دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

مدل بلترامی-کلاین هندسه‌ی هذلولوی با کاربردهای آن در نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین

استاد راهنما

سیدقهرمان طاهریان

استاد مشاور

اعظم اعتماد دهکردی

پژوهشگر

محفوظ رستم زاده

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: رستم‌زاده نام: محفوظ

عنوان: مدل بلترامی-کلاین هندسه‌ی هذلولوی با کاربردهای آن در نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین

استاد راهنما: سیدقهرمان طاهریان

استاد مشاور: اعظم اعتماد دهکردی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه

دانشگاه: صنعتی اصفهان دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۱۱۷

واژگان کلیدی: هندسه‌ی هذلولوی؛ مدل بلترامی-کلاین؛ صفحه‌ی مطلق؛ نظریه‌ی نسبیت خاص؛ K-لوپ؛ جایروگروه؛ مثلثات؛ مساحت

چکیده

در این رساله، بعد از یک مرور تاریخی بر هندسه‌ی نااقلیدسی، به یادآوری بنداشت‌های هیلبرت برای صفحه‌ی اقلیدسی می‌پردازیم. سپس، هندسه‌ی هذلولوی کلاسیک (یعنی با در نظر گرفتن بنداشت پیوستگی) و چهار مدل معروف آن، مدل بلترامی-کلاین، مدل‌های پوانکاره و مدل $\mathbb{H}^n$ ارائه خواهند شد و نشان می‌دهیم که همه‌ی این مدل‌ها با هم یکرخت هستند. ثابت می‌شود که تمام مدل‌های این هندسه یکریخت هستند.

در ادامه، رهیافت فضای جایروبرداری آبراهام اونگار را معرفی می‌کنیم ([۵۰، ۸، ۹، ۵۳، ۵۴]). جمع برداری در فضاهای مجرد یک عمل دوتایی جابه‌جایی و شرکت‌پذیر در یک گروه از بردارها است که همراه با یک ضرب عددی تشکیل یک فضای برداری می‌دهند. جمع نسبیتی اینشتین برای سرعت‌های مجاز (کمتر از سرعت نور) به طور مجرد یک عمل دوتایی جایروجابه‌جایی و جایروشرکت‌پذیر در یک جایروگروه (K-لوپ) از جایروبردارها (بردارهای هذلولوی) است که همراه با یک ضرب عددی تشکیل یک فضای جایروبرداری می‌دهند. فضاهای جایروبرداری در هندسه‌ی هذلولوی دقیقاً همان نقش فضاهای برداری را در هندسه‌ی اقلیدسی بازی می‌کنند.

صفحات مطلق عام، یعنی صفحات مطلق ناپیوسته و غیرارشمیدسی، به روش‌های گوناگونی رده‌بندی شده‌اند. برای مثال در [۸]، [۱۰]، [۱۶] و [۴] از چهارگوش‌های لامبرت-ساکری استفاده شده است.

همچنین صفحات مطلق در [۲۷] توسط دستگاههای مختصاتی و در [۸] این صفحات روی میدان‌های اقلیدسی رده‌بندی شده‌اند. در این رساله با معرفی مفهوم *شبه-انتها*(در [۸] با نام نقطه‌ی ایده‌ال)، یک رده‌بندی دیگر برای صفحات مطلق عام ارائه می‌کنیم ([۲]). یک شبه-انتها عبارتست از یک بافه از خطوط که دو به دو نقطه‌ی اشتراک و عمود مشترک نداشته باشند. اگر ω عدد اصلی تمام شبه-انتهاهایی باشد که یک خط مفروض در آن‌ها وجود دارد، در این صورت ω برای تمام خطوط برابر است و در نتیجه هر صفحه‌ی مطلق A دارای یک عدد اصلی منحصربه‌فرد $\omega_A := \omega$ است که می‌توان برای رده‌بندی صفحات مطلق به کار برده شود. برای حالت $\omega_A \neq ۰$، $\omega_A \geq ۲$. به ویژه حالت $\omega_A = ۲$ را صفحات شبه-هذلولوی می‌نامیم و نشان خواهیم داد که صفحات هذلولوی، به ویژه مدل بلترامی-کلاین در این رده قرار می‌گیرند ([۲]).
آبراهام اونگار در [۸، ۹] مفهوم جایرومساحت را بر اساس کاستی تعریف کرده است. اما با این رهیافت مساحت ویژگی جمع‌پذیری ندارد. رهیافت دیگر برای مساحت بر اساس ایده‌های کارتسل در [۱، ۱۸] بر اساس کاستی قابل بیان است. در این رساله بر اساس رهیافت کارتسل، مدل بلترامی-کلاین را به صورت تحلیلی روی دیسک باز واحد $\mathbb{D}$ از اعداد مختلط بیان کرده و به ویژه فرمولی برای بازتاب نقطه‌ای و جمع نسبیتی اینشتین به روش هندسی به دست می‌آوریم ([۷]). همچنین با ترکیب رهیافت‌های اونگار و کارتسل یک روش دقیق برای کاستی و مساحت در مدل بلترامی-کلاین خواهیم آورد. با توجه به ویژگی کاستی، با این رهیافت مساحت خاصیت جمع‌پذیری دارد ([۵]). به ویژه یک اثبات مقدماتی برای فرمول کاستی خواهیم آورد که در [۸](قضیه ۱۵) با نرم‌افزارهای ریاضی به دست آمده است ([۵]).
در ادامه با به کار بردن یکریختی بین میدان‌های مرتب $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $((۱,۱), \oplus, \otimes)$ به مثلثات در مدل بلترامی-کلاین می‌پردازیم که به طور کامل شبیه مثلثات در هندسه‌ی اقلیدسی است ([۶]).
در پایان برخی کاربردهای هندسه‌ی هذلولوی را در نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین بیان می‌کنیم.

تقدیم به

پدر و مادرم،

خواهران و برادرانم

سپاس گزاری...

سپاس و ستایش مخصوص خداوندی است که آفریدگار جهانیان است و عقل و دانش را زیور آدمی قرار داد تا اشرف مخلوقات باشد. خداوند منان را شاکرم که توانستم، با توکل بر او، این مقطع از زندگی را نیز با سلامتی و موفقیت پشت‌سر بگذارم.

بر دستان پر مهر مادرم و زحمتکش پدرم، دو اسطوره‌ی زندگی‌ام، بوسه می‌زنم که همواره حامی و پشتیبان من در تمام مراحل زندگی بوده‌اند. همچنین از خواهران و برادرانم که همواره مایه‌ی دلگرمی و نویدبخش ادامه‌ی راهم بوده‌اند سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم که از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر سیدقهرمان طاهریان، یک تشکر ویژه بکنم به خاطر همه‌ی درس‌هایی که در طول دوره‌ی ارشد و دکتر از ایشان یاد گرفته‌ام. همچنین از حمایت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان سپاسگزارم، چه در طول تحصیل و چه در زمانی که برای فرصت مطالعاتی عازم کشور آلمان شدم.

از استاد مشاور گرامیم، سرکار خانم دکتر اعظم اعتماد، به خاطر حمایت‌ها و راهنمایی‌هایشان در طول این دوره سپاسگزارم. همچنین بر خودم لازم می‌دانم از حمایت ایشان جهت اعزام به دوره‌ی فرصت مطالعاتی یک تشکر ویژه بکنم.

از استاد ارجمند، پروفسور هلموت کارتسل از دانشگاه پلی تکنیک مونیخ، به خاطر همه‌ی درس‌هایی که در دوره‌ی فرصت مطالعاتی که در خدمت ایشان بودم یاد گرفتم، قدردانی می‌کنم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از سرکار خانم دکتر سیلویا پیانا از دانشگاه کاتولیک برشیای ایتالیا، جهت قبول زحمت داوری رساله و دعوت‌های ایشان از بنده در طول دوره فرصت مطالعاتی به دانشگاه کاتولیک برشیا سپاسگزاری و قدردانی بکنم.

بر خود لازم می‌دانم از پروفسور بهروز میرزا از دانشکده‌ی فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان، سرکار خانم دکتر ملیحه یوسف‌زاده از گروه ریاضی دانشگاه اصفهان و جناب آقای دکتر محمدرضا رئوفی از گروه ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان جهت قبول داوری و بازخوانی رساله نهایت سپاس و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از جناب آقای دکتر فرید بهرامی، ریاست محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده، جهت هماهنگی و برگزاری جلسه‌ی دفاع از رساله صمیمانه تشکر می‌نمایم.

در پایان هم از تمامی دوستان عزیزم که مرا در این مدت یاری رساندند از صمیم قلب سپاسگزارم.

محفوظ رستم زاده

۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله، بعد از یک مرور تاریخی بر هندسه‌ی نااقلیدسی، به یادآوری بنداشت‌های هیلبرت برای صفحه‌ی اقلیدسی می‌پردازیم. سپس، صفحات مطلق با رهیافت کارتسل یادآوری می‌شوند. صفحات مطلق عام، یعنی صفحات مطلق ناپیوسته و غیرارشمیدسی، به روش‌های گوناگونی رده‌بندی شده‌اند ([۸]، [۱۰]، [۱۶]، [۴]، [۲۷]، [۸]). در این رساله با معرفی مفهوم *شبه-انتها*(در [۸] با نام نقطه‌ی ایده‌ال)، یک رده‌بندی دیگر برای صفحات مطلق عام ارائه می‌کنیم ([۲]). یک شبه-انتها عبارتست از یک بافه از خطوط که دو به دو نقطه‌ی اشتراک و عمود مشترک نداشته باشند. اگر ω عدد اصلی تمام شبه-انتهاهایی باشد که یک خط مفروض در آن‌ها وجود دارد، در این صورت ω برای تمام خطوط برابر است و در نتیجه هر صفحه‌ی مطلق A دارای یک عدد اصلی منحصربه‌فرد $\omega_A := \omega$ است که می‌توان برای رده‌بندی صفحات مطلق به کار برده شود. برای حالت $\omega_A \neq 0$، $\omega_A \geq 2$. به ویژه حالت $\omega_A = 2$ را صفحات شبه-هذلولوی می‌نامیم و نشان خواهیم داد که صفحات هذلولوی، به ویژه مدل بلترامی-کلاین در این رده قرار می‌گیرند ([۲]). مفاهیم K-لوپ و جایروگروه معرفی می‌شوند. سپس با معرفی فضاهای جایروبرداری، رهیافت فضای جایروبرداری آبراهام اونگار معرفی می‌شود. فضاهای جایروبرداری در هندسه‌ی هذلولوی دقیقاً همان نقش فضاهای برداری را در هندسه‌ی اقلیدسی بازی می‌کنند. هندسه‌ی هذلولوی کلاسیک (یعنی با در نظر گرفتن بنداشت پیوستگی) و چهار مدل معروف آن، مدل بلترامی-کلاین، مدل‌های پوانکاره و مدل $\mathbb{H}^n$ ارائه خواهند شد و نشان می‌دهیم که همه‌ی این مدل‌ها با هم یکرخت هستند. ثابت می‌شود که تمام مدل‌های این هندسه یکریخت هستند. آبراهام اونگار در [۸، ۹] مفهوم جایرومساحت را بر اساس کاستی تعریف کرده است. اما با این رهیافت مساحت ویژگی جمع‌پذیری ندارد. رهیافت دیگر برای مساحت بر اساس ایده‌های کارتسل در [۱، ۱۸] بر اساس کاستی قابل بیان است. در این رساله بر اساس رهیافت کارتسل، مدل بلترامی-کلاین را به صورت تحلیلی روی دیسک باز واحد $\mathbb{D}$ از اعداد مختلط بیان کرده و به ویژه فرمولی برای بازتاب نقطه‌ای و جمع نسبیتی اینشتین به روش هندسی به دست می‌آوریم ([۷]). همچنین با ترکیب رهیافت‌های اونگار و کارتسل یک روش دقیق برای کاستی و مساحت در مدل بلترامی-کلاین خواهیم آورد. با توجه به ویژگی کاستی، با این رهیافت مساحت خاصیت جمع‌پذیری دارد ([۵]). به ویژه یک اثبات مقدماتی برای فرمول کاستی خواهیم آورد که در [۸](قضیه ۱۵) با نرم‌افزارهای ریاضی به دست آمده است ([۵]). در ادامه با به کار بردن یکریختی بین میدان‌های مرتب $(\mathbb{R},+,\cdot)$ و $((1,1),\oplus,\otimes)$ به مثلثات در مدل بلترامی-کلاین می‌پردازیم که به طور کامل شبیه مثلثات در هندسه‌ی اقلیدسی است ([۶]). در پایان برخی کاربردهای هندسه‌ی هذلولوی را در نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: هندسه‌ی هذلولوی؛ مدل بلترامی-کلاین؛ صفحه‌ی مطلق؛ نظریه‌ی نسبیت خاص؛ K-لوپ؛ جایروگروه؛ مثلثات؛ مساحت

فصل ۱

مقدمه و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

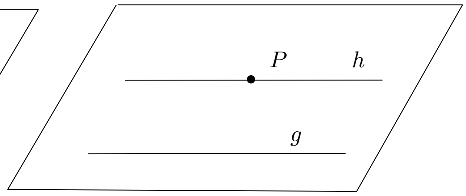
بنا به گفته‌ی «هرودت» [۸] قدیمی‌ترین سند تاریخی در مورد هندسه مربوط به مصر باستان است و این دانش ریشه در علم مساحی دارد. هندسه‌ی مصریان بر اساس مشاهدات تجربی و روش آزمون و خطا بود. یونانیانی مانند طالس ملطی (۵۴۶-۶۴۰ قبل از میلاد)، از راه استدلال قیاسی و منطق به آن پرداختند. هندسه‌ی بنداشتی یونانیان حدود ۳۰۰ تا ۵۰۰ سال پیش از میلاد مسیح به وسیله‌ی کتاب «اصول اقلیدس» (۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح) به تکامل رسید. یکی از بنداشت‌های معروف کتاب اصول اقلیدس (بنداشت پنجم)، موسوم به « بنداشت**توازی**» است:

«اگر خط راستی به وسیله‌ی دو خط راست دیگر به قسمی قطع شود که جمع زاویه‌های پدید آمده واقع در یک طرف کمتر از دو قائمه باشد آنگاه امتداد این دو خط، در همان طرفی که جمع زاویه‌های پدید آمده کمتر از دو قائمه است، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع خواهند کرد (شکل ۱).»

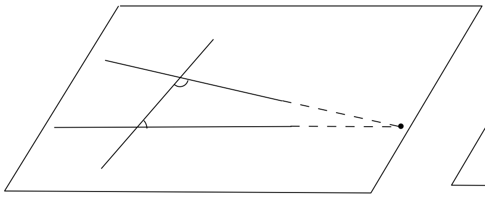
این بنداشت را اقلیدس در انتهای اصول خود قرار داد. از این رو می‌توان حدس زد که برای خودش نیز به درستی روشن نبود، آیا این اصل برای بنیان‌گذاری هندسه ضروری است؟ به عبارت دیگر مشخص نبود که آیا این اصل نتیجه‌ای از اصول دیگر است؟ در هر حال بسیاری از هندسه‌دانان یونانی این اصل را چندان شهودی و بدیهی نمی‌دانستند. از این رو سعی کردند که آن را به کمک اصول دیگر ثابت کنند. امکان اثبات اصل توازی بیش از ۲۰۰۰ سال در زمره‌ی پرسش‌های اساسی ریاضی بود که وقت زیادی از ریاضیدان‌ها صرف آن شده است. امروزه در بیشتر کتاب‌های آموزشی هندسه، اصل توازی را به شکل دیگری بیان می‌کنند: «برای هر خط دلخواه g و هر نقطه‌ی دلخواه P غیر واقع بر g، یک و تنها یک خط h وجود دارد که از P می‌گذرد و g را قطع نمی‌کند.»

دو خط متمایز h و g در فضا موازی هستند، هرگاه در یک صفحه واقع باشند و یگدیگر را قطع نکنند. به این ترتیب بنداشت توازی به شکل دیگری هم قابل بیان است:

«**برای هر خط دلخواه** g **و هر نقطه‌ی دلخواه** P **غیر واقع بر** g **یک و تنها یک خط** h **وجود دارد که از** P **می‌گذرد و با** g **موازی است** (شکل ۲).»



شکل ۲. معادل اصل پنجم اقلیدس



شکل ۱. اصل پنجم اقلیدس

تلاش برای اثبات اصل توازی با استفاده از سایر اصول اقلیدس منجر به کشف هندسه‌ی نااقلیدسی در قرن نوزدهم شد. پیش از آن در قرن هیجدهم «ساکری» و «لامبرت» با فرض گرفتن نقیض اصل توازی (با برهان خلف) بی آن که خود به اهمیت کارشان پی ببرند، گزاره‌های زیادی را از هندسه‌ی نااقلیدسی ثابت کرده بودند. این کار به امید یافتن تناقضی بر اساس نقیضِ اصل توازی بود تا به کمک آن اصل توازی اثبات شود. از اصل توازی نتیجه می‌شود که در یک چهارگوش با سه زاویه‌ی قائمه، زاویه‌ی چهارم نیز قائمه است. چهارگوش با سه زاویه‌ی قائمه را «**چهارگوش لامبرتی**» می‌نامند. اگر در یک چهارگوش لامبرتی زاویه‌ی چهارم با δ و زاویه‌ی قائمه با R نمایش داده شود، بدون فرض اصل توازی سه حالت $\delta < R$، $\delta = R$ و $\delta > R$ امکان‌پذیر است. ساکری و لامبرت نشان دادند که بر اساس بقیه‌ی اصول اقلیدس حالت $\delta > R$ امکان‌پذیر نیست. تلاش برای رد کردن حالت $\delta < R$ اگر چه خطای بسیاری از ریاضیدان‌ها در تاریخ ریاضی بود اما دست‌آوردهای مهمی برای هندسه‌ی نااقلیدسی داشت. بر اساس شواهد تاریخی، نخستین ریاضیدانِ برجسته‌ای که قانع شد اصل توازی بر اساس اصول دیگر قابل اثبات نیست «گاوس» بود. وی متوجه شد که بر اساس نقیضِ اصل توازی یک هندسه‌ی جدید و کاملاً منطقی به دست می‌آید. گاوس این هندسه را نااقلیدسی نامید. به این حقیقت «لباچفسکی» و «بولیایی» نیز دست یافتند و بر خلاف گاوس، نتایج خود را در سال ۱۸۳۰ منتشر نمودند. این ایده‌های نو به دلیل تفاوت زیاد با انگاره‌های پیشین توجه کسی را به خود جلب نکرد. تا این که پس از مرگ گاوس و انتشار نامه‌هایش، برخی از ریاضیدان‌های بزرگ آن زمان از جمله «بلترامی»، «کلاین» و «پوانکاره» هندسه‌ی غیر اقلیدسی را جدی گرفته و به بررسی بیشتر آن پرداختند. سرانجام کلاین در سال ۱۸۷۱ یک مدل تحلیلی برای هندسه‌ی غیر اقلیدسی بر اساس روشی موسوم به روش «کیلی-کلاین» ارائه کرد. با این مدل تمامی تردیدها در مورد وجود هندسه‌ی غیر اقلیدسی پایان یافت. این هندسه را کلاین «**هندسه‌ی هذلولوی**» نامید. به دلیل کارهای مهم بلترامی در این زمینه، این مدل را «**مدل بلترامی-کلاین**» می‌نامند. در فصل دوم به طور اساسی به این مدل پرداخته می‌شود. پس از آن، هندسه در قرن بیستم پیشرفت‌های چشمگیری داشت، زیرا که در آغاز این قرن با بازبینی مجدد بنیان‌های هندسه‌ی اقلیدسی، این علم از نو بدون نقص و شکاف

پایه‌گذاری شد. پی‌ریزی دقیق هندسه‌ی اقلیدسی به وسیله‌ی «هیلبرت» در سال ۱۸۹۹ برای نخستین بار در مراسم پرده‌برداری از بنای یادبود گاوس - وبر در گوتینگن مطرح شد. این شیوه پس از آن به الگویی برای تمام ریاضیات تبدیل شد. اگر چه کارهای بسیار مهمی پیش از آن برای هدایت مسیر پیشرفت هندسه‌ی مدرن صورت گرفت ولی هیلبرت نخستین کسی بود که این ایده‌ها را تبلور بخشید. از نوشته‌های هیلبرت کتاب «مبانی هندسه» شکل گرفت که تاکنون بارها به چاپ رسیده است. هیلبرت در سال ۱۹۰۳ به چاپ دوم این کتاب، مبانی هندسه‌ی نااقلیدسی (هذلولوی) را ضمیمه نمود. این کتاب تأثیر زیادی بر پیشرفت‌های بعدی هندسه داشت.

برای قرن‌های متمادی هندسه‌ی (اقلیدسی) و جبر (شرکت‌پذیر) به طور مستقل پیش می‌رفتند. تا اینکه در سال ۱۶۳۷ «رنه دکارت» ، ریاضیدان و فیلسوف معروف فرانسوی، با ارائه‌ی مفهوم مختصات در کتاب معروفش [۱] پیوند عمیق بین این دو شاخه از ریاضی را آشکار کرد. با ایده‌های دکارت هندسه هویتی جبری پیدا کرد و اشکال و اشیای هندسی تبدیل به معادلات و نامعادلات جبری شدند. این نظریه که به طور یکپارچه هندسه‌ی اقلیدسی را به طور جبری توصیف می‌کند و در آن فضاهای برداری نقش کلیدی دارند، امروزه هندسه‌ی تحلیلی نامیده می‌شود.

اما برای هندسه‌ی هذلولوی، به دلیل پیچیده بودن ساختارهای جبری وابسته به آن، رهیافت مشابهی وجود نداشت که مانند فضاهای برداری، جامع و سازگار باشد و بتواند مشابه هندسه‌ی اقلیدسی، هندسه‌ی هذلولوی را به طور یکپارچه توصیف کند. تا اینکه در سال ۱۹۸۹ «آبراهام اونگار» ثابت کرد که جمع وابسته به سرعت‌های مجاز (سرعت‌های کمتر از سرعت نور) در نظریه‌ی نسبیتِ خاصِ اینشتین، که همان جمع بردارها در مدل بلترامی-کلاین از هندسه‌ی هذلولوی است، تشکیل یک ساختار جبری موسوم به K-لوپ می‌دهد. K-لوپ قبلاً در سال ۱۹۶۴ توسط «هلموت کارتسل» در مطالعه‌ی رده‌بندی گروه‌های اکیداً k-متعدی شده بود. اونگار K-لوپ‌ها را به یک ساختار جبری کلی‌تر شبیه به گروه‌ها توسیع داد و آن را «جایروگروه» نامید. به دنبال آن، با الگو گرفتن از فضاهای برداری، مفهوم فضای جایروبرداری را معرفی کرد که یک توسیع از فضای برداری است و فقط خاصیت پخش‌پذیری عددی از فضاهای برداری را ندارد. یک فضای جایروبرداری همان نقش فضای برداری در هندسه‌ی اقلیدسی را برای هندسه‌ی هذلولوی ایفا می‌کند. نظریه‌ی فضاهای جایروبرداریِ اونگار جبر غیرشرکت‌پذیر و هندسه‌ی هذلولوی بولیایی و لباچفسکی را به هم مرتبط می‌کند و یک رهیافت کاملاً یکپارچه و شبیه به هندسه‌ی اقلیدسی برای توصیف هندسه‌ی هذلولوی و کاربردهای آن مطرح می‌کند. در نظریه‌ی اونگار بردارهای n-تایی اقلیدسی جای خود را به جایروبردارهای هذلولوی می‌دهند و در نتیجه هندسه‌ی هذلولوی تحلیلی را مشابه هندسه‌ی تحلیلی اقلیدسی خواهیم داشت. با این رهیافت، هندسه‌ی اقلیدسی در مکانیک نیوتن جای خود را به جایروهندسه‌ی هذلولوی در مکانیک نسبیت خاص اینشتین می‌دهد. ما در این رساله با ترکیب رهیافت اونگار و رهیافت کارتسل هندسه‌ی هذلولوی را، به ویژه برای مدل بلترامی-کلاین، مورد بررسی قرار می‌دهیم و به مفاهیم وابسته به این مدل و استخراج نتایج جدید می‌پردازیم.

---
[۱] *La Geometrie*

در ادامه‌ی این فصل ابتدا به هندسه‌ی اقلیدسی بر اساس بنداشت‌های هیلبرت پرداخته می‌شود. بعد از یادآوری تعریف صفحات مطلق بر اساس رهیافت کارتسل [۳]، مفهوم شبه-موازی و شبه-انتها را معرفی می‌کنیم، سپس با استفاده از این مفهوم به رده‌بندی صفحات مطلق عام می‌پردازیم که در اینجا عام به معنای این است که هیچ فرضی از بنداشت پیوستگی در نظر گرفته نمی‌شود. در ادامه‌ی بحث تعبیر هندسی جمع و روش‌های هندسی به دست آوردن آن را مطرح می‌کنیم. سپس مفاهیم K-لوپ، جایروگروه و فضاهای جایروبرداری معرفی می‌شوند.

در فصل دوم به هندسه‌ی هذلولوی کلاسیک و چهار مدل معروف آن پرداخته می‌شود. سپس کاستی، مساحت و مثلثات یادآوری می‌شوند.

در فصل سوم به صورت تحلیلی به مدل بلترامی-کلاین می‌پردازیم. با ترکیب رهیافت‌های کارتسل ([۱، ۳]) و اونگار ([۴۸، ۵۰، ۹، ۵۳، ۵۴]) به مفاهیم وابسته به مدل بلترامی-کلاین مانند جمع در این مدل و ساختارهای جبری وابسته به آن پرداخته می‌شود. با استفاده از مفهوم بازتاب‌ها جمع نسبیتی در مدل بلترامی-کلاین تعریف می‌شود و با رهیافتی هندسی ثابت می‌کنیم که که این جمع یک K-لوپ است. سپس با رهیافت اونگار، که از مفهوم فضای جایروبرداری استفاده می‌کند، به مثلثات در مدل بلترامی-کلاین می‌پردازیم. همچنین با استفاده از یکریختی بین میدان‌های مرتب $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ و $(\mathbb{I}, \oplus, \odot, <)$ یک رهیافت کاملاً مشابه هندسه‌ی اقلیدسی برای هندسه‌ی هذلولوی بر اساس جمع نسبیتی اینشتین به دست خواهیم آورد. در ادامه به مفهوم مساحت و کاستی در مدل بلترامی-کلاین پرداخته می‌شود.

در فصل چهارم برخی کاربردهای هندسه‌ی هذلولوی، به ویژه مدل بلترامی-کلاین، را در نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین بیان خواهیم کرد.

۲.۱ هندسه‌ی اقلیدسی

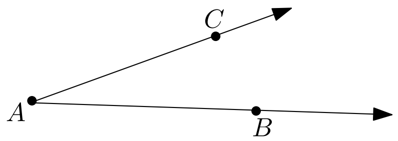
اقلیدس در کتاب معروف به «اصول» با استفاده از چند بُنداشت (اصل موضوع) و مفهوم اولیه، قضایای زیادی را در هندسه‌ی مقدماتی ثابت کرد. مهم‌ترین مفاهیم اولیه‌ی اصول اقلیدس «نقطه»، «خط» و رابطه‌ی «وقوع» هستند، اما در این کتاب مفاهیم دیگری مانند «بینیت»، «هم‌نهشتی» و حتی «حرکت» نیز به کار برده شده است. در این قسمت بدون اشاره به برداشت اقلیدس و معاصران وی از این مفاهیم و بدون بیان تعاریف وابسته، به صورت شهودی بنداشت‌های اقلیدس را بیان می‌کنیم. این بنداشت‌ها و مفاهیم وابسته به وسیله‌ی هیلبرت شکل دقیق پیدا کرد، که در ادامه‌ی این بخش مطرح خواهند شد. ابتدا به یادآوری چند تعریف مقدماتی در هندسه‌ی اقلیدسی می‌پردازیم.

در این بخش خطی که A و B بر آن واقع هستند با $\overline{AB}$ و پاره‌خط شامل آن‌ها با $[A, B]$ نشان داده می‌شوند.

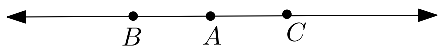
منظور از پاره‌خط $[A, B]$، مجموعه‌ی نقاط بین A و B و خود نقاط A و B است.

مجموعه‌ی نقاطی مانند X که برای دو نقطه‌ی ثابت و متمایز A و O، پاره‌خط‌های $[O, X]$ و $[O, A]$ هم‌نهشت

باشند، دایره نامیده می‌شود.
نیم خط $\overrightarrow{AB}$ با رأس A، مجموعه‌ی همه‌ی نقاط پاره‌خط $[A, B]$ و نقاط C واقع بر خط $\overline{AB}$ است به قسمی که B بین A و C قرار دارد.
یک زاویه به رأس A عبارت است از نقطه‌ی A و دو نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ با رأس A (شکل ۳).
نیم‌خط‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را متقابل گوییم هرگاه دو نیم‌خط متمایز به رأس A و زیرمجموعه‌هایی از خط $\overline{AB}$

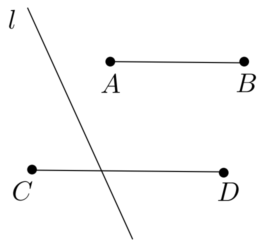


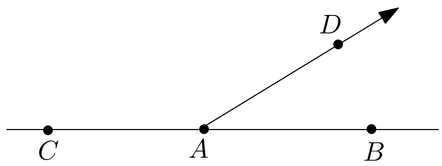
شکل ۳. زاویه‌ای به رأس A.



شکل ۴. $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متقابل هستند

باشند (شکل ۴).
فرض می‌کنیم l خطی دلخواه و A و B دو نقطه‌ی غیر واقع بر آن باشند. اگر $A = B$ یا اگر پاره‌خط $[A, B]$ شامل نقطه‌ای از l نباشد، گوییم A و B در یک طرف l قرار دارند. ولی اگر $A \neq B$ و پاره‌خط $[A, B]$، l را قطع کند گوییم A و B در دو طرف l قرار دارند (شکل ۵).
دو زاویه‌ی $\angle BAD$، $\angle CAD$ به رأس A را مکمل گوییم هرگاه نیم‌خط‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متقابل باشند (شکل ۶).





شکل ۶. $\angle BAD$ و $\angle CAD$ مکملند. شکل ۵. A و B یک طرف، C و D در دو طرف l هستند.

زاویه‌ی $\angle BAD$ را قائمه گوییم هرگاه با مکملش هم‌نهشت باشد.
اقلیدس پنج بنداشت به ترتیب زیر مطرح کرد.

اصل اول: برای هر دو نقطه‌ی متمایز P و Q خط یکتای l وجود دارد که P و Q بر آن واقع هستند.

اصل دوم: برای هر دو پاره‌خط $[A, B]$ و $[C, D]$ نقطه‌ی E وجود دارد که B بین A و E است و $[B, E]$ هم‌نهشت با $[C, D]$ است (به بیان شهودی هر پاره‌خط از یک خط مستقیم را می‌توان روی آن

خط به طور نامحدود امتداد داد).

اصل سوم: برای هر دو نقطه‌ی متمایز O و A دایره‌ای به مرکز O و شعاع $[O, A]$ وجود دارد.

اصل چهارم: همه‌ی زوایای قائمه با هم برابر هستند.

اصل پنجم: اگر خطی دو خط دیگر را به قسمی قطع کند که مجموع زوایای داخلی یک طرف آن کمتر از دوقائمه باشد آنگاه این دو خط در همان طرفی که مجموع زوایای داخلی از دوقائمه کمتر است همدیگر را قطع خواهند کرد.

۱.۲.۱ بنداشت‌های هیلبرت

همان طور که در مقدمه ذکر شد، در آغاز قرن بیستم با بازبینی مجدد بنیان‌های هندسه‌ی اقلیدسی، این علم از نو بدون نقص و شکاف پایه‌گذاری شد. پی‌ریزی دقیق هندسه‌ی اقلیدسی به وسیله‌ی «هیلبرت» برای نخستین بار در سال ۱۸۹۹ مطرح شد. در ادامه به دلیل اهمیت کارهای هیلبرت به طور مختصری به یادآوری آن‌ها پرداخته می‌شود. هیلبرت در کتاب مبانی هندسه‌ی خود پنج دسته بنداشت وقوع، بینیت، هم‌نهشتی، پیوستگی و توازی را مطرح کرد.

بنداشت‌های وقوع

با این بنداشت‌ها هندسه‌ای بنیان گذاشته می‌شود که «**هندسه‌ی وقوعی**» نامیده می‌شود. تنها اصطلاحات تعریف نشده در این هندسه «نقطه» و «خط» و تنها رابطه‌ی تعریف نشده «وقوع» بین یک نقطه و یک خط است. برای این اصطلاحات تعریف نشده سه بنداشت وقوع به ترتیب زیر برقرار هستند.

بنداشت اول وقوع: برای هر دو نقطه‌ی متمایز P و Q یک و فقط یک خط l وجود دارد که از P و Q می‌گذرد. خط یکتای شامل P و Q را با نماد $\overline{PQ}$ نمایش می‌دهیم.

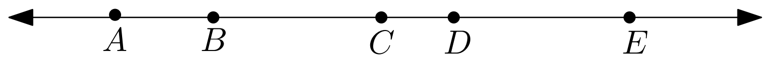
بنداشت دوم وقوع: برای هر خط l، حداقل دو نقطه‌ی متمایز واقع بر l وجود دارند.

بنداشت سوم وقوع: سه نقطه‌ی متمایز وجود دارند به قسمی که هر سه تای آن‌ها باهم بر یک خط واقع نیستند.

بنداشت‌های بینیت

اصطلاح تعریف نشده‌ی دیگر در دستگاه هیلبرت «بینیت» است که به وسیله‌ی بنداشت‌های بینیت توصیف می‌شود (اگر نقطه‌ی B بین نقاط A و C واقع باشد می‌نویسیم $A * B * C$).

بنداشت اول بینیت: اگر $A * B * C$ آنگاه A، B و C سه نقطه‌ی متمایز هستند که بر یک خط قرار دارند و $C * B * A$.



شکل ۷. نقاطی بین B و D موجودند و خط $\overline{BD}$ علاوه بر B و D نقاط دیگری هم دارد.

بنداشت دوم بینیت: برای دو نقطه‌ی متمایز B و D نقاطی مانند A، C و E بر $\overline{BD}$ قرار دارند به قسمی که $A * B * D$، $B * C * D$ و $B * D * E$.

بنداشت سوم بینیت: اگر A، B و C سه نقطه‌ی متمایز بر یک خط باشند آنگاه یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دوتای دیگر واقع است.

بنداشت چهارم بینیت (جداسازی): به ازای هر خط l و هر سه نقطه‌ی A و B و C غیرواقع بر l:

(۱) اگر نقاط A و B در یک طرف l و نقاط B و C در یک طرف l باشند آنگاه نقاط A و C هم در یک طرف l خواهند بود.

(۲) اگر نقاط A و B در دو طرف l و نقاط B و C در دو طرف l باشند آنگاه نقاط A و C در یک طرف l خواهند بود.

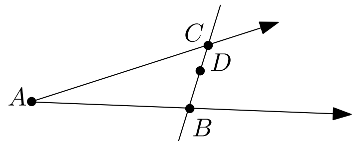
شکل ۸. بنداشت چهارم بینیت.

نقطه‌ی D را درون $\angle CAB$ گوییم، هرگاه D در همان طرف $\overrightarrow{AC}$ باشد که B در آن واقع است و D در همان طرف $\overrightarrow{AB}$ باشد که C در آن واقع است (شکل ۹).
نیم خط $\overrightarrow{AD}$ بین نیم‌خط‌های $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ واقع است، هرگاه $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ نیم‌خط‌های متقابل نباشند و D در درون $\angle CAB$ باشد (شکل ۱۰).

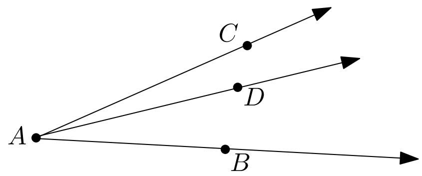
درون یک مثلث اشتراک درون‌های سه زاویه‌ی آن است. یک نقطه را واقع در بیرون مثلث گوییم هرگاه در درون مثلث و روی هیچ یک از اضلاع آن واقع نباشد.

بنداشت‌های هم‌نهشتی

در این بخش هم‌نهشتی را با نماد $\equiv$ نمایش می‌دهیم. هم‌نهشتی برای دو خط مفهومی اولیه است و به کمک آن می‌توان هم‌نهشتی برای مثلث‌ها و زاویه‌ها را تعریف کرد.



شکل ۹. نقطه‌ی D درون $\angle CAB$.



شکل ۱۰. $\overrightarrow{AD}$ بین $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ واقع است.

دو زاویه‌ی $\angle ABC$ و $\angle A'B'C'$ به رأس‌های B و B' را هم‌نهشت گوییم هرگاه برای نقاط D و D' به ترتیب روی $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{B'C'}$ و نقاط E و E' به ترتیب روی $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{B'A'}$، به قسمی که $[B,D] \equiv [B,' D']$ و $[B,E] \equiv [B',E']$، داشته باشیم $[E,D] \equiv [E',D']$.

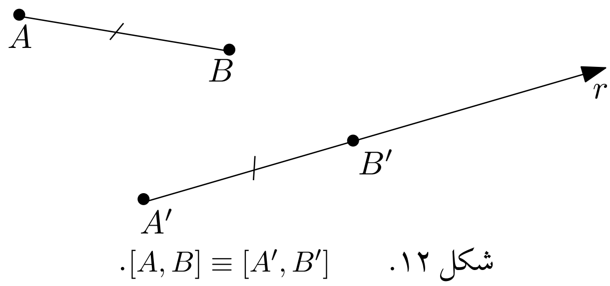
دو مثلث را هم‌نهشت گویند هرگاه بتوان یک تناظر یک به یک بین رئوس آن‌ها برقرار کرد به قسمی که اضلاع متناظر با هم و زاویه‌های متناظر با هم هم‌نهشت باشند و می‌نویسیم

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

یعنی A با D، B با E و C با F متناظر است. به همین ترتیب می‌توان هم‌نهشتی چهارضلعی‌ها و پنج‌ضلعی‌ها و ... را نیز تعریف کرد.

شکل ۱۱. زاویه‌های $\angle ABC$ و $\angle A'B'C'$ هم‌نهشت هستند.

بنداشت اول هم‌نهشتی: هرگاه A و B دو نقطه‌ی متمایز باشند و A' یک نقطه‌ی دلخواه باشد، آنگاه به ازای هر نیم‌خط r با رأس A' فقط یک نقطه مانند B' بر r وجود دارد که $A' \neq B'$ و $[A,B] \equiv [A',B']$.



شکل ۱۲. $[A,B] \equiv [A',B']$.

بنداشت دوم هم‌نهشتی: هرگاه $[A,B] \equiv [C,D]$ و $[A,B] \equiv [E,F]$ آنگاه $[C,D] \equiv [E,F]$، به علاوه هر پاره‌خط با خودش هم‌نهشت است.

بنداشت سوم هم‌نهشتی: هرگاه $A*B*C$، $A'*B'*C'$، $[A,B] \equiv [A',B']$ و $[B,C] \equiv [B',C']$، آنگاه $[A,C] \equiv [A',C']$.

بنداشت چهارم هم‌نهشتی: برای هر زاویه‌ی $\angle BAC$ و برای هر نیم‌خط $\overrightarrow{A'B'}$ یک و فقط یک نیم‌خط $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین $\overline{A'B'}$ وجود دارد چنان‌که $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (زاویه‌ای مشخص به طریق منحصر به فردی در یک طرف نیم‌خطی قرار می‌گیرد).

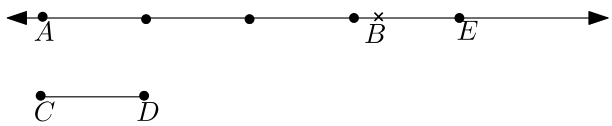
بنداشت پنجم هم‌نهشتی: هرگاه $\angle A \equiv \angle B$ و $\angle A \equiv \angle C$، آنگاه $\angle C \equiv \angle B$، علاوه بر این، هر زاویه با خودش هم‌نهشت است.

بنداشت ششم هم‌نهشتی(ض‌زض): هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی دیگر هم‌نهشت باشند، آنگاه دو مثلث هم‌نهشت هستند.

بنداشت‌های پیوستگی

این بنداشت‌ها برای رفع برخی از نقایص اصول اقلیدس لازم هستند.

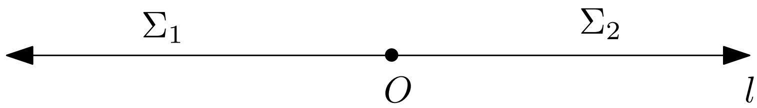
بنداشت ارشمیدس: اگر $[A,B]$ و $[C,D]$ دو پاره‌خط باشند، عددی مانند n وجود دارد به قسمی که هرگاه پاره‌خط $[C,D]$ را n بار بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ از A کنار هم قرار دهیم، آنگاه به نقطه‌ی E می‌رسیم که $n \cdot [C,D] \equiv [A,E]$ و نقطه‌ی B بین نقاط A و E است. مثلاً اگر $[A,B]$، π برابر واحد طول و $[C,D]$ به طول واحد باشد باید $[C,D]$ را دست کم ۴ بار متوالی بر $[A,B]$ بگذرانیم تا یک نقطه‌ی E بعد از نقطه‌ی B به دست آید.



شکل ۱۳. $[A,B]$، π برابر طول $[C,D]$ است.

بنداشت ددکیند: فرض کنیم مجموعه‌ی همه‌ی نقاط واقع بر یک خط l، از اجتماع دو مجموعه‌ی Σ_1 و Σ_2 ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2$) چنان تشکیل شده باشد که هیچ نقطه‌ی Σ_1 بین دو نقطه‌ی Σ_2 نباشد و بالعکس، آنگاه یک نقطه‌ی منحصر به فردی مانند O بر l وجود دارد که برای هر دو نقطه‌ی P_1 و P_2 مخالف O از l، P_1*O*P_2 اگر و تنها اگر $P_1 \in \Sigma_1$ و $P_2 \in \Sigma_2$ یا $P_1 \in \Sigma_1$ و $P_2 \in \Sigma_2$.

بنداشت ددکیند به نوعی عکس خاصیت جداسازی یعنی بنداشت چهارم بینیت است. می‌توان ثابت کرد که بنداشت ارشمیدس از بنداشت ددکیند و بنداشت‌های دیگر نتیجه می‌شود.



شکل ۱۴. نقطه‌ی O خط l را به دو مجموعه‌ی جدا از هم $\Sigma_۱$ و $\Sigma_۲$ تقسیم می‌کند.

بنداشت توازی هیلبرت: به ازای هر خط l و هر نقطه‌ی P غیرواقع بر آن حداکثر یک خط m وجود دارد به قسمی که از P می‌گذرد و با l موازی است. دو خط موازی l و m را با نماد $m \parallel l$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱. *گزاره‌های زیر معادل هستند:*

۱ . *اصل پنجم اقلیدس.*

۲ . *اصل توازی هیلبرت.*

۳ . *اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.*

۴ . *هرگاه خط t دو خط l و m را قطع کند و $m \parallel l$ و t بر l عمود باشد آنگاه m بر t عمود است.*

۵ . *مجموع زوایای هر مثلث برابر π است.*

قضیه ۲.۲.۱. **(ساکری-لژاندر)**: *مجموع اندازه‌های سه زاویه از هر مثلث حداکثر π است.*

قضیه ۳.۲.۱. *گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند:*

۱ . *یک مثلث وجود دارد که مجموع زوایای آن برابر π است.*

۲ . *مستطیل وجود دارد.*

۳ . *هر چهارگوش با سه زاویه‌ی قائمه یک مستطیل است.*

۳.۱ هندسه‌ی مطلق

در مورد بنداشت‌های صفحه‌ی مطلق سلیقه‌های متفاوتی وجود دارد و امروزه تعریف یکپارچه‌ای برای صفحه‌ی مطلق وجود ندارد. در هندسه‌ی کلاسیک بر اساس تعریف بولیائی، منظور از «**هندسه‌ی مطلق**» یا «**هندسه‌ی نتاری**» هندسه‌ای است که فقط با فرض بنداشت‌های هیلبرت در مورد وقوع، بینیت، هم‌نهشتی و پیوستگی به دست می‌آید. به این ترتیب بنداشت توازی جزء بنداشت‌های هندسه‌ی مطلق نیست. کارتسل هندسه‌ی مطلق را بر مبنای بنداشت‌های دیگر و به معنای عام‌تر تعریف می‌کند [۳]. به همین ترتیب وی صفحه‌ی هذلولوی را به شکل دیگری مطرح می‌کند. ولی ثابت می‌کند که صفحه‌ی هذلولوی مورد نظر وی با مدل بلترامی– کلاین و در نتیجه با همه‌ی مدل‌های صفحه‌ی هذلولوی کلاسیک یکریخت است.

۱.۳.۱ صفحه‌ی مطلق

در این بخش برخلاف بخش‌های قبلی، خطوط را با حروف بزرگ لاتین و نقاط را با حروف کوچک لاتین نمایش می‌دهیم. منظور از صفحه‌ی مطلق $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \alpha, \equiv)$ فضای وقوعی است که به وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی [۳] مشخص شده است. مجموعه‌های $\mathcal{P}$ و $\mathcal{L}$ به ترتیب مجموعه‌ی نقاط و خطوط، α ساختار ترتیب و $\equiv$ رابطه‌ی هم‌نهشتی است. در ادامه به یادآوری تعریف صفحه‌ی مطلق بر اساس رهیافت کارتسل [۳] می‌پردازیم.

فضای وقوعی. فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک مجموعه باشد که اعضای آن را **نقطه** و $\mathcal{L} \subseteq \mathbf{P}(\mathcal{P})$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}$ باشد که اعضای آن را **خط** می‌نامیم. زوج $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ را یک **فضای وقوعی** می‌نامیم، هر گاه بُنداشت‌های زیر برقرار باشند:

$\mathbf{I}_۱$. برای هر $x, y \in \mathcal{P}$ که $x \neq y$، **دقیقاً یک خط** $G \in \mathcal{L}$ **وجود دارد** که $x, y \in G$.

$\mathbf{I}_۲$. برای هر $G \in \mathcal{L}$ همواره $|G| \geq ۲$.

برای هر $x, y \in \mathcal{P}$، خط منحصر به فردی را که $\mathbf{I}_۱$ مشخص می‌کند با $\overline{x,y}$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in G$، اصطلاحاً می‌گوییم x بر خط G واقع است، x نقطه‌ای از G است یا x روی G قرار دارد.

زیرمجموعه‌ی $T \subseteq \mathcal{P}$ یک زیر فضا از $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ نامیده می‌شود هر گاه برای هر x, y که $x, y \in T$ و $x \neq y$ داشته باشیم $\overline{x,y} \subseteq T$.

مجموعه‌ی $\mathcal{T}$ را مجموعه‌ی تمام زیر فضاهای $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ در نظر می‌گیریم.

همانند بخش قبل، خطوط G و H را **موازی** می‌نامیم و می‌نویسیم $G \parallel H$، هر گاه $G = H$ یا $G \cap H = \emptyset$.

فضای وقوعی $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ را یک **صفحه‌ی آفین** می‌نامیم، هر گاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند:

$\mathbf{E}_۱$. حداقل سه نقطه‌ی ناهم‌خط در $\mathcal{P}$ وجود دارند.

$\mathbf{P}$. **(بنداشت توازی)** برای هر زوج نقطه و خط $(x, G) \in P \times \mathcal{L}$ که $x \notin G$، دقیقاً یک خط H وجود دارد که $x \in H$ و $G \cap H = \emptyset$. خط H را با نماد $\{x || G\}$ نیز نمایش می‌دهیم.

فضای وقوعی $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ همراه با بنداشت $\mathbf{E}_۱$، **صفحه‌ی تصویری** نامیده می‌شود، هر گاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند:

$\mathbf{I}_۳$. برای هر $G \in \mathcal{L}$ ، $|G| \geq ۳$.

$\mathbf{I}_۴$. برای هر $G, H \in \mathcal{L}$ ، $G \cap H \neq \emptyset$.

نگاشت بینیت و ترتیب

برای مجموعه‌ای مانند M به روش‌های متفاوت می‌توان یک ساختار ترتیبی معرفی کرد. به وسیله‌ی یک رابطه‌ی ترتیب $\leq$ و یا به وسیله‌ی یک رابطه‌ی بینیت. فرض کنیم $M^{۳'} := \{(x, y, z) \in M^۳ : x \neq y, z\}$.