بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی گرایش آنالیز

عنوان

قضیه ارگودیک غیرخطی در گوی هیلبرت

پژوهشگر

لاله آیینی

استاد راهنما

دکتر شهرام سعیدی

استاد مشاور

دکتر محمدعلی اردلانی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. ما حصل آموخته هایم را

تقدیم می کنم

به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است.

و درود فراوان به روح پاک پدر بزرگوارم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

و سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم

که سجده ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارش لحظه های مهربانی را به من آموخت.

و خواهرانم

که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

و برادرانم

که وجودشان مایه دلگرمی من می باشد.

ره آوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه، غبار خستگیتان را بزداید.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر شهرام سعیدی که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است. و از جناب آقای دکتر محمد علی اردلانی که زحمت مشاوره پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی آن اینجانب را راهنمایی نمودند کمال امتنان را دارم.

معلا مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

چکیده

این پایان‌نامه در مورد دوگان قضیه ارگودیک میانگین برای نگاشتهایی است که براساس تبدیل موبیوس و ساختار نیم‌گروه حاصل شده است. در مجموع به بررسی دوگان ارگودیک میانگین یک نیم‌گروه پیوسته‌ی غیرخطی از خودنگاشت‌های ρ- غیرانبساطی روی گوی واحد باز $\mathbb{B}$ درفضای هیلبرت مختلط پرداخته می‌شود که دارای متر هایپربولیک ρ است.

واژگان کلیدی: حدباناخ [1] ، تقریبا همگرا، متر هایپربولیک، نیم‌گروه، قضیه ارگودیک میانگین.

[1] Banach Limit

فهرست مطالب

پیشگفتار

در مقالات متعددی روی قضیه ارگودیک میانگین بحث شده است که اکثریت آنها مبتنی بر تغییر فضا و ساختار نیم‌گروه می‌باشند. از جمله: در سال ۱۹۷۵ بایون [۲] [۵۸]، در فضای هیلبرت حقیقی نشان داده است که قضیه ارگودیک میانگین برای خودنگاشت غیر انبساطی T، روی زیرمجموعه محدب و بسته که خودنگاشت T دارای نقطه ثابت می‌باشد، همگرای ضعیف به نقطه ثابتی از T است. در سالهای ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹ براک [۳]، بایون و راش [۴] [۷]، با تعمیم در فضای مورد بحث به فضای باناخ محدب یکنواخت نشان داده‌اند که قضیه ارگودیک میانگین برای خودنگاشت غیر انبساطی T که دارای نقطه ثابت است، برقرار می‌باشد. در سال ۱۹۸۱ براک و راش [۸]، در فضای باناخ هموار یکنواخت، قضیه ارگودیک میانگین را برای خود نگاشت غیرانبساطی T روی این فضا که دارای نقطه ثابت می‌باشد، اثبات کرده‌اند. درسال ۱۹۸۳ راش [۴۳]، در فضای باناخ محدب یکنواخت E نشان داده است که قضیه ارگودیک میانگین برای نیم‌گروه پیوسته غیرانبساطی S روی زیرمجموعه محدب و بسته C از فضا برقرار است. در سال ۱۹۹۳ شفریر [۵] [۵۸]، فضا را گوی واحد باز $\mathbb{B}$ در هیلبرت مختلط با متر هایپربولیک در نظر گرفت و قضیه ارگودیک میانگین را برای خودنگاشت ρ- غیرانبساطی T، روی $\mathbb{B}$ که دارای نقطه ثابت است، اثبات کرد. همچنین شفریر در این فضا، قضیه ارگودیک میانگین را برای عملگر m -هم - افزایشی نیز مورد بررسی قرار داد. در سالهای ۱۹۹۵ راش، شویخت [۶] و خاستکویچ [۷] [۲۷]، در فضای باناخ مختلط انعکاسی، قضیه ارگودیک میانگین را برای نیم‌گروه پیوسته غیرخطی که دارای نقطه ثابت و مولد تحلیلی است، مورد بررسی قرار دادند. همچنین در سال ۱۹۹۷ [۲۸]، با تعمیم در فضای مورد بحث به فضای باناخ مختلط، قضیه ارگودیک میانگین را برای نیم‌گروه پیوسته غیرخطی که دارای نقطه ثابت و مولد تحلیلی است، اثبات نمودند. در سال ۲۰۱۰

[۲] J. B. Baillon
[۳] R. E. Bruck
[۴] Simeon Reich
[۵] Itai Shafrir
[۶] David Shoikhte
[۷] Victor Khatskevich

راش و والواتر [8] [۵۱]، در فضای باناخ هموار یکنواخت حقیقی، همگرایی یکنواخت دوگان ارگودیک میانگین را برای نیم‌گروه پیوسته غیرانبساطی که دارای نقطه ثابت می‌باشد، مطرح کردند. در این پایان‌نامه، دوگان قضیه ارگودیک میانگین را در حالتی که فضا گوی واحد باز در هیلبرت مختلط که دارای متر هایپربولیک می‌باشد، بررسی خواهیم کرد. این قضیه برای نیم‌گروه پیوسته ρ- غیرانبساطی که مجموعه نقاط ثابت آن غیرتهی است، برقرار می‌باشد و به روش تولید نیم‌گروه بستگی ندارد. این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است، بخش اصلی آن از مرجع [۳۳] گرفته شده است. در فصل اول یک سری مفاهیم اساسی از آنالیز تابعی که برای فصول بعدی مورد نیاز می‌باشد به طورخلاصه بیان شده است. در فصل دوم ابتدا به تعریف متر هایپربولیک روی گوی واحد باز فضای هیلبرت مختلط و برخی از ویژگی‌های آن پرداخته شده است. همچنین ویژگی‌هایی از فضای $(\mathbb{B}, \rho)$ نیز بیان خواهد شد. در این فصل عملگرهایی از قبیل عملگر هم - افزایشی[9] ،افزاینده [10]، شبه - انقباضی [11] و ρ- غیرانبساطی و رابطه بین تعدادی از این عملگرها به طور خلاصه بیان خواهد شد. همچنین نیم‌گروه پیوسته ρ- غیرانبساطی و مجموعه نقاط ثابت را معرفی خواهیم کرد و با مولد نیم‌گروه آشنا خواهیم شد (برای آشنایی بیشتر به منابع [۴۷، ۲۹] رجوع شود). در پایان فصل مفهوم حد باناخ، تقریبا همگرایی و گزاره‌هایی در رابطه با آن آورده شده است که برای رسیدن به هدف اصلی پایان‌نامه به آن نیازمندیم. هدف اصلی پایان‌نامه که همگرایی یکنواخت دوگان ارگودیک میانگین می‌باشد را در فصل سوم بررسی خواهیم کرد و دو نتیجه را که می‌توان از این قضیه داشت، مورد بحث قرار خواهد گرفت.

[8] A. Wallwater
[9] Coaccretive
[10] Accretive
[11] Pasedo - Contractive

فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش نیازها

در این فصل توضیحات اجمالی بر فضای هیلبرت، توابع تحلیلی، قضیه هان باناخ و نتایجی از آن، توپولوژی ضعیف و توابع نیم پیوسته پایینی که برای فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشد، مطرح شده است. مطالب این فصل به طور عمده از مراجع [۴، ۲] انتخاب شده‌اند. فرض بر این است خواننده بر مفاهیم آنالیز حقیقی تسلط داشته باشد.

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدمات آنالیز تابعی

یک متر روی مجموعه ناتهی X تابعی مانند $d : X \times X \to \Re^+$ است که در ویژگی‌های زیر صدق کند:

الف)به ازای هر y , x در X، $d(x,y) \geq \cdot$ و $d(x,y) = \cdot \Leftrightarrow x = y$،

ب)به ازای هر y , x در X، $d(x,y) = d(y,x)$،

پ)به ازای هر z , y , x در X، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (نامساوی مثلثی).

جفت (X,d) را یک فضای متریک می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۱. $X = \Re^n$ فضای اقلیدسی با متر $d(x,y) = (\Sigma_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد که $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ متعلق به $\Re^n$ هستند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ (مختلط یا حقیقی) باشد. نگاشت $\|\ .\ \| : X \to \Re^+$ را یک نیم نرم می‌نامیم، هرگاه برای هر $x\ , y \in X$ و برای هر $\alpha \in C$

الف) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

ب) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

از (الف) نتیجه می‌شود که اگر $\alpha = ۰$ آنگاه $\|۰\| = ۰$.

همچنین طبق (ب) داریم:

$$۰ = \|۰\| = \|x + (-x)\| \leq ۲\|x\|$$

یعنی برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$.

تعریف ۳.۱.۱. اگر نیم نرم $\|.\|$ دارای این خاصیت باشد که $\|x\| = ۰$ آنگاه $x = ۰$، آن را یک نرم می‌نامند. فضای برداری X همراه با نرم $\|.\|$ را یک فضای نرمدار گویند.

متر القاشده از نرم $\|.\|$ به صورت تابع $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ می‌باشد. حال اگر این فضا نسبت به متر القاشده از نرم کامل باشد، آن را یک فضای باناخ گویند.

مثال ۴.۱.۱. [۱۰] فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $B(X)$ فضای برداری همه‌ی توابع حقیقی کران‌دار معین بر X باشد. در این صورت رابطه‌ی $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in X\}$ که در آن $f \in B(X)$، یک نرم روی $B(X)$ تعریف می‌کند و آن را نرم سوپریمم (نرم بی نهایت) می‌نامیم. فضای $B(X)$ تعریف شده یک فضای باناخ است.

مثال ۵.۱.۱. [۱۰] فضای خطی $X = \ell_۱$، که به صورت زیر تعریف شده، در نظر بگیرید:

$$\ell_۱ = \{x : x = (x_۱, x_۲, ..., x_i, ...), \Sigma_{i=۱}^{\infty}|x_i| < \infty\},$$

$\ell_۱$ با نرم $\|x\|_۱ = \Sigma_{i=۱}^{\infty}|x_i|$ یک فضای نرم‌دار خواهد بود که تحت نرم تعریف شده، فضایی باناخ است.

مثال ۶.۱.۱. [۱۰] فضای تشکیل شده از همه‌ی دنباله‌های همگرا به صفر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$c_۰ = \{x : x = (x_۱, x_۲, ..., x_i, ...),\ \{x_i\}_{i=۱}^{\infty}\ \text{همگرا به صفر است}\},$$

$c_۰$ فضای نرمدار با نرم $\|.\|_\infty$ است. این فضا یک فضای باناخ می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. V فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \Re$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ضرب داخلی است، هرگاه به طوریکه برای هر $x\ , y$ در V و هر $a\ , b$ در $\mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$،

۲) برای هر $x_1,x_2\in V$ $\qquad \langle ax_1+bx_2,y\rangle=a\langle x_1,y\rangle+b\langle x_2,y\rangle$،

۳)وقتی $x\neq 0$ $\qquad \langle x,x\rangle>0$،

۴) برای هر $x_1,x_2\in V$ $\qquad \langle y,ax_1+bx_2\rangle=\overline{a}\langle y,x_1\rangle+\overline{b}\langle y,x_2\rangle$.

همچنین $\langle x,x\rangle=0$ آنگاه $x=0$.

نرمی که توسط ضرب داخلی $\langle .,.\rangle$ تعریف می‌شود یک تابع حقیقی مقدار به صورت $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ است. فاصله هر دو نقطه‌ی x,y در V به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$

که به وضوح می‌توان دید تابع بالا در V متقارن است و فاصله هر نقطه با خودش صفر است، همچنین نامساوی مثلثی نیز برقرار است.

تعریف ۸.۱.۱. فضای ضرب داخلی که نسبت به نرم تعریف شده توسط ضرب داخلی (به صورت بالا) کامل باشد، فضای هیلبرت H است.

گزاره ۹.۱.۱. [۱۰] برای هر $x\,,y\in H$ و $\alpha\in\mathbb{K}$ از تعریف فضای ضرب داخلی نتایج زیر را داریم

الف) نامساوی مثلثی: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$،

ب) اتحاد متوازی الاضلاع: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$،

ج) نامساوی کوشی-شوارتز: $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\|y\|$،

د) اتحاد قطبی: $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2Re\langle x,y\rangle+\|y\|^2$.

مثال ۱۰.۱.۱. [۱۰] فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}\,,\qquad x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{C}^n$$

و نرم $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای باناخ X را محدب یکنواخت گویند، هرگاه برای هر ϵ که $0<\epsilon\leq 2$ و $\|x\|\leq 1\,,\|y\|\leq 1$ و $\|x-y\|\geq\epsilon$، $\delta=\delta(\epsilon)>0$ ی وجود داشته باشد که $\|\frac{x+y}{2}\|\leq 1-\delta$.

مثال ۱۲.۱.۱. فضای هیلبرت یک فضای محدب یکنواخت است.

در واقع برای x,y در B_H (گوی واحد در H) به‌طوریکه $x \neq y$ و $\|x-y\| \geq \epsilon$، بنابه قانون متوازی الاضلاع داریم:

$$\|x+y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲) - \|x-y\|^۲ \Rightarrow \|x+y\|^۲ \leq ۴ - \epsilon^۲$$

با انتخاب $\delta = ۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲/۴}$ داریم $\|\frac{x+y}{۲}\| \leq ۱ - \delta$. بنابراین H محدب یکنواخت است.

مثال ۱۳.۱.۱. [۴] فضای Lp , ℓ_p که $۱ < p < \infty$ محدب یکنواخت است.

مثال ۱۴.۱.۱. فضای خطی که عناصر آن همه دنباله های کران‌دار $(x_۱, x_۲, ..., x_i, ..)$ از اسکالرهاست ℓ_∞ گفته می‌شود، یعنی

$$\ell_\infty = \{x : x = (x_۱, x_۲, ..., x_i, ...)\ ,\ sup_{i\in N}|x_i| < \infty\}.$$

نرم تعریف شده روی این فضا به صورت زیر است:

$$\|x\|_\infty = sup_{i\in N}|x_i|.$$

ℓ_∞ محدب یکنواخت نمی‌باشد. درواقع برای $x = (۱,۱,۱,,\cdot,\cdot,\cdot,...)\ , y = (۱,۱,-۱,\cdot,\cdot,...) \in \ell_\infty$ و $\varepsilon = ۱$ داریم:

$$\|x\|_\infty = ۱,\ \|y\|_\infty = ۱,\ \|x-y\|_\infty = ۲ > ۱ = \epsilon.$$

از اینکه $\|(x+y)/۲\|_\infty = ۱$ پس $\delta > ۰$ ای وجود ندارد که $\|(x+y)/۲\|_\infty \leq ۱ - \delta$. در نتیجه ℓ_∞ محدب یکنواخت نیست.

مثال ۱۵.۱.۱. فضاهای $l_۱$ و $c_\circ$ محدب یکنواخت نیستند.

در واقع فرض کنید که $x = (۱,\cdot,\cdot,\cdot,...)\ , y = (\cdot,-۱,\cdot,\cdot,...) \in l_۱$ و $\varepsilon = ۱$. در این صورت

$$\|x\|_۱ = ۱,\ \|y\|_۱ = ۱,\ \|x-y\|_۱ = ۲ > ۱ = \epsilon.$$

از طرفی $\|(x+y)/۲\|_۱ = ۱$ و $\delta > ۰$ ای وجود ندارد که $\|(x+y)/۲\|_۱ \leq ۱ - \delta$. درنتیجه $l_۱$ محدب یکنواخت نیست.

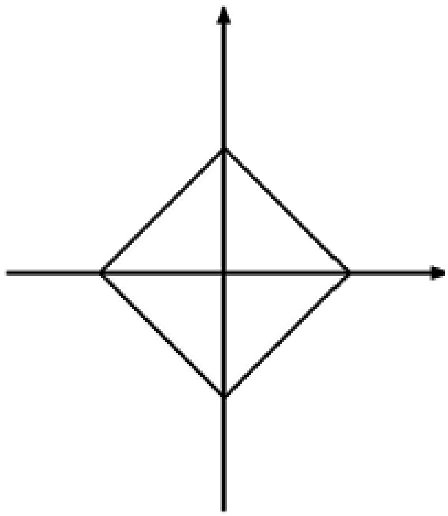
حال برای $c_\circ$ فرض کنیم $x = (۱,۱,۱,\cdot,\cdot,\cdot,...)\ , y = (-۱,۱,\cdot,\cdot,\cdot,...) \in c_\circ$ و $\varepsilon = ۱$.

$$\Rightarrow \|x\|_\infty = ۱,\ \|y\|_\infty = ۱,\ \|x-y\|_\infty = ۲ > ۱.$$

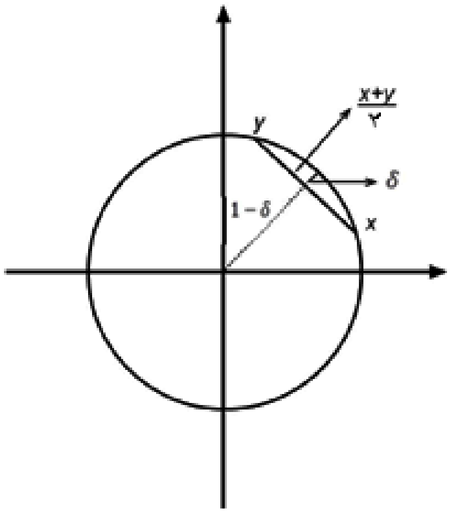
بنابراین $\|(x+y)/۲\|_\infty = ۱$. در نتیجه $c_\circ$ محدب یکنواخت نیست.

مثال ۱۶.۱.۱. فرض کنید $X = \Re^۲$، آنگاه نسبت به نرم $\|x\|_۲ = \left[|x_۱|^۲ + |x_۲|^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$ محدب یکنواخت است، در حالی که نسبت به $\|x\|_۱ = |x_۱| + |x_۲|$ محدب یکنواخت نیست.

گوی واحد X برای $\|.\|_۱$



گوی واحد X برای $\|.\|_۲$



با مشاهده تصاویر گوی‌های واحد و تعریف محدب یکنواخت بوضوح $(X, \|.\|_۲)$ محدب یکنواخت است و $(X, \|.\|_۱)$ اینگونه نیست.

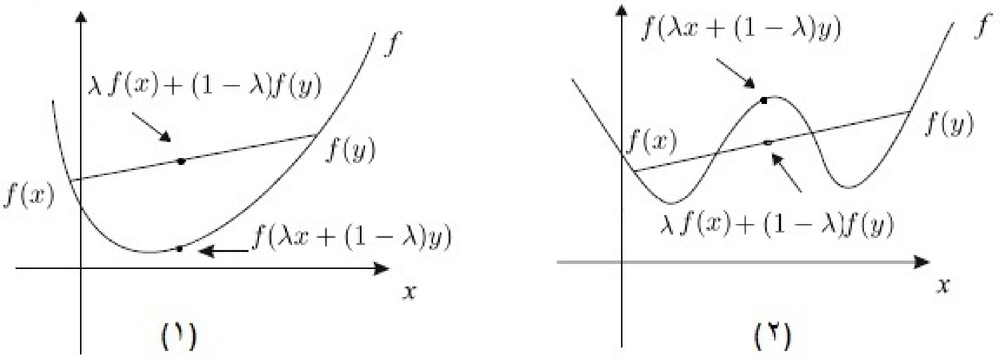
تعریف ۱۷.۱.۱. در فضای نرم‌دار X، تابع $f : X \to (-\infty, +\infty]$ محدب است هرگاه

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda) f(y) \qquad \forall \lambda \in [۰, ۱].$$

به عنوان مثال $f(x) = \|x\|$ درفضای نرم‌دار X و $f(x) = x^a$ برای $a \geq ۱$ که $x \in \Re^+$ توابعی محدب هستند. که این مفهوم در شکل زیر نمایش داده شده است. نمودار شماره (۱) یک تابع محدب ونمودار شماره (۲) یک تابع نامحدب است.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $f, g \in H$ باشد. گوییم f بر g عمود است هرگاه $\langle f, g \rangle = ۰$. عمود بودن f بر g را با نماد $f \perp g$ نشان می‌دهیم.

دو مجموعه $A, B \subseteq H$ بر هم عمودند هرگاه به ازای هر $f \in A$ و به ازای هر $g \in B$ داشته باشیم $f \perp g$. این عمود بودن را با نماد $A \perp B$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱.۱: نمایش هندسی تابع محدب و نامحدب

تعریف ۱۹.۱.۱. اگر M یک زیرفضای بسته فضای هیلبرت H باشد، آنگاه به ازای هر $h \in H$ عضو یکتای از M مانند $f.$ وجود دارد که $h - f. \in M^{\perp}$. بنابراین می‌توان نگاشت $P : H \to M$ را با ضابطه $Ph = f.$ تعریف کرد. نگاشت خطی P را تصویر متعامد H به روی M می‌نامیم و با P_M نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. دو نرم $\|.\|_۱, \|.\|_۲$ روی فضای برداری X را معادل گویند، هرگاه توپولوژی حاصل از این دو نرم برابر باشد.

ملاحظه ۲۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* دوگان آن با نرم

$$\|f\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq ۱} |\langle f, x\rangle|,$$

و X^{**} دوگان دوم X با نرم

$$\|\varepsilon\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq ۱} |\langle \varepsilon, f\rangle|,$$

می‌باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. تداخل متعارف $j : X \longrightarrow X^{**}$ چنین تعریف می‌شود:

فرض کنید $x \in X$ ثابت باشد. نگاشت $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ از X^* به Rیک فرم خطی پیوسته روی X^* است. هر عضو X^{**} را با j_x نمایش می‌دهند پس برای هر$x \in X$ و هر $f \in X^*$ داریم

$$\langle j_x, f\rangle_{X^{**}, X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*, X}.$$

واضح است که j خطی و همچنین ایزومتری است یعنی برای $x \in X$، $\|j_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ در واقع

$$\|j_x\| = \sup_{\|f\| \leq ۱} \|\langle j_x, f\rangle\| = \sup_{\|f\| \leq ۱} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم Xیک فضای باناخ و J تداخل متعارف از X به X^{**} باشد. اگر

$$J(X) = X^{**}$$

به عبارت دیگر J پوشا باشد، X انعکاسی است. وقتی X انعکاسی باشد، X و X^{**} را به طور ضمنی یکی در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۴.۱.۱. [۴] فضاهای L^P و l^P برای $۱ < P < \infty$ انعکاسی هستند.

مثال ۲۵.۱.۱. [۴] فضاهای $L^۱$ و L^∞ انعکاسی نیستند.

مثال ۲۶.۱.۱. [۴] فضاهای $l^۱$ و l^∞ و $c_۰$ انعکاسی نیستند.

۲.۱ توابع تحلیلی و برخی از خواص آن

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت $F : X \to Y$ که X, Y دو فضای نرمدار هستند را در نظر بگیرید. به انتقال خطی پیوسته $A : X \to Y$ مشتق قوی یا مشتق فرشه F در x گویند هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ ی وجود داشته باشد بطوریکه

$$\|F(x+h) - F(x) - A(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X \ , \quad \forall h \quad \|h\|_X \leq \delta.$$

وقتی که مشتق فرشه F در x وجود داشته باشد آن را با نماد $D(F(x))$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. تابع h از مجموعه C در فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y را تحلیلی گویند هرگاه h در دامنه‌اش مشتق پذیر فرشه باشد.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنیم تابع $f : \Re^۲ \to \Re$ به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x,y) = sinx \ \ , \ \ \forall \ (x,y) \in \Re^۲.$$

مشتق فرشه تابع f، $D(f(a,b)) = \lambda : \Re^۲ \to \Re$ در هر نقطه دلخواه (a,b) برابر است با $\lambda(x,y) = (cosa)x$.

در حقیقت کافی است، نشان دهیم:

$$lim_{(h,k)\to ۰} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - \lambda(h,k)|}{|(h,k)|} = ۰.$$

از آنجا که $|(h,k)| = \sqrt{h^{2}+k^{2}} \geq \sqrt{h^{2}} = |h|$ داریم:

$$lim_{(h,k)\to 0} \frac{|sin(a+h) - sina - (cosa)h|}{|(h,k)|} \leq lim_{h\to 0} \frac{|sin(a+h) - sina - (cosa)h|}{|h|} = 0$$

بنابراین

$$lim_{(h,k)\to 0} \frac{|sin(a+h) - sina - (cosa)h|}{|(h,k)|} = 0.$$

تعریف ۴.۲.۱. [۶۲] Y, X را فضای نرمدار خطی مختلط در نظر بگیرید. اگر D زیر مجموعه باز X و D' زیرمجموعه باز Y باشد. به تابع تحلیلی $h : D \to D'$ نگاشت دوتحلیلی [1] گویند اگر معکوس h، $h^{-1} : D' \to D$ وجود داشته باشد و تحلیلی باشد. $h : D \to Y$ ، $h^{-1} : D' \to X$ نیز تحلیلی باشند.

۳.۱ قضیه هان باناخ و نتایجی از آن

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک فضای خطی و $P : X \to \Re$ یک تابعک باشد. P را تابعک زیرخطی روی X گویند، هرگاه :

الف)به‌ازای هر x, y در X $\quad P(x+y) \leq P(x) + P(y)$،

ب)به‌ازای هر x در X و $\alpha \geq 0$ $\quad P(\alpha x) = \alpha P(x)$.

قضیه ۲.۳.۱. (هان-باناخ [2]): [۵۴] فرض کنید M زیرفضایی از فضای خطی حقیقی X و P تابعک زیرخطی تعریف شده روی X باشد. $f : M \to \Re$ تابعک خطی باشد بطوریکه

$$\forall x \in M, \qquad f(x) \leq P(x).$$

در این صورت تابع خطی توسعه یافته‌ی F روی X چنان وجود دارد که

$$\forall x \in X, \qquad F(x) \leq P(x).$$

نتیجه ۳.۳.۱. [۵۴] فرض کنید M زیرفضای X و $P : X \to \mathbb{K}$ یک تابعک زیرخطی باشد. اگر $f : M \to \mathbb{K}$ یک تابعک خطی باشد بطوریکه به ازای هر $x \in M$، $|f(x)| \leq P(x)$. آنگاه یک تابعک خطی $F : X \to \mathbb{K}$ وجود دارد که

$$F|_M = f$$

و به ازای هر $x \in X$، $|F(x)| \leq P(x)$.

[1] Biholomorphic
[2] Hahn-Banach

نتیجه ۴.۳.۱. اگر X فضایی نرمدار، M زیرفضای X و $f : M \to \mathbb{K}$ یک تابعک خطی کران‌دار باشد، آنگاه یک $F \in X^\star$ وجود دارد بطوریکه $F|_M = f$ و $\|F\| = \|f\|$.

اثبات. فرض کنیم به ازای هر $x \in X$، $P(x) = \|f\|\|x\|$.

P یک تابعک زیرخطی روی X می‌باشد و به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| = P(x).$$

بنابر نتیجه قبل یک تابعک خطی $F : X \to \mathbb{K}$ وجود دارد که $F|_M = f$،

$$\forall x \in X \qquad |F(x)| \leq P(x) \Rightarrow \forall x \in X \qquad |F(x)| \leq \|f\|\|x\|.$$

پس F روی X کران‌دار است، بنابراین $F \in X^\star$ و

$$\|F\| = sup_{\|x\|\leq ۱}|F(x)|, \;\; |F(x)| \leq \|f\|\|x\| \Rightarrow \|F\| \leq \|f\|$$

از طرفی F توسیع f است پس

$$\|f\| = sup_{\|x\|\leq ۱}|f(x)| \leq sup_{\|x\|\leq ۱}|F(x)| = \|F\|$$

$$\Rightarrow \qquad \|F\| \leq \|f\| \leq \|F\|$$

پس $\|f\| = \|F\|$. □

نتیجه ۵.۳.۱. فرض کنید x عنصری غیر صفر از فضای نرمدار X باشد، آنگاه $J \in X^\star$ وجود دارد بطوریکه $J(x) = \|x\|, \|J\|_\star = ۱$.

اثبات. فرض کنید $M = \{\beta x : \beta \in \mathbb{F}\}$ و $g : M \to \mathbb{K}$ را به صورت $g(\beta x) = \beta\|x\|$ در نظر بگیرید.

$$\|g\|_\star = sup_{\|\beta x\|\leq ۱}|g(\beta x)| = sup_{\|\beta x\|\leq ۱}\beta\|x\| = ۱ \Rightarrow \|g\|_\star = ۱.$$

بنابه نتیجه قبل یک $J \in X^\star$ وجود دارد که

$$J|_M = g \; , \; \|J\|_\star = \|g\|_\star = ۱$$

$$\Rightarrow J(x) = g(x) = \|x\| \qquad x \in M.$$

□

۴.۱ توپولوژی ضعیف

می دانیم گوی واحد بسته‌ی فضای باناخ X فشرده است اگر و تنها اگر بعد X متناهی باشد. گوی واحد بسته در فضاهای باناخ با بعد نامتناهی فشرده نیست ([۵۴]، ص۱۶۲) که این مطلب کارکردن در فضاهای باناخ با بعد نامتناهی را با محدودیت هایی مواجه می‌کند.

توپولوژی ضعیف را می‌توان کوششی در جهت رفع این محدودیت ها دانست. حال مختصرا به تعریف توپولوژی ضعیف می‌پردازیم. بخاطر دور نشدن از اصل مطالب از آوردن اثبات قضایای این قسمت خودداری می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای کسب اطلاعات بیشتر در این مبحث واثبات قضایا به [۴] مراجعه کند.

فرض کنیم E یک فضای باناخ و $E^{\star}$ دوگان آن باشد. نگاشت $\varphi_f : E \to \Re$ که $f \in E^{\star}$ است را چنین تعریف می‌کنیم :

$$\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle, \qquad \forall x \in E.$$

که در آن $\langle .,. \rangle$ زوج دوگان است، آن را با نماد ضرب داخلی در فضای هیلبرت اشتباه نگیریم. هرگاه f در $E^{\star}$ تغییر کند یک خانواده نگاشت های $(\varphi_f)_{f\in E^{\star}}$ از E به $\Re$ بدست می‌آید.

تعریف ۱.۴.۱. توپولوژی ضعیف روی E که با نماد $\sigma(E, E^{\star})$ نشان داده می‌شود، کوچکترین توپولوژی ممکن روی E است که تمام نگاشت های $(\varphi_f)_{f\in E^{\star}}$ را پیوسته می‌سازد.

نمادگذاری ۲.۴.۱. فرض کنید $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ یک دنباله باشد، همگرایی x_n به سمت x برای توپولوژی ضعیف $\sigma(E, E^{\star})$ را با $x_n \rightharpoonup x$ یا $w - lim_{n\to\infty} x_n = x$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۴.۱. [۴] فرض کنیم $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ یک دنباله در E باشد.

الف) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in E^{\star}$.

ب)اگر $x_n \to x$ آنگاه $x_n \rightharpoonup x$.

ج)اگر $x_n \rightharpoonup x$ در این صورت $\|x_n\|$ کران‌دار است و $\|x\| \leq liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

ه)هرگاه بعد X متناهی باشد، توپولوژی ضعیف و توپولوژی معمولی بر هم منطبق است. بویژه یک دنباله بطور ضعیف همگراست اگر و تنها اگر بطور قوی همگرا باشد.

مثال ۴.۴.۱. [۴] اگر بعد X نامتناهی باشد، مجموعه $S = \{x \in X : \ \|x\| = ۱\}$ هیچگاه برای توپولوژی ضعیف بسته نیست. درحالیکه در توپولوژی معمولی بسته است.

مثال ۱.۴.۵. [۴] اگر بعد X نامتناهی باشد، مجموعه $U = \{x \in X : \|x\| < ۱\}$ هیچگاه برای توپولوژی ضعیف باز نیست. درحالیکه در توپولوژی معمولی باز است.

قضیه ۱.۴.۶. ([۲]، ص۴۱) فرض کنید C زیر مجموعه فضای باناخ انعکاسی X باشد، آنگاه C فشرده ضعیف است اگر و تنها اگر C کراندار باشد.

۵.۱ توابع نیم پیوسته پایینی

در این بخش به تعریف توابع نیم پیوسته پایینی و برخی از ویژگی‌های آن می‌پردازیم که نمادهای بکار رفته برگرفته شده از [۲] می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به ([۲]، [۳۸]) مراجعه نمایید.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید E فضای توپولوژیکی باشد. به تابع $\varphi : E \to \Re$ نیم پیوسته پایینی گویند هرگاه برای هر $\lambda \in \Re$ مجموعه $\{x \in E : \varphi(x) \leq \lambda\}$ بسته باشد.

قضیه ۲.۵.۱. [۴] فرض کنیم $C \subset E$ محدب باشد. در این صورت C برای $\sigma(E, E^{\star})$ به طور ضعیف بسته است اگر و فقط اگر به طور قوی بسته باشد.

گزاره ۳.۵.۱. فرض کنید $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ محدب و نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه φ نیم پیوسته پایینی در توپولوژی ضعیف است.

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر $\lambda \in \Re$ مجموعه‌ی $A = \{x \in E : \phi(x) \leq \lambda\}$ برای $\sigma(E, E^{\star})$ بسته است. از آنجایی که A محدب است (زیرا ϕ محدب است) و A به‌طور قوی بسته است (زیرا ϕ برای توپولوژی قوی نیم پیوسته پایینی است). بنابه قضیه قبل مجموعه‌ی A برای $\sigma(E, E^{\star})$ نیز بسته است.

□

تذکر ۱.۵.۱. [۴] اگر تابع $f : E \to \Re$ پیوسته باشد، آنگاه f نیم پیوسته پایینی است.

نتیجه ۴.۵.۱. [۴] فرض کنید $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ محدب و پیوسته باشد، آنگاه φ نیم پیوسته پایینی ضعیف است.

قضیه ۵.۵.۱. [۲] اگر E فضای متریک فشرده و φ نیم پیوسته پایینی باشد آنگاه $inf_E\varphi$ اتخاذ می‌شود.

مثال ۶.۵.۱. نرم $\|.\|$ نسبت به توپولوژی ضعیف، نیم پیوسته پایینی می‌باشد.

در واقع تابع $\phi : X \to \Re$ را که X فضای باناخ است، به صورت $\phi(x) = \|x\|$ در نظر بگیرید. تابع ϕ نیم پیوسته پایینی و محدب است، پس نیم پیوسته پایینی ضعیف است.

فصل ۲

مفاهیم ولم های اساسی

در این فصل به بررسی تعاریف و لم‌هایی می‌پردازیم که برای اثبات هدف اصلی پایان‌نامه به آن نیاز داریم. از جمله آشنایی با مترهایپربولیک، نیم‌گروه پیوسته، مفهوم حد باناخ که در این تعاریف $\mathbb{B}$ گوی واحد باز در فضای هیلبرت مختلط می‌باشد. بخش عمده‌ی این فصل از مراجع [۵۶، ۵۱، ۴۷، ۳۳] گرفته شده است.

۱.۲ مترهایپربولیک

فرض کنید $(H, \langle .,. \rangle)$ فضای هیلبرت مختلط با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$، نرم $|.|$ و گوی واحد باز $\mathbb{B} = \{x \in H : |x| < ۱\}$ باشد. مجموعه اعداد طبیعی، حقیقی، بازه $[۰, \infty)$ و صفحه مختلط را به ترتیب با نمادهای $\mathbb{N}$,$\Re$,$\Re^+$,$\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲. به نگاشت $\rho : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \Re^+$ که

$$\rho(x,y) = argtanh(۱ - \sigma(x,y))^{\frac{۱}{۲}}$$

و

$$\sigma(x,y) = \frac{(۱ - |x|^۲)(۱ - |y|^۲)}{|۱ - \langle x, y \rangle|^۲} \qquad x, y \in \mathbb{B}$$

مترهایپربولیک گویند.

تذکر ۱.۱.۲. [۱۶] برای بررسی متر بودن کافی است نشان دهیم برای هر $x \neq y \neq z$ در $\mathbb{B}$،

الف) $\rho(x,x) = ۰$،

ب) $\rho(x,y) > ۰$،

ج) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$،

د) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.