بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده‌ی علوم- بخش فیزیک

پایان‌نامه‌ی تحصیلی برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک

آماده‌سازی نظری مدل‌سازی ستارگان با تأکید بر ستارگان کم‌جرم

استاد راهنما:

دکتر حسین امیری

مولف :

راضیه محبی

زمستان ۱۳۸٦

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : راضیه محبی

استاد راهنما : دکتر حسین امیری

داور ۱ : دکتر نعمت اله ریاضی

داور ۲ : دکتر محمد شجاعی

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر مجید تراز

تقدیم به

مادر پرمهرم،

پدر اندیشمندم و

خانواده‌ی عزیزم.

تقدیر و تشکر

یگانه‌ی هستی را سپاس که به یمن الطاف بیکرانش مرحله‌ی دیگری از زندگی‌ام را به پایان رساندم. از استاد گرامی آقای دکتر امیری که در این مدت با راهنمایی‌هایشان مسیر را در پیش رویم روشن کردند، کمال تشکر را دارم. از تک تک اعضای خانواده‌ام که لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام را مدیون بودنشان هستم، تشکر می‌کنم و دوستانم که همراهان همیشگی‌ام هستند.

چکیده

در این پایان‌نامه، شرایط فیزیکی حاکم بر ستاره و به‌ویژه ستارگان کم‌جرم توضیح داده شده تا معادلات ساختار و تحول آن‌ها استخراج شود. سپس روش‌های حل معادلات ساختار و تحول ستاره از دو جهت استفاده از نرم‌افزار و تدوین برنامه مورد بررسی قرار گرفته است. مشکلات استفاده از نرم‌افزار بیان و در بخش تدوین برنامه، روش هن‌یی برای حل معادلات عنوان شده است. در ادامه، در بخش بهینه‌سازی روش هن‌یی، پیشنهاد استفاده از روش الگوریتم ژنتیک مطرح شده است. با پیاده‌سازی این زمینه نظری، انجام مدل‌سازی ستارگان کم‌جرم ممکن می‌شود و امکان نقد و بررسی داده‌ها و مدل مطرح شده توسط ریچر و همکارانش فراهم خواهد شد.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
۱ مقدمه	۲
۲ معادلات حاکم بر ساختار تحول ستارگان کم‌جرم	٦
۱.۲ معادلات حاکم بر ساختار ستارگان	۷
۱.۱.۲ بقا جرم	۸
۲.۱.۲ تعادل هیدروستاتیک	۹
۳.۱.۲ بقا انرژی	۱۰
٤.۱.۲ دما	۱۱
۲.۲ کدری در ماده‌ی ستاره‌ای	۱۸
۱.۲.۲ گذار مقید–مقید	۱۹
۲.۲.۲ گذار آزاد–مقید	۱۹
۳.۲.۲ گذار آزاد–آزاد	۲۰
٤.۲.۲ پراکندگی الکترون	۲۰
۳.۲ کدری در ستارگان کم‌جرم	۲۱
٤.۲ تولید انرژی در ستارگان	۲۲
٥.۲ انرژی هسته‌ای در ستارگان کم‌جرم	۲٥
٦.۲ معادله‌ی حالت ماده ستاره‌ای	۲۸

۷.۲ معادله‌ی حالت در ستارگان کم‌جرم ۳۰

۷.۳ تغییرات ترکیب شیمیایی ۳۲

۳ روش حل معادلات ساختار و تحول ۳٤

۱.۳ بررسی اجمالی استفاده از نرم افزار جهت حل معادلات ۳۵

۲.۳ مقدمه‌ای بر روش هن‌یی ۳۸

۱.۲.۳ آماده سازی معادلات برای روش هن‌یی ۳۸

۲.۲.۳ اساس روش هن‌یی ٤۷

۳.۳ بررسی کاربرد روش‌های بهینه سازی در حل معادلات ٤۸

۱.۳.۳ روش نیوتن ٤۹

۲.۳.۳ الگوریتم ژنتیک ٥٤

٤.۳ جزئیات بیشتر ٥٦

٤ نتیجه گیری ٦۰

پیوست ٦۳

منابع ٦۲

فصل اول

مقدمه

مقدمه :

تمام آنچه از ستارگان مشاهده می‌کنیم لکه‌ی کم نوری است که از آن باید همه چیز را در مورد ستاره حدس بزنیم. این نور از لایه‌ی سطحی به ضخامت ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ کیلومتر تابش می‌شود درحالی‌که شعاع ستارگان رشته‌ی اصلی به حدود $۱۰^{۵}$ تا $۱۰^{۷}$ کیلومتر می‌رسد. پرسش اصلی این است که چگونه از درون ستارگان و ساختار و تحول آنها باخبر شویم. برای آگاهی از درون ستارگان نیاز به بررسی ساختار و تحول آن‌ها داریم.

ساختار و تحول ستارگان مطالعه‌ی قوانین فیزیکی است که متغیرهای ستاره‌ای و تغییرات ترکیبات شیمیایی درون ستارگان را مشخص می‌کند. شبیه‌سازی درون ستارگان بر عهده‌ی مدل‌هایی است که با قوانین فیزیکی سازگار باشند و در نهایت به همان ویژگی‌های قابل مشاهده‌ی ستاره منجر شوند. مطالعه‌ی نظری ساختار ستاره‌ای به همراه داده‌های مشاهداتی به روشنی نشان می‌دهند که ستاره‌ها اجسام دینامیکی هستند که در مقیاس استانداردهای انسانی بسیار آرام تغییر می‌کنند.

اما مساله‌ی اساسی که مدت‌ها ذهن محققان را به خود مشغول کرده بود، این بود که چه توده‌ی جرمی تبدیل به ستاره می‌شود. در زندگی هر ستاره‌ی کوچکی زمانی وجود دارد که ستاره بر سر دوراهی ادامه‌ی زندگی یا خاموش شدن قرار می‌گیرد. اگر جرم ستاره از مقدار مشخصی کمتر باشد، ستاره دیگر سوخت هسته ای ندارد و آن‌قدر کم نور می‌شود تا اصطلاحاً

به کوتوله‌ی قهوه‌ای بدل شود. در واقع کوتوله‌های قهوه‌ای اجرام سماوی هستند که به دلیل جرم خیلی کم به مرحله‌ی هیدروژن سوزی نمی‌رسند. در این اجرام، تراکم توسط تبهگنی الکترون متوقف می شود، تبهگنی در واقع دافعه‌ی کوانتوم مکانیکی بین الکترون ها در ماده متراکم چگال است. برای کوتوله‌های قهوه‌ای سرعت تولید انرژی هیچ‌گاه به حدی نمی‌رسد که به مرحله‌ی هم‌جوشی هسته‌ای خود به خودی دست یابد و در طول سال‌ها کم نور وکم نورتر می‌شوند.

مجموعه‌ی این مباحث ما را به انتهای نمودار H-R می‌برد، جایی که مربوط به تحول ستارگان کم‌جرم است. مشاهده و مطالعه‌ی این نوع ستارگان به دلیل کم نور بودن آن‌ها بسیار دشوار است. پارامترهایی مانند تبهگنی، تشکیل ملکول، یونیزاسیون ناقص و در نهایت اثرات گاز غیرایده‌آل ویژگی‌های ترمودینامیکی پیچیده‌ای را در این نوع ستارگان به‌وجود می‌آورد. انرژی تولید شده در مرکز ستارگان کم‌جرم، در جو آن‌ها به دام می‌افتد و ساختار خاص جو، مانع تابش تمام انرژی تولید شده در مرکز به فضا می‌شود. با کاهش دما در جو این نوع ستارگان، امکان تشکیل ملکول به‌وجود می‌آید و این ملکول‌ها باعث کدری بیشتر در جو شده و کاهش شدید انرژی تابشی و حتی جذب بخشی از طول موج نور را به دنبال خواهد داشت. این پدیده در بررسی و مشاهده‌ی ستارگان کم‌جرم از اهمیت زیادی برخوردار است.

محاسبات گسترده‌ی مدل‌های تکاملی ستاره‌ای برای ستارگان رشته‌ی اصلی اولین بار توسط هن‌یی[۱] و همکارانش در ۱۹۵۹ و هویل[۲] انجام‌شد[۱,۲]. مدل‌سازی خورشید را شوارتزشیلد[۳] و هاوارد[٤] به سال ۱۹۵۷ انجام‌دادند[۳]. لیمبر[٥] برای اولین بار این مدل‌سازی را برای مطالعه‌ی ستارگان کم‌جرم به‌کاربرد[٤]. هایاشی[٦] نشان داد که ستارگان کم‌جرم کاملاً همرفتی‌اند ودر همان سال کیومور[۷] مفهوم حد جرمی را برای ستارگان رشته‌ی اصلی بیان‌کرد، حدی که کمتر از آن ستاره به‌طور کامل تبهگن می‌شود و نقطه‌ی گذار بین ستارگان و اجرام زیر ستاره‌ای است[٥,٦]. لیبرت[۸] در همین راستا نشان داد که این اجرام زیرستاره‌ای طول‌موجی از خود گسیل می‌کنند که وابسته به مرحله‌ی تحول آن‌هاست، این اجرام در بیشتر موارد کوتوله‌ی

۱.Henyey
۲.Hoyle
۳.Schwartzschild
۴.Howard
۵.Limber
۶.Hayashi
۷.Kumor
۸.Liebert

قهوه‌ای نام گرفتند[۷]. بررسی جو، فراوانی عناصر شیمیایی و منابع کدری در ستارگان کم‌جرم نیز توسط واردیا[۱] انجام شد[۸]. درسال ۱۹۹۷ بارافه و همکارانش[۲] حدجرمی بحرانی را ۸۳ ۰/۰ برابر جرم خورشید محاسبه کردند[۹]. اما مشاهده‌ی این حد جرمی تئوری بر عهده‌ی ابزارهای مشاهداتی پیشرفته از جمله تلسکوپ فضایی هابل بود.

جرم بحرانی، که حد کوتوله‌ی قهوه‌ای نامیده می‌شود یک پیش بینی نظری اساسی در تحول ستاره‌ای بوده است. محققان برای اولین بار در سال ۲۰۰۶ این حد مرزی را به طور مشاهده‌ای اندازه‌گیری کرده‌اند. هاروی ریچر و همکارانش[۳] حد کوتوله‌ی قهوه‌ای را برای خوشه‌ی کروی کروی همسایه NGC6397 گزارش کرده‌اند که با مقدار پیش‌بینی‌شده ۸۳ ۰/۰ برابر جرم خورشید هم‌خوانی دارد[۱۰]. به این منظور ریچر و همکارانش تلسکوپ فضایی هابل را روی یک ناحیه از NGC6397 به مدت پنج روز متمرکزکردند. این تمرکز طولانی مدت امکان مشاهده‌ی اجسام بسیار کم نوری که قبلاً قابل مشاهده نبودند را فراهم کرد. این مساله آن‌ها را متقاعد کرد که توانسته‌اند کوچک‌ترین ستارگانی که در هسته‌شان هیدروژن سوزی دارند را آشکارسازی کنند. با تحلیل کامپیوتری تصاویر، محققان دانشگاه بریتیش کلمبیا توانستند ستارگانی که بسیار کم نورند را آشکارسازی کنند.

مقاله‌ی هاروی ریچر و همکارانش که در مجله‌ی ساینس[۴] منتشر شد ما را بر آن داشت تا بر اساس مدل‌های ستاره‌ای و محاسبات عددی و با در نظرگرفتن ملکول‌هایی که در جو ستاره تشکیل می‌شود و در این جا لحاظ نشده است، بررسی این مقاله را در این پایان نامه انجام دهیم.

در اولین گام برای بررسی مقاله، نیاز به یک مدل‌سازی ستاره‌ای داریم تا داده‌های مربوط به مقاله را بررسی کند. در فصل دوم، فیزیک ستارگان، معادلات حاکم بر ساختار و تحول، کدری، تولید انرژی و معادله‌ی حالت ستاره را به طور کلی بیان می‌کنیم.

در فصل سوم به بررسی روش‌های عددی حل این معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم و ازدو روش استفاده از نرم افزار یا تدوین برنامه یاد می‌کنیم. در بخش نرم افزار، mathematica ودر تدوین برنامه نگاهی به الگوریتم ژنتیک برای کمک حل این معادلات داریم. استفاده از روش هن‌یی برای حل معادلات حاکم بر ساختار و تحول ستاره در این فصل بیان می‌شود که در

۱.Vardia
۲.Baraffe
۳.Richer
۴.Science

نهایت منجر به تدوین برنامه‌ای برای مدل‌سازی ستارگان کم‌جرم شده‌است تا به حد بحرانی یا حد کوتوله‌ی قهوه‌ای برسیم.

در فصل چهارم که فصل بحث و نتیجه‌گیری است، از میان روش‌های بررسی شده روش بهینه را توصیه می‌کنیم و پیشنهادات آتی در زمینه‌ی ادامه‌ی این تز ارائه می‌گردد.

فصل دوم

معادلات حاکم بر ساختار و تحول ستارگان و ستارگان کم‌جرم

در این فصل، ابتدا با استفاده از تئوری استاندارد ستاره‌ای، فیزیک ستارگان و معادلات حاکم بر ساختار و تحول ستارگان را به طور کلی بررسی می‌کنیم، سپس معادلات کمکی حالت، کدری و سرعت تولید انرژی را برای آن‌ها و به طور خاص برای ستارگان کم‌جرم بیان می‌کنیم.

(۲-۱) معادلات حاکم بر ساختار و درون ستارگان

تئوری استاندارد ستاره‌ای بر اساس فرض‌هایی استوار است. از نتایج این فرضیات برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر ساختار و تحول ستارگان استفاده می‌شود. این مجموعه از فرض‌ها، به طور خلاصه به شرح زیر هستند:

۱- ستارگان سیستم‌های متقارن کروی متشکل از ماده و تابش هستند. از تأثیرات چرخش و میدان‌های مغناطیسی در آن‌ها صرفنظر می‌شود.

۲- کمیت‌های فیزیکی و شیمیایی وجود دارند که با استفاده از آن‌ها ستاره را توصیف می‌کنند. تغییرات این کمیت‌ها نسبت به زمان بسیار کند است. از جمله‌ی این کمیت‌ها، درخشندگی و دمای موثر ستاره است که با توجه به داده‌های مشاهداتی دریافت شده از ستاره، نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند. براین اساس، ساختار ستاره‌ای را در حالت تعادل هیدروستاتیک فرض می‌کنیم. در یک سیستم در حال تعادل هیدروستاتیک، هر چه به سمت مرکز پیش می‌رویم، فشار افزایش می‌یابد و باتوجه به معادله‌ی حالت این افزایش فشار با افزایش دما و چگالی همراه خواهد بود.

۳- فاصله‌ی میانگین طی شده توسط ذرات در فاصله‌ی برخوردها (مسافت آزاد میانگین) بسیار کوچک‌تر از بعد سیستم یعنی شعاع ستاره است و زمان بین برخوردها در مقایسه با بازه‌ی زمانی تحول ستاره‌ای بسیار کوچک‌تر است. بدین ترتیب هر لایه‌ی ستاره‌ای در حالت تعادل ترمودینامیکی موضعی است و هر لایه‌ی ستاره‌ای مانند جسم سیاه عمل می‌کند. این

بدان معناست که در هر لایه‌ی ستاره‌ای ماده و تابش به تعادل رسیده‌اند. وجود شار خروجی ستاره یک عدم تقارن بسیار کوچک ایجاد می‌کند که قابل چشم‌پوشی است.

٤- فرایند غالب برای جابه‌جایی عنصر شیمیایی در ستارگان، همرفت است. از مخلوط شدن چرخشی عناصر و واپاشی اتمی صرفنظر می‌کنیم.

این مجموعه از فرضیات، منجر به ایجاد یک سیستم از معادلات دیفرانسیل می‌شوند که با استفاده از آن، ساختار ستاره‌ای و تحول زمانی آن‌را توصیف می‌کنیم. معادلات حاکم بر ساختار و تحول ستارگان، شامل ٥ معادله‌ی دیفرانسیل است که فشار، دما، درخشندگی، شعاع و فراوانی عناصر شیمیایی را به صورت توابعی از m_r، در زمان t محاسبه می‌کنند و تغییر این پارامترها در زمان‌های بعدی را نیزبا کمک این معادلات می‌توانیم به‌دست آوریم. حل این معادلات نیازمند اطلاعاتی است که از معادلات کمکی مانند معادله‌ی حالت، کدری ماده‌ی ستاره‌ای و سرعت تولید انرژی به‌دست می‌آید. در بخش‌های بعدی، تغییرات کمیت‌های فیزیکی عنوان شده را بر حسب m_r و بر اساس فرض‌های بالا به‌دست می‌آوریم[۱۱].

(۲-۱-۱) بقا جرم

براساس فرض تقارن کروی، تمام پارامترهای توصیف کننده‌ی ستاره به یک کمیت اصلی یعنی فاصله از مرکز وابسته‌اند. با در نظر گرفتن ρ به عنوان چگالی ماده در نقطه‌ی r درون ستاره، جرم محصور شده در کره‌ای به شعاع r از مرکز ستاره، با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$m_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr \qquad (۱-۲)$$

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \qquad (۲-۲)$$

$$\frac{dr}{dm_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \qquad (۳-۲)$$

معادله‌ی (۲ – ۳) اولین معادله از دستگاه ٥ معادله‌ای حاکم بر ساختار و تحول ستاره است.

(۲-۱-۲) تعادل هیدروستاتیک

اکنون معادله‌ی حرکت یک المان استوانه‌ای در راستای شعاع که بین شعاع‌های r و $r + dr$ قرار گرفته‌است را به‌دست می‌آوریم. da را مساحت قاعده(عمود بر جهت شعاع)وچگالی ρ را در این حجم، ثابت فرض می‌کنیم و المان جرم، dm را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$dm = \rho dr da \qquad (۲-٤)$$

اگر از چرخش، صرفنظر کنیم، تنها نیروهایی که باقی می‌مانند، نیروهای ناشی ازخودگرانی و فشار داخلی هستند. جرمی که در شعاع r قرار دارد، مانند جرمی که در مرکز قرارگرفته، یک شتاب گرانشی به سمت داخل به صورت زیر ایجاد می‌کند:

$$g(r) = G\frac{m_r}{r^2} \qquad (۲-٥)$$

اختلاف فشاری که بر دو قاعده‌ی یک المان استوانه‌ای فرضی وارد می‌شود به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$p(r + dr) = P(r) + \frac{dp}{dr}dr \qquad (۲-٦)$$

بدین ترتیب، معادله‌ی حرکت المان حجم هم به این صورت در می‌آید:

$$dm\frac{d^2r}{dt^2} = -g(r)dm - \frac{dP}{dr}\frac{dm}{\rho} \qquad (۲-۷)$$

شرط تعادل هیدروستاتیک $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$، رابطه‌ی مربوط به این تعادل را به شکل زیر در می‌آورد:

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{m_r \rho}{r^2} \qquad (۲-۸)$$

$$\frac{dp}{dm_r} = -G\frac{m_r}{4\pi r^4} \qquad (۲-۹)$$

این دو معادله، دو شکل متفاوت بیان معادله‌ی دوم حاکم بر ساختار ستاره است و در حل معادلات، شکل دوم یعنی معادله‌ی (۲ – ۹) را در نظر می‌گیریم.

(۲-۱-۳) بقای انرژی

در صورتی که تعادل هیدروستاتیک وجود نداشته باشد، نیروی مربوط به شتاب $\frac{d^2r}{dt^2}$ صفر نمی‌شود و این نیرو با تفاوت نیروی گرانشی و نیروی ناشی از اختلاف فشار به تعادل می‌رسد. با توجه به بقای انرژی گرمایی خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{kT}{m}\right) = -P\frac{dv}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dL_r}{dr} \qquad (۲-۱۰)$$

در این رابطه، انرژی داخلی یک گرم گاز ایده‌آل در واحد زمان با مجموع کار انجام شده توسط فشار P بر روی یک حجم ویژه $v = \frac{1}{\rho}$ ، انرژی به دست آمده از واکنش‌های هسته‌ای و شار انرژی (در واحد ثانیه در واحد جرم) که از طریق درخشندگی از سطح خارج می‌گردد، برابر می‌شود. با استفاده از معادله‌ی حالت و تعریف آنتروپی به شکل زیر، معادله‌ی(۲ − ۱۰) را بازنویسی می‌کنیم:

$$P = \frac{k}{m}\rho T \qquad (۲-۱۱)$$

$$s = ALn\left(P\rho^{-5/3}\right) + B \qquad (۲-۱۲)$$

(A و B ثابت هستند). بدین ترتیب معادله‌ی بقای انرژی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2\rho\left(\varepsilon - T\frac{ds}{dt}\right) \qquad (۲-۱۳)$$

ε سرعت تولید انرژی در واحد جرم در واحد زمان مربوط به تمام واکنش‌های هسته‌ای ممکن است، یعنی

$$\varepsilon = \sum_k \varepsilon_k \qquad (۲-۱۴)$$

و در نهایت معادله‌ی سوم از مجموعه‌ی معادلات، بر حسب m_r به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{dL_r}{dm_r} = \varepsilon - T\frac{ds}{dt} \qquad (۲-۱۵)$$

(۲-۱-٤) دما

برای به‌دست آوردن معادله‌ی حاکم بر دما باید انتقال انرژی و فرایندهای موثر در آن را بیان کنیم تا بتوانیم گرادیان دما را در قسمت‌های مختلف ستاره، داشته باشیم. اگر تولید انرژی وجود داشته باشد، این انرژی برای آزاد شدن به سطح ستاره می‌آید و برای توصیف این انتقال نیاز به یک معادله داریم. درون ستاره، انرژی با حرکت تصادفی ذرات تشکیل دهنده یا با حرکت منظم بزرگ مقیاس ماده منتقل می‌شود.

در حرکت تصادفی، ذرات با انرژی جنبشی ناشی از دمای خود حرکت می‌کنند و با ذرات اطراف برهم‌کنش می‌کنند و یک مسافت آزاد میانگین را طی می‌کنند، بنابراین انرژی را از نقاط گرم به نواحی سرد می‌برند. انتقال انرژی به سه صورت امکان پذیراست که در زیر به آن‌ها می‌پردازیم:

(الف) انتقال تابشی

المان حجم استوانه‌ای با مساحت واحد و عمق dr که در فاصله‌ی r از مرکز ستاره قرار دارد را در نظر می‌گیریم، شار خالص فوتونی، F_{rad} شار انرژی فوتون‌های خروجی است. تکانه‌ی dP منتقل شده به المان حجم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dP = \frac{F_{rad}}{c}\frac{dr}{l} \qquad (۲-۱٦)$$

در این رابطه، l، مسافت آزاد میانگین فوتون و c، سرعت آن است. dP برابر با منفی تغییرات فشار تابشی خروجی فوتون‌ها در فاصله‌ی dr است. بنابراین داریم:

$$dP_{rad} = -\frac{F_{rad}}{c}\frac{dr}{l} \qquad (۲-۱۷)$$

ویژگی‌های فوتون‌ها در طول مسافت آزاد میانگین را ثابت فرض می‌کنیم، و ضریب کدری، κ_{rad}، به صورت $\kappa_{rad}\rho \equiv \frac{1}{l}$ ، را در این‌جاتعریف می‌کنیم. در واقع، κ_{rad} مقیاسی از احتمال

برهم‌کنش فوتون در واحد طول است. با توجه به تعریف κ_{rad} معادله‌ی (۲ — ۱۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa_{rad}}{c}\rho F_{rad} \qquad (۲-۱۸)$$

ازفرض تعادل ترمودینامیکی ناحیه‌ای، $P_{rad} = \frac{aT^4}{3}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین رابطه‌ی $dP_{rad}/dr = \frac{4}{3}aT^3\,\mathrm{dT/dr}$ برقرار است و به این ترتیب معادله‌ی (۲ — ۱۸) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dT}{\mathrm{dr}} = -\frac{3\kappa_{rad}\rho}{4acT^4} F_{rad} \qquad (۲-۱۹)$$

این معادله، معادله‌ی انتقال تابشی درون ستاره است. زمانی که انرژی توسط فوتون‌ها منتقل می‌شود، κ_{rad} کدری تابشی مربوط به برهم‌کنش فوتون‌ها با ذرات محیط است. معادله‌ی (۲ — ۱۹) نشان می‌دهد که هر جا گرادیان دما وجود داشت یک شار تابشی هم وجود دارد. اگر کل انرژی با فوتون‌ها انتقال یابد، (۲ — ۱۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-3\kappa_{rad}}{4acT^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \qquad (۲-۲۰)$$

این معادله، رابطه‌ی فرایندهای جذب و گسیل دوباره‌ی فوتون‌ها در درون ماده‌ی ستاره‌ای با ضریب کدری متوسط κ_{rad} را توصیف می‌کند. فرایند برهم‌کنش بین ماده‌ی ستاره‌ای و فوتون‌ها به طول موج وابسته است و این وابستگی توسط کدری مونوکروماتیک (κ_ν) بیان می‌شود. κ_{rad} را با استفاده از این کدری به‌دست می‌آوریم.

(ب) انتقال رسانشی

انتقال رسانشی، شامل انتقال انرژی توسط مواد تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی ستاره‌ای به غیر از فوتون‌ها، یعنی الکترون‌های آزاد غیر تبهگن است. شار انرژی منتقل شده به المان حجم در واحد سطح و در عمق dr با شار خروجی الکترون‌ها متناسب است:

$$F_c \sim -N_e l v \frac{dE}{dr} \qquad (۲-۲۱)$$