<sup>۵</sup> (۱۹۹۰) هم در بیان اهمیت ارائه استدلال و اثبات چنین می‌گوید: اجتناب از مواجه شدن با اثبات در ریاضی مدرسه‌ای، مانند تدریس علوم تجربی بدون آزمایش است. راس (۲۰۰۰) هم در ارتباط با اهمیت اثبات و استدلال بیان می‌کند که اگر توانایی استدلال در دانش‌آموزان رشد نکرده باشد، ریاضیات برای او به مجموعه‌ای از رویه‌ها و مثال‌های تکراری فاقد تفکر تبدیل می‌شود. اعضای شورای ملی معلمین ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM, ۲۰۰۰) در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای بیان می‌نمایند که، "اثبات و استدلال باید به طور پایدار در تجربیات ریاضی دانش‌آموزان از

<sup>۱</sup>-Hanna

<sup>۲</sup>-Barbeau

<sup>۳</sup>-Yankelewitz

<sup>۴</sup>- Kögce

<sup>۵</sup>-Griner



پیش‌دبستانی تا پایان پایه‌ی دوازدهم باشد " (ص ۵۶). آن‌ها معتقدند که " استدلال ریاضیات گونه، یک عادت فکری است و مانند تمام عادات باید از طریق استفاده و بکارگیری مستمر آن در زمینه‌های مختلف، رشد و توسعه یابد " (ص ۵۶). همچنین این شورا استاندارد را تحت عنوان استدلال و اثبات معرفی نموده که در توضیح آن آمده است:

برنامه‌های تدریس و آموزش از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید دانش‌آموزان را قادر سازند تا:

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی در ریاضیات بشناسند؛
  - حدسیه‌سازی کرده و بتوانند این حدسیه‌ها را مورد بررسی قرار دهند؛
  - ادعاها و اثبات‌های ریاضی را تکمیل کرده و ارزیابی کنند؛
  - روش‌های مختلف استدلال و اثبات را انتخاب نموده و بکار گیرند.
- راو<sup>۱</sup> (۱۹۹۹) ادعا می‌کند که اهمیت اثبات در آموزش ریاضی چیزی فراتر از تأیید و تصدیق است و اهمیت آن به این دلیل می‌باشد که اثبات می‌تواند روش‌ها، مفاهیم و مسیرهای جدید را که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارند نشان دهد ( نقل شده در کلاه‌دوز ۱۳۹۰).
- وارجیس<sup>۲</sup> (۲۰۰۷) در مطالعه‌ای که روی دانشجو معلمان به عمل آورد ، به این نتیجه رسید که درک و فهم دانشجو معلمان از اثبات ریاضی محدود و ضعیف است و بیشتر شرکت کنندگان در این مطالعه کارکرد و معنای اثبات را در حد تأیید و تصدیق گزاره های ریاضی می‌دانستند. همچنین وی نشان داد که، دانستن ضرورت اثبات‌های رسمی و معتبر با استفاده از روش‌های مناسب آموزشی، موجب می‌گردد که دانشجویان فرایند اثبات را نامرتبط ندانسته و توانایی‌شان در نوشتن اثبات افزایش یابد.

آناپا و سامکار (۲۰۱۰) در مطالعات خود مشاهده کردند که اکثر دانشجویانی که خود را در دروس ریاضی موفق می‌دانند به توانایی اثبات خود اطمینان ندارند و اغلب آن‌ها تعدادی از قضایا و اثبات‌هایی را که در دوره‌ی تحصیلی خود یاد گرفته اند به خاطر می‌سپارند، ولی در موقعیت جدید نمی‌توانند روش‌ها و تکنیک‌های ضروری اثبات را مورد استفاده قرار دهند. آن‌ها یکی از دلایل وجود چنین باور و عملکردی را در بین دانشجویان ، عدم ارزیابی توانایی آن‌ها در فرایند اثبات و تأکید بیشتر بر روی رویه‌ها در ریاضیات مدرسه‌ای می‌دانند. مور (۱۹۹۴) در نتایج تحقیقات خود بیان می‌دارد که اکثر دانشجویان نمی‌دانستند چگونه یک اثبات را شروع کنند و چگونه فرضیات را به نتایج متصل نمایند و بین آن‌ها ارتباط برقرار کنند. همچنین وی دریافت که اکثر دانشجویان روی رویه تکیه می‌کنند تا محتوا. بسیاری از دانشجویان شرکت کننده در مطالعه مور می‌گویند که آن‌ها در دروس دانشگاهی به حفظ کردن اثبات‌ها تکیه داشتند، زیرا آن‌ها نفهمیده بودند که یک اثبات چیست و چگونه باید آن را نوشت.

به طور کلی، اهمیت موضوع، نتایج تحقیقات و مشاهده‌ی مشکلات دانشجویان پیرامون فرایند اثبات و استدلال و تجربه‌ی شخصی محقق نشان می‌دهد که اکثر دانشجویان در درک و فهم فرایند اثبات ریاضی مشکل دارند. لذا محقق را برآن داشت تا برای سنجش و ارزیابی درک دانشجویان از

<sup>۱</sup>-Rav

<sup>۲</sup>-Varghese

فرایند اثبات ریاضی به دنبال ابزاری مناسب باشد. در فصل‌های آتی ضمن پرداختن به مقوله‌ی استدلال و اثبات در ریاضی به کمک یافته‌های پژوهشی، نتیجه‌ی تحقیق نیز ارائه خواهد شد. امید است که این نتایج بتواند ابزاری مناسب برای سنجش و ارزیابی درک دانشجویان از فرایند اثبات ارائه نماید و سطح آگاهی ما را از درک و فهم دانشجویان از اثبات افزایش دهد و به دنبال آن، راه حل‌هایی نیز اندیشیده شود.

## ۴ ۱- مخاطبان تحقیق

نتایج این تحقیق می‌تواند به طور مستقیم مورد استفاده‌ی دانشجویان قرار گیرد تا بدین وسیله بتوانند از جریان فکری خود در اثبات قضایای ریاضی بصیرت لازم را بدست آورند و دریابند بر اساس مدل بکاربرده شده در تحقیق حاضر در چه سطوحی از اثبات قرار دارند. همچنین معلمان و اساتید ریاضی، برنامه‌ریزان و مولفان کتب درسی نیز می‌توانند از نتایج این تحقیق بهره‌مند شوند. در واقع اساتید ریاضی با آگاهی از مدل ارزیابی بکاربرده شده در این پژوهش، می‌توانند به نقاط ضعف و قوت دانشجویان خود در فرایند اثبات‌های ریاضی پی‌ببرند و با پیش‌بینی مشکلات آن‌ها در این زمینه، بازده کلاس خود را از درک و ساخت اثبات ریاضی به ماکزیمم برسانند. برنامه‌ریزان و مولفان نیز می‌توانند با آگاهی از دیدگاه و نگرش دانشجویان به اثبات‌های ریاضی، به جایگاه اثبات در کتاب‌های ریاضی توجه ویژه‌ای نمایند.

## ۵ ۱- اهداف تحقیق

### ۱-۵-۱- اهداف کلی

- ۱- بررسی توانایی دانشجویان در درک فرایند اثبات ریاضی بر اساس مدل راموس<sup>۱</sup> و همکاران؛
- ۲- بررسی مشکلات دانشجویان در درک فرایند اثبات ریاضی
- ۳- بررسی عقاید و نگرش دانشجویان از اثبات‌ریاضی و اهداف آن در آموزش ریاضی

### ۱-۵-۲- اهداف جزئی

- ۱- بررسی توانایی دانشجویان در درک فرایند اثبات‌های ریاضی به تفکیک جنسیت؛
- ۲- بررسی عقاید و نگرش دانشجویان از اثبات‌های ریاضی به تفکیک جنسیت؛

## ۶ ۱- سؤالات تحقیق

### ۱-۶-۱- سؤالات اصلی تحقیق

---

<sup>۱</sup> - Ramos

- ۱- آیا دانشجویان، فرایند اثبات ریاضی را به درستی درک می‌کنند؟  
 ۲- نگرش دانشجویان نسبت به اثبات ریاضی چگونه است؟

### ۱-۶-۲- سؤالات فرعی تحقیق

- ۱- آیا توانایی درک دانشجویان دختر و پسر از فرایند اثبات ریاضی یکسان است؟  
 ۲- آیا نگرش دانشجویان نسبت به اثبات ریاضی به تفکیک جنسیت یکسان است؟

### ۱ ۴- قلمرو تحقیق

#### ۱-۷-۱- قلمرو مکانی

مرحله‌ی اول تحقیق، مطالعات کتابخانه‌ای بود. سپس برای پاسخ به سؤالات تحقیق، از روش میدانی استفاده شد. برای این منظور دانشجویان مقطع کارشناسی ریاضی از چهار دانشگاه شهید رجایی، شهید بهشتی، امیر کبیر و علم و صنعت، در سال تحصیلی ۹۱-۹۲ انتخاب گردید.

#### ۱-۷-۲- قلمرو زمانی

مطالعات اولیه و مرحله کتابخانه‌ای این پژوهش از تیرماه ۱۳۹۱ آغاز شد و پژوهش میدانی از اول آذرماه ۱۳۹۱ آغاز گردید و تا آخر تیر ماه به طول انجامید.

### ۱ A- تعریف واژه‌ها و مفاهیم کلیدی

#### ۱-۸-۱- تعریف نظری مفاهیم

- ❖ استدلال ریاضی<sup>۱</sup>: به عنوان توانایی تفکر منسجم و منطقی و استنتاج از حقایق ریاضی آشنا یا مفروض تعریف می‌شود (مانسی<sup>۲</sup>، ۲۰۰۳، ص ۹).
- ❖ اثبات ریاضی<sup>۳</sup>: اثبات‌ها، مجموعه‌ای از گزاره‌های درست مرتبط به هم هستند که به عنوان یک استدلال متقاعدکننده، برای درستی یک گزاره ریاضی بکار برده می‌شوند ( مینگس<sup>۴</sup> و گراسل<sup>۵</sup>، ۱۹۹۹).
- ❖ درک و فهم<sup>۶</sup>: فهمیدن فرایندی است که فرد می‌تواند به آفرینش و بازآفرینی الگوهای جدیدی که دانش قدیم را به دانش جدید مرتبط می‌سازد، بپردازد (کلاهدوز، ۱۳۹۰ به نقل از پرکینز<sup>۱</sup>، ۱۹۹۳).

<sup>۱</sup> - mathematic reasoning

<sup>۲</sup> - Mansi

<sup>۳</sup> -mathematic proof

<sup>۴</sup> -Mingus

<sup>۵</sup> -Grassl

<sup>۶</sup> -understanding

❖ نگرش<sup>۲</sup>: نگرش ترکیبی از باورها، گرایش‌ها یا احساسات مساعد و نامساعدی است که به آمادگی و تمایل فرد برای نشان دادن واکنش به شیوه‌ای نسبتاً ثابت به اشیاء، اشخاص و رویدادهای خاص اطلاق می‌شود (موسوی نسب، ۱۳۸۰).

#### ۱-۸-۲- تعریف عملیاتی مفاهیم

- ❖ استدلال: در این پژوهش، پاسخ‌هایی که دانشجویان به سؤال ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۷ بخش اول پرسش‌نامه ارائه می‌دهند به عنوان استدلال در نظر گرفته می‌شوند.
- ❖ اثبات ریاضی: در این پژوهش، پاسخ دانشجویان به سؤالات ۵ و ۹ بخش اول پرسش‌نامه به عنوان اثبات در نظر گرفته می‌شود.
- ❖ درک و فهم: قابل توجه است یکی از اهداف این پژوهش بررسی توانایی دانشجویان در درک فرایند اثبات ریاضی می‌باشد، لذا پاسخ دانشجویان به تمام سؤالات بخش اول پرسش‌نامه به عنوان درک و فهم دانشجویان از فرایند اثبات در نظر گرفته می‌شود.
- ❖ نگرش: پرسشنامه‌ای که در این پژوهش استفاده گردید، متشکل از دو بخش است. در بخش دوم نگرش دانشجویان به اثبات‌های ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این بخش که شامل سه سؤال بسته پاسخ می‌باشد، برای انتخاب پاسخ هر سؤال، ۶ الی ۷ گزینه ارائه شده است. لذا ترتیب اولویت قرار دادن گزینه‌های انتخابی توسط دانشجویان، به عنوان نگرش آنها نسبت به فرایند اثبات، در نظر گرفته می‌شود.

---

<sup>۱</sup> - Perkins  
<sup>۲</sup> - Attitude