بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی خواص برخی از گرافهای جبری و توسیع‌های آنها

استاد راهنما

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور

دکتر سعید اکبری

نگارنده

مهدی رضا خورسندی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

همسر عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم.

از جناب آقای دکتر سعید اکبری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر داریوش کیانی، جناب آقای دکتر حمید رضا میمنی، جناب آقای دکتر احمد عرفانیان و جناب آقای دکتر عباس جعفرزاده که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند تشکر نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و با تمام وجود از همسر عزیزم که در طی سالهای گذشته کمک زیادی به من کردند و مسیر زندگی‌ام را تغییر دادند، قدردانی می‌کنم.

مهدی رضا خورسندی
شهریور ۱۳۹۱

بسمه تعالی
مشخصات رساله تحصیلی دانشجویان
دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان بررسی خواص برخی از گرافهای جبری و توسیع‌های آنها

نام نویسنده مهدی رضا خورسندی
استاد راهنما دکتر کاظم خشیارمنش
استاد مشاور دکتر سعید اکبری

دانشکده علوم ریاضی **گروه** ریاضی محض	**رشته تحصیلی** ریاضی محض
تاریخ تصویب ۱۳۸۹/۰۴/۲۰	**تاریخ دفاع** ۱۳۹۱/۰۶/۲۸
مقطع تحصیلی دکتری	**تعداد صفحات** ۵۷

چکیده رساله هدف این رساله مطالعه خواص برخی از گرافهای نسبت داده شده به یک حلقه جابه‌جایی می‌باشد. مهمترین گرافهایی که در این رساله مورد توجه قرار گرفته‌اند، گراف مقسوم‌علیه صفر، گراف تام، گراف یکانی و گراف کیلی یکانی می‌باشند. در مورد گراف مقسوم‌علیه صفر، رفتار این گراف تحت توسیع اُور بررسی شده است. در بخش دیگر رساله، تمام حلقه‌هایی که گراف تام آن‌ها تصویری است، مشخص شده است. در پایان، گراف جدیدی به یک حلقه جابه‌جایی نسبت داده‌ایم؛ این گراف تعمیمی از گرافهای یکانی و کیلی یکانی می‌باشد و گرافهای یکانی و کیلی یکانی حالت خاصی از این گراف می‌باشند.

واژگان کلیدی توسیع اُور، مقسوم علیه صفر، قطر گراف، کمر گراف، گونه، صفحه تصویری، گراف مقسوم‌عیله صفر، گراف تام، گراف (کیلی) یکانی.

امضای استاد راهنما **تاریخ**

اظهارنامه

عنوان رساله : بررسی خواص برخی از گرافهای جبری و توسیع‌های آنها

اینجانب مهدی رضا خورسندی دانشجوی دوره دکتری دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده رساله تحت راهنمایی دکتر کاظم خشیارمنش متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد" و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

فهرست مطالب

پیش‌گفتار ۱

۱ نمادهای کلی و مفاهیم اولیه ۴

۲ گراف مقسوم‌علیه صفر توسیع اُور ۸

۱.۲ مقدمه ۸

۲.۲ مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه توسیع اُور ۱۰

۳.۲ مقایسه قطر و کمر گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ ۱۴

۳ گرافهای تام تصویری حلقه‌های جابه‌جایی ۲۱

۱.۳ مقدمه ۲۱

۲.۳ نتایج اصلی ۲۳

۴ تعمیمی از گرافهای یکانی و کیلی یکانی یک حلقه جابه‌جایی ۲۸

۱.۴ مقدمه ۲۸

۲.۴ خواص اساسی گراف $\Gamma(R,G,S)$ ۳۰

۳.۴ حالت $G=U(R)$ ۳۴

مراجع ۴۵

نمایه ۵۰

پیش‌گفتار

نسبت دادن یک گراف به یک ساختار جبری مانند نیم‌گروه، گروه و حلقه در سالهای اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته است. شاید بیان ساده‌تر خواص و دیگر ویژگی‌های این ساختارها به زبان نظریه گراف اولین انگیزه برای این کار باشد، ولی هدف اساسی حل مسائل ساختارهای جبری و نظریه گراف به کمک همدیگر است. گاهی اوقات هم مسائل جدیدی در ساختارهای جبری با استفاده از نظریه گراف به‌وجود آمده است.

در مورد یک حلقه جابه‌جایی مانند R، اولین بار بک[۱] در [۱۴]، مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر را معرفی نمود. در تعریف او همه اعضای حلقه R، به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته می‌شوند و دو عضو متمایز x و y در R به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر $xy = 0$. او در مقاله‌اش، رنگ‌آمیزی رأسی این گراف را مورد مطالعه قرار داد و حدس زد که عدد رنگی این گراف با عدد خوشه‌ای آن برابر است و در حالتهایی نشان داد این حدس درست است. اما بعد از آن اندرسون[۲] و نصیر[۳] در [۴]، حلقه‌ای از مرتبه ۳۲ ساختند که در گراف مقسوم‌علیه صفر منسوب به آن این دو مقدار یکی نبود. این انگیزه‌ای برای تعریف گراف هم‌بیشین بود که توسط شارما[۴] و باتوادکار[۵] در [۴۲]، معرفی شد. در این گراف تمام اعضای حلقه جابه‌جایی R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته می‌شود و دو عضو متمایز a و b از R به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر $aR + bR = R$. آن‌ها نشان دادند که در این گراف عدد رنگی و عدد خوشه‌ای یکسان است. شاید این مثالی جالب در نظریه گراف باشد که با استفاده از ساختارهای جبری چنین گرافهایی ارائه می‌شود. بعد از آن اندرسون[۶] و لیوینگستون[۷] در [۷]، تعریف گراف مقسوم‌علیه صفر

---

[1] Beck

[2] D.D. Anderson

[3] Naseer

[4] Sharma

[5] Bhatwadekar

[6] D.F. Anderson

را اصلاح کردند، به این ترتیب که رأس‌های تنها و رأس صفر را از مجموعه رئوس حذف کردند. آن‌ها نشان دادند که این گراف همبند با قطر حداکثر سه است. مقالات زیادی در مورد گراف مقسوم‌علیه صفر نوشته شده است. خواننده می‌تواند برای یک مرور جالب و تقریبا کامل در این زمینه به [۵]، مراجعه کند.

از جمله گرافهای مهم دیگری که به یک حلقه نسبت داده شده است، می‌توان به گراف تام یک حلقه جابه‌جایی اشاره کرد، که توسط اندرسون و بداوی[۸] در [۶]، تعریف شده است. در این گراف همه اعضای حلقه R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته می‌شوند و دو رأس متمایز a و b از R به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر $a+b$ مقسوم‌علیه صفری از R باشد. اهمیت این گراف استفاده از مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه است. زیر مجموعه مهم دیگری از حلقه R، که مورد توجه قرار گرفته است، مجموعه عناصر یکه آن است. نویسندگان در [۱۱]، گراف یکانی را تعریف و مورد مطالعه قرار دادند. در این گراف نیز همه اعضای حلقه R به عنوان مجموعه رئوس در نظر گرفته می‌شوند و دو رأس متمایز a و b به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر $a+b$ عضوی یکه از R باشد. در حالتی که R حلقه‌ای آرتینی باشد، این گراف متمم گراف تام است. گراف دیگری که در آن از مجموعه عناصر یکه حلقه R استفاده شده است، گراف کیلی[۹] یکانی است. تفاوت این گراف با گراف یکانی در این است که به جای جمع از تفاضل استفاده شده است؛ یعنی دو عضو متمایز a و b به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر $a-b$ عنصری یکه در R باشد. این گراف در مقالات [۳] و [۳۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. توجه کنید که گراف یکانی و گراف کیلی یکانی هر دو زیرگرافهایی از گراف هم‌بیشین می‌باشند.

مطالعه این گرافها در مسیرهای مختلفی رشد کرده است، یکی از مسیرها مطالعه رفتار گراف یک حلقه تحت توسیع‌هایی از آن مانند حلقه چندجمله‌ای‌ها و حلقه سری‌های توانی است. به طور مثال می‌توانید مقالات [۱۳] و [۳۳] را ببینید. یکی دیگر از موضوعات جذاب در این زمینه، نشاندن گراف‌های جبری روی سطوح است. مقالات زیادی به این موضوع پرداخته شده است. برای نمونه می‌توانید به [۲]، [۱۵]، [۱۸]، [۱۹]، [۴۳]، [۴۶]، [۴۷] و [۴۹] رجوع کنید.

در فصل اول رساله، مفاهیم اولیه و نمادهای کلی، که در تمام رساله مورد استفاده قرار گرفته است، را بیان می‌کنیم. در فصل دوم رساله، رفتار گراف مقسوم علیه صفر R را تحت توسیع دیگری از آن به‌نام توسیع اُور[۱۰] مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل سوم این رساله تصویری بودن گراف تام حلقه جابه‌جایی

[7] Livingston

[8] Badawi

[9] Cayley

[10] Öre

R را بررسی خواهیم کرد. همانطور که اشاره کردیم موضوع نشاندن گراف های جبری روی سطوح یکی از موضوعات جذاب و فعال است و صفحه تصویری یک سطح غیر جهت پذیر، از گونه غیر جهت‌پذیر یک می‌باشد. در فصل چهارم رساله، گراف جدیدی به حلقه R نسبت می‌دهیم. این گراف تعمیمی از گراف یکانی و گراف کیلی یکانی می‌باشد. همچنین این گراف زیر گرافی از گراف هم‌بیشین می‌باشد. خواص عمومی این گراف در این فصل مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

در پایان یادآوری می‌شود که مقالات [۱]، [۲۸] و [۲۹] مستخرج از این رساله می‌باشند.

فصل ۱

نمادهای کلی و مفاهیم اولیه

در این رساله R حلقه‌ای شرکت پذیر با عنصر همانی دو طرفه ناصفر است و در فصل سوم و چهارم R حلقه‌ای جابه‌جایی فرض می‌شود. مجموعه عناصر مقسوم‌علیه صفر از R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم و متشکل از همه عناصری مانند $a \in R$ است به طوری که عضو ناصفری مانند $b \in R$ موجود باشد که $ab = 0$ یا $ba = 0$. به‌علاوه $Z^*(R) = Z(R) - \{0\}$ تعریف می‌شود. همچنین $U(R)$ و $J(R)$ به ترتیب مجموعه عناصر یکه حلقه R و رادیکال جیکوبسن R می‌باشند. در صورتی‌که حلقه جابه‌جایی R دارای تنها یک ایده آل بیشین مانند $\mathfrak{m}$ باشد، آن را یک حلقه موضعی می‌نامیم و با $(R, \mathfrak{m})$ نمایش می‌دهیم.

حلقه اعداد صحیح به پیمانه n را با $\mathbb{Z}_n$ و میدان متناهی با q عضو را با $\mathbb{F}_q$ نمایش می‌دهیم. خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر در مورد نظریه حلقه‌های جابه‌جایی به [۱۲] و در مورد نظریه حلقه‌های غیرجابه‌جایی به [۲۴] مراجعه کنید.

منظور از یک گراف (غیر جهتدار) مانند Γ، سه‌تایی مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma), \psi_\Gamma)$، متشکل از مجموعه ناتهی $V(\Gamma)$ از رأس‌ها، مجموعه $E(\Gamma)$ (مجزا از $V(\Gamma)$) از یال‌ها و تابع ψ_Γ که به هر یال Γ یک زوج نامرتب از رئوس Γ (که ممکن است متمایز نباشند) نسبت می‌دهد، می‌باشد. فرض کنید e یک یال و u و v دو رأس باشند به‌طوری که $\psi_\Gamma(e) = uv$، در این‌صورت می‌گوییم e، u و v را به هم وصل می‌کند و u و v دو انتهای e می‌باشند. یالی که دو انتهای آن یکی است، طوقه نامیده می‌شود. گرافی که بدون طوقه باشد و هر دو رأس متمایز آن توسط حداکثر یک یال به هم متصل باشند، گراف

ساده نامیده می‌شود. در این حالت اگر $\psi_\Gamma(e) = uv$، آنگاه از نماد $e := \{u, v\}$ استفاده می‌کنیم و گراف ساده Γ با زوج مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ مشخص می‌شود . مجموعه همه رأس‌های متصل به رأس v در Γ با $N_\Gamma(v)$ یا به اختصار با $N(v)$ نشان داده می‌شود. $\deg(v)$، درجه رأس v در Γ ، تعداد یال‌هایی در Γ است که v بر آن واقع است. هر طوقه دو یال به حساب می‌آید. کمترین درجه رأس‌های Γ رابا $\delta(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. گراف Γ، r-منتظم است اگر به ازای هر $v \in \Gamma$، $\deg(v) = r$. گراف کامل، گرافی ساده است که تمام رأس‌های آن به هم متصل‌اند. گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم. گراف دوبخشی با بخشهای V_1 و V_2 گرافی است که مجموعه رأس‌های آن را بتوان به دو زیر مجموعه ناتهی V_1 و V_2 افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در V_1 و یک انتها در V_2 باشد. گراف دوبخشی ساده با بخشهای V_1 و V_2 که درآن هر رأس V_1 به هر رأس V_2 متصل است را گراف دوبخشی کامل می‌نامیم و با $K_{|V_1|,|V_2|}$ نمایش می‌دهیم. گرافهای به فرم $K_{1,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم، همچنین رأسی که به همه رئوس متصل است را مرکز آن می‌نامیم. یک تظریف از گراف ستاره گرافی ساده است به‌طوری که همه رأس‌های آن به یک رأس متصل باشند. مجموعه‌ای از رئوس گراف ساده Γ که دو به دو به هم وصل باشند را یک خوشه می‌نامیم. همچنین مجموعه‌ای از رئوس گراف ساده Γ که دو به دو به هم وصل نباشند، یک مجموعه مستقل نامیده می‌شود.

گشت (به طول k) در گراف Γ بین دو رأس x و y، دنباله متناوب

$$x = v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k = y$$

از رأس‌ها و یال‌های در Γ است به طوری که برای هر $0 \leqslant i < k$، v_i و v_{i+1} دو انتهای e_i هستند. در مواردی که ابهامی در بحث نباشد (به طور مثال زمانی‌که گراف Γ ساده باشد) این گشت با $v_0 - v_1 - \cdots - v_k$، نمایش داده می‌شود. اگر رئوس گشت متمایز باشند آن را مسیر می‌نامیم و با P_k نمایش می‌دهیم. اگر $P = v_0 - v_1 - \cdots - v_{k-1}$ یک مسیر باشد، آنگاه گشت $C := P + v_{k-1}v_0$ یک دور به طول k نامیده می‌شود و با C_k نمایش داده می‌شود. طول کوتاهترین دور مشمول در گراف Γ را کمر گراف Γ می‌نامیم و با $\mathrm{gr}(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم، در صورتی‌که Γ شامل دوری نباشد، $\mathrm{gr}(\Gamma) := \infty$ تعریف می‌شود. فاصله دو رأس متمایز x و y از Γ، طول کوتاهترین مسیر بین x و y در Γ تعریف می‌شود و با نماد $d_\Gamma(x, y)$ (و یا $d(x, y)$) نشان داده می‌شود و اگر مسیری بین x و y نباشد قرار می‌دهیم $d(x, y) := \infty$. همچنین برای هر رأس x در Γ، $d(x, x) := 0$ تعریف می‌شود. بزرگترین فاصله بین هر دو رأس Γ، قطر Γ نامیده می‌شود و با $\mathrm{diam}(\Gamma)$ نمایش داده می‌شود. اگر برای هر دو رأس متمایز x و y از گراف Γ مسیری از x به y موجود باشد، آنگاه Γ همبند نامیده می‌شود.

همچنین گرافی که همبند نباشد، ناهمبند نامیده می‌شود. واضح است که اگر Γ ناهمبند باشد، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma) = \infty$. عکس این مطلب در گرافهای متناهی (یعنی گرافهایی که مجوعه رئوس و مجموعه یال‌های آن متناهی باشد) نیز برقرار است.

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنید Δ و Γ دو گراف باشند. در این‌صورت

(آ) Δ و Γ را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $\Gamma \cong \Delta$، هرگاه توابع یک‌به‌یک و پوشایی مانند $\theta : V(\Delta) \longrightarrow V(\Gamma)$ و $\phi : E(\Delta) \longrightarrow E(\Gamma)$ موجود باشند به‌طوری که $\psi_\Delta(e) = uv$ اگر و فقط اگر $\psi_\Gamma(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$.

(ب) گراف Δ را زیرگرافی از گراف Γ گوییم؛ هرگاه $V(\Delta) \subseteq V(\Gamma)$، $E(\Delta) \subseteq E(\Gamma)$ و ψ_Δ تحدید تابع ψ_Γ روی $E(\Delta)$ باشد. همچنین، اگر تمام یال‌های گراف Γ که دو انتهایشان در زیرگراف Δ است، در Δ نیز واقع باشند، آنگاه Δ زیرگراف القایی از گراف Γ نامیده می‌شود. به‌علاوه، اگر Δ با زیرگرافی از Γ یکریخت باشد، آنگاه Δ زیرگرافی از Γ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو گراف ساده با مجموعه رئوس مجزا باشند. در این‌صورت

(آ) اجتماع Γ_1 و Γ_2 که آن را با نماد $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعه رئوس $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2)$ و مجموعه یال‌های $E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2)$ است. همچنین اگر گراف Γ متشکل از k ($k \geqslant 2$) کپی مجزا از گراف H باشد، آنگاه می‌نویسیم $\Gamma := kH$.

(ب) حاصلضرب دکارتی $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ گرافی با مجموعه رئوس $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$ است که در آن دو رأس متمایز (u_1, u_2) و (v_1, v_2) به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر $u_1 = v_1$ و $\{u_2, v_2\} \in E(\Gamma_2)$ یا $v_2 = u_2$ و $\{u_1, v_1\} \in E(\Gamma_1)$.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو گراف باشند. در این‌صورت حاصلضرب تانسوری $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ گرافی ساده با مجموعه رئوس $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$ است و دو رأس متمایز (u_1, u_2) و (v_1, v_2) به هم متصل‌اند اگر و فقط اگر u_1 و v_1 در Γ_1 و u_2 و v_2 در Γ_2 به هم متصل باشند.

مثال ۴.۰.۱. فرض کنید Γ گرافی ساده و دوبخشی با بخشهای V_1 و V_2 باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $K_2 \otimes \Gamma \cong 2\Gamma$. فرض کنید $V(K_2) = \{a, b\}$ و $E(K_2) = \{\{a, b\}\}$. زیرگراف القایی Γ_1 از $K_2 \otimes \Gamma$ با مجموعه رئوس $\{a\} \times V_1 \cup \{b\} \times V_2$ و زیرگراف القایی Γ_2 از $K_2 \otimes \Gamma$ با مجموعه

رئوس $V_2 \times \{a\} \cup V_1 \times \{b\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $K_2 \otimes \Gamma$ اجتماع مجزای Γ_1 و Γ_2 است. همچنین Γ_1 و Γ_2 هر دو با Γ یکریخت هستند. بنابراین $2\Gamma \cong \Gamma \otimes K_2$.

تعریف ۱.۰.۵. (آ) یک زیرتقسیم یالی در گراف ساده Γ، به این معنی است که یک رأس جدید مانند w روی یک یال مانند $e = \{u, v\}$ در Γ قرار می‌دهیم . به عبارت دقیق‌تر ابتدا یال $e = \{u, v\}$ در Γ را حذف می‌کنیم و سپس رأس جدید w و یال‌های $\{u, w\}$ و $\{w, v\}$ را اضافه می‌کنیم. یک زیرتقسیم گراف ساده Γ گرافی است که از Γ با دنباله‌ای متناهی از زیرتقسیم‌های یالی به دست آید.

(ب) دو گراف ساده Γ_1 و Γ_2 را همسانریخت گوییم هر گاه هر دو زیرتقسیمی از یک گراف ساده باشند.

خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر در مورد نظریه گراف به [۱۶] مراجعه کند.

فصل ۲

گراف مقسوم‌علیه صفر توسیع اُور

در این فصل در حالتی که R یک حلقه جابه‌جایی و α-سازگار است قطر و کمر گراف‌های مقسوم صفر $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ را مقایسه خواهیم کرد. همچنین در حالتی که R یک حلقه برگشت‌پذیر و (α,δ)-سازگار است، مقسوم علیه‌های صفر توسیع اُور $R[x;\alpha,\delta]$ را شناسایی خواهیم کرد.

۱.۲ مقدمه

مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه جابه‌جایی اولین بار توسط بک در [۱۴] معرفی شد. او در این پژوهش همه عناصر حلقه را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته بود. کار او توسط اندرسون و نصیر ادامه یافت (رجوع کنید به [۴]). اندرسون و لیوینگستون در [۷] ، گراف مقسوم‌علیه صفر که در آن رئوس گراف مقسوم‌علیه‌های صفر که ناصفر باشند را معرفی و مطالعه کردند. در این تعریف رئوس تنها و رأس صفر که به همه رئوس متصل است در نظر گرفته نمی‌شوند. این مفهوم توسط ردموند[1] به حلقه‌های غیر جابه‌جایی تعمیم یافت (رجوع کنید به [۴۰]) . مقالات زیادی در دهه گذشته در مورد گراف مقسوم‌علیه صفر نوشته شده است (رجوع کنید به [۲]، [۴] ، [۸] ، [۱۴] ، [۳۷] ، [۴۰] و [۵۰]). خواننده می‌تواند برای یک مرور جالب در مورد کارهای انجام شده به مرجع [۵] مراجعه کند.

فرض کنید R یک حلقه باشد. گراف مقسوم‌علیه صفر جهتدار $\Gamma(R)$ گرافی با مجموعه رئوس

[1] Redmond

$Z^*(R)$ است که $x \to y$ یک یال بین رئوس متمایز x و y می‌باشد اگر وفقط اگر $xy = ۰$. حلقه R را برگشت‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$ ، $ab = ۰$ ایجاب کند که $ba = ۰$. بنابراین روی حلقه برگشت‌پذیر R گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$ گرافی ساده (غیر جهت دار) در نظر گرفته می‌شود. در این حالت با توجه به [۴۰، قضیه ۳.۲] ، $\Gamma(R)$ گرافی همبند با قطر حداکثر سه است.

آکستل[۲] ، کویکندال[۳] ، استیکلز[۴] در [۱۳] ، به مطالعه رفتار قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه جابه‌جایی تحت توسیع‌های حلقه چندجمله‌ای‌ها و حلقه سری‌های توانی پرداختند. همچنین لوکاس[۵] در [۳۳] ، کار آنها را ادامه داد و مطالعه کامل‌تری در مورد قطر گراف مقسوم‌علیه صفر و توسیع‌های آن به حلقه چندجمله‌ای‌ها وحلقه سری‌های توانی انجام داد. علاوه بر این، اندرسون و مولی[۶] در [۸] ، به مطالعه قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه جابه‌جایی پرداختند و در حالتهای خاص نوع حلقه و گراف وابسته به آن را مشخص کردند و با استفاده از آن در مورد گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه چندجمله‌ای و حلقه سری‌های توانی به بحث پرداختند .

توسیع دیگری که در این فصل مورد توجه قرار گرفته است توسیع اُور است. فرض کنید $\alpha : R \longrightarrow R$ یک درون‌ریختی[۷] حلقه‌ای باشد و $\delta : R \longrightarrow R$ یک تابع α-مشتق باشد، یعنی $\delta : R \longrightarrow R$ یک نگاشت جمعی است به‌طوری که برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$. توسیع اُور $R[x; \alpha, \delta]$ از حلقه R، حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در R است و جمع و ضرب به صورت معمولی تعریف می‌شود با این تفاوت که به ازای هر $r \in R$، ضرب r در متغیر مستقل x از قانون زیر پیروی می‌کند:

$$xr = \alpha(r)x + \delta(r).$$

در حالت خاص که δ تابع صفر باشد حلقه $R[x; \alpha, \delta]$ با $R[x; \alpha]$ نمایش داده می‌شود و حلقه چندجمله‌ای‌های اُریب نامیده می‌شود.

هدف این فصل مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر $R[x; \alpha, \delta]$ می‌باشد. بنابراین در قدم اول باید مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه $R[x; \alpha, \delta]$ شناسایی شوند که در بخش دوم این فصل به آن پرداخته می‌شود

[2] Axtell

[3] Coykendall

[4] Stickles

[5] Lucas

[6] Mulay

[۷] هر همریختی مانند $\alpha : R \longrightarrow R$ را یک درون‌ریختی می‌نامیم. توجه کنید که $\alpha(۱) = ۱$ فرض می‌شود.

و در بخش سوم به مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر $R[x;\alpha,\delta]$ می‌پردازیم.

۲.۲ مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه توسیع اُور

مک‌کوی[۸] در [۳۶] نشان داد که برای حلقه جابه‌جایی R، چندجمله‌ای $f(x)\in R[x]$ یک مقسوم‌علیه صفر است اگر وفقط اگر عنصر ناصفر $r\in R$ موجود باشد به‌طوری که $rf(x)=0$. بعد از آن نیلسن[۹] در [۳۸] قضیه فوق را به حلقه‌های برگشت‌پذیر تعمیم داد و نشان داد که قضیه فوق حتی در حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی[۱۰] نیز صحیح نمی‌باشد. نیلسن حلقه‌هایی را که در قضیه مک‌کوی صدق کنند را حلقه‌های مک‌کوی نامید. هدف ما در این بخش تعمیم نتایج آنها به حلقه‌های توسیع اُور است. به همین منظور در ابتدا باید مفهوم حلقه‌های (α,δ)-مک‌کوی که تعمیم طبیعی از مفهوم حلقه‌های مک‌کوی است را شرح دهیم.

تعریف ۱.۲.۲. (رجوع کنید به [۹] و [۳۸].) فرض کنید α یک درون‌ریختی حلقه‌ای و δ یک تابع α-مشتق در حلقه R باشند. دراین‌صورت

(آ) حلقه R، α-سازگار گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $a,b\in R$، $ab=0$ اگر وفقط اگر $a\alpha(b)=0$.

(ب) حلقه R، δ-سازگار است هرگاه برای هر $a,b\in R$، اگر $ab=0$ آنگاه $a\delta(b)=0$.

(پ) حلقه R را (α,δ)-سازگار می‌نامیم هرگاه α -سازگار و δ-سازگار باشد.

(ت) حلقه R، (α,δ)-مک‌کوی چپ گفته می‌شود در صورتی‌که $f(x),g(x)\in R[x;\alpha,\delta]$ دو چندجمله‌ای ناصفر باشد به‌طوری که $f(x)g(x)=0$، آنگاه عنصر نا صفر $r\in R$ موجود باشد به‌طوری که $rg(x)=0$. به طور مشابه R، (α,δ)-مک‌کوی راست است هرگاه $f(x),g(x)\in R[x;\alpha,\delta]$ دو چندجمله‌ای ناصفر باشد به طوری که $f(x)g(x)=0$، آنگاه عنصر ناصفر $s\in R$ موجود باشد به‌طوری که $f(x)s=0$. همچنین اگر R، (α,δ)-مک‌کوی

[8] McCoy

[9] Nielsen

[10] حلقه R را نیم‌جابه‌جایی می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b\in R$، تساوی $ab=0$ ایجاب کند که $aRb=0$. بدیهی است که حلقه‌های برگشت‌پذیر نیم جابه‌جایی می‌باشند.

راست و چپ باشد آنگاه آن را (α,δ)-مک‌کوی می‌نامیم. در حالت خاص که δ تابع صفر باشد حلقه R را α-مک‌کوی و در صورتی‌که α نیز همانی باشد، R را یک حلقه مک‌کوی می‌نامیم.

لم ۲.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه (α,δ)-سازگار باشد و $a,b\in R$. در این‌صورت $ab=0$ ایجاب می‌کند که برای هر عدد صحیح نامنفی i، $ax^ib=0$.

برهان. به‌وضوح حکم برای $i=0$ برقرار است. حال فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد و برای هر $a,b\in R$، $ab=0$ ایجاب کند که $ax^{n-1}b=0$. بنابر استقرا کافی است نشان دهیم برای هر $a,b\in R$، $ab=0$ ایجاب می‌کند که $ax^nb=0$. در حلقه توسیع اُور $R[x;\alpha,\delta]$ داریم

$$\begin{aligned}ax^nb&=ax^{n-1}xb\\&=ax^{n-1}(\alpha(b)x+\delta(b))\\&=ax^{n-1}\alpha(b)x+ax^{n-1}\delta(b).\end{aligned}$$

چون $ab=0$ و R یک حلقه (α,δ)-سازگار است، $a\alpha(b)=0=a\delta(b)$. همچنین بنابر فرض استقرا $ax^{n-1}\alpha(b)=0=ax^{n-1}\delta(b)$ و در نتیجه $ax^nb=0$. $\square$

لم ۳.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه برگشت‌پذیر و (α,δ)-سازگار باشد. همچنین $a\in R$ و $h(x)\in R[x;\alpha,\delta]$. در این‌صورت $ah(x)=0$ اگر وفقط اگر $h(x)a=0$.

برهان. فرض کنید $h(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$ یک چندجمله‌ای در $R[x;\alpha,\delta]$ باشد به‌طوری که $ah(x)=0$. در این‌صورت برای هر $0\leqslant i\leqslant n$، $ac_i=0$. چون R برگشت‌پذیر است، $c_ia=0$ و در نتیجه لم ۲.۲.۲ ایجاب می‌کند که برای هر $0\leqslant i\leqslant n$، $c_ix^ia=0$. بنابراین $h(x)a=0$. بالعکس، فرض کنید $h(x)a=0$. چون

$$h(x)a=c_n\alpha^n(a)x^n+k(x),$$

که در آن $k(x)$ یک چندجمله‌ای با درجه کوچکتر از n است، $c_n\alpha^n(a)=0$. بنا به α-سازگاری R، $c_na=0$ و در نتیجه بنابر لم ۲.۲.۲، $c_nx^na=0$. قرار دهید $h'(x):=h(x)-c_nx^n$. در این‌صورت $h'(x)a=0$. حال با استفاده از استقرا روی درجه $h(x)$، $ah'(x)=0$. بعلاوه از $c_na=0$ نتیجه می‌شود که $ac_n=0$. بنابراین $ah(x)=ah'(x)+ac_nx^n=0$. $\square$

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه برگشت‌پذیر و (α,δ)-سازگار باشد. در این‌صورت، R، (α,δ)-مک‌کوی است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم R، (α,δ)-مک‌کوی چپ است. بدین منظور فرض کنید $f(x)=\Sigma_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\Sigma_{j=0}^{m}b_jx^j$ چندجمله‌ای‌های ناصفر در $R[x;\alpha,\delta]$ باشد به‌طوری که $f(x)g(x)=0$ و $f(x)$ دارای کمترین درجه در بین چندجمله‌ای‌های ناصفر $h(x)\in R[x;\alpha,\delta]$ باشد به‌طوری که $h(x)g(x)=0$. توجه کنید

$$f(x)g(x)=a_n\alpha^n(b_m)x^{n+m}+k(x),$$

که در آن $k(x)$ یک چندجمله‌ای در $R[x;\alpha,\delta]$ با حداکثر $n+m-1$ است. تساوی $f(x)g(x)=0$ ایجاب می‌کند که $a_n\alpha^n(b_m)=0$. چون R، α سازگار است، $a_nb_m=0$ و در نتیجه $b_ma_n=0$. به‌علاوه، چون $b_mf(x)g(x)=0$ و $\deg(b_mf(x))<\deg(f(x))$ ، $b_mf(x)=0$. حال با استفاده از استقرا فرض کنید برای اعداد صحیح نامنفی i و k با شرط $0\leqslant i<k$ و $1\leqslant k\leqslant m$ داشته باشیم $b_{m-i}f(x)=0$. چون

$$f(x)g(x)=f(x)\sum_{j=0}^{m-k}b_jx^j+\sum_{j=m-k+1}^{m}f(x)b_jx^j=0,$$

با استفاده از فرض استقرا و لم ۳.۲.۲، $\sum_{j=0}^{m-k}f(x)b_jx^j=0$. بنابراین $a_n\alpha^n(b_{m-k})=0$. دوباره چون R، α-سازگار است، $a_nb_{m-k}=0$ و در نتیجه $b_{m-k}a_n=0$. حال چون $b_{m-k}f(x)g(x)=0$ و $\deg(b_{m-k}f(x))<\deg(f(x))$ ، $b_{m-k}f(x)=0$ و این گام بعدی استقرا را کامل می‌کند. بنابراین برای هر $0\leqslant i\leqslant m$، $b_{m-i}f(x)=0$ و بنابر برگشت‌پذیری R، $a_ng(x)=0$ و $a_n\neq 0$. توجه کنید که با توجه به انتخاب $f(x)$، $n=0$. با استفاده از یک روش مشابه و استفاده از لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲ می‌توان نشان داد که R، (α,δ)-مک‌کوی راست نیز می‌باشد. □

نتیجه زیر نشان می‌دهد که قضیه ۴.۲.۲، تعمیم طبیعی یکی از نتایج اصلی در [۳۸] است.

نتیجه ۵.۲.۲. ([۳۸، قضیه ۲]) اگر R یک حلقه برگشت‌پذیر باشد، آنگاه R، مک‌کوی است.

برهان. فرض کنید α تابع همانی و δ نگاشت صفر باشد. در این‌صورت $R[x;\alpha,\delta]=R[x]$ و R، (α,δ)-سازگار است. حال بنابر قضیه ۴.۲.۲، R مک‌کوی است. □

در لم ۶.۲.۲ و تبصره ۷.۲.۲ ، به مطالعه دقیق‌تر مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ می‌پردازیم.

لم ۶.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه برگشت‌پذیر و α-سازگار باشد، همچنین فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ دو چندجمله‌ای در $R[x;\alpha,\delta]$ باشند. اگر $f(x)g(x)=0$ آنگاه برای هر $0\leqslant i\leqslant n$، $a_{n-i}b_m^{i+1}=0$.

برهان. فرض کنید $f(x)g(x)=a_n\alpha^n(b_m)x^{n+m}+h(x)$، که $h(x)$ یک چندجمله‌ای در $R[x;\alpha,\delta]$ با درجه حداکثر $n+m-1$ است. چون $f(x)g(x)=0$، $a_n\alpha^n(b_m)=0$ و در نتیجه $a_nb_m=0$. حال به استقرا فرض کنید برای هر j که $j<k$، $a_{n-j}b_m^{j+1}=0$. کافی است نشان دهیم $a_{n-j}b_m^{j+1}=0$. چون R برگشت‌پذیر است، برای هر $j<k$، $b_m^{j+1}a_{n-j}=0$. حال

$$b_m^kf(x)g(x)=(b_m^k\sum_{i=0}^{n-k}a_ix^i)g(x)=0.$$

بنابراین $b_m^ka_{n-k}\alpha^{n-k}(b_m)=0$. چون R، α-سازگار است، $b_m^ka_{n-k}b_m=0$. مجددا چون R برگشت‌پذیر است، $a_{n-k}b_m^{k+1}=0$. □

تبصره ۷.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه برگشت‌پذیر و (α,δ)-سازگار باشد. همچنین فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای ناصفر در $R[x;\alpha,\delta]$ باشند به‌طوری که $f(x)g(x)=0$. بنابر قضیه ۴.۲.۲، R، (α,δ)-مک‌کوی چپ است یعنی عنصر ناصفر $r\in R$ وجود دارد بطوری که $rg(x)=0$. می‌خواهیم نشان دهیم r را می‌توان از ایده آل چپ تولید شده توسط ضرایب $f(x)$ انتخاب کرد. بنابر لم‌های ۳.۲.۲ و ۶.۲.۲، عدد صحیح نامنفی ℓ وجود دارد به‌طوری که $f(x)b_m^{\ell}\neq 0$ و $f(x)b_m^{\ell+1}=0$. قرار دهید $a(x):=b_m^{\ell}f(x)$ و $b(x):=g(x)-b_mx^m$. (توجه کنید که $a(x)\neq 0$ و در صورتی‌که $b(x)=0$، به کمک لم ۳.۲.۲، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. لذا می‌توان فرض کرد که $b(x)\neq 0$). در این‌صورت $a(x)b(x)=0$. حال با استفاده از استقرا روی درجه $g(x)$، عنصر ناصفر r در ایده آل چپ تولید شده توسط ضرایب $a(x)$ موجود است به‌طوری که $rb(x)=0$. چون $f(x)b_m^{\ell+1}=0$، بنابر لم ۳.۲.۲، $b_ma(x)=0$ و در نتیجه $rb_m=0$ بنابراین $rg(x)=0$ و r در ایده‌آل چپ تولید شده توسط ضرایب $f(x)$ نیز می‌باشد.

گزاره ۸.۲.۲. فرض کنید $R[x;\alpha,\delta]$ یک حلقه برگشت‌پذیر باشد و $a,b\in R$. در این‌صورت $ab=0$ اگر و فقط اگر $a\alpha(b)=0=a\delta(b)$.