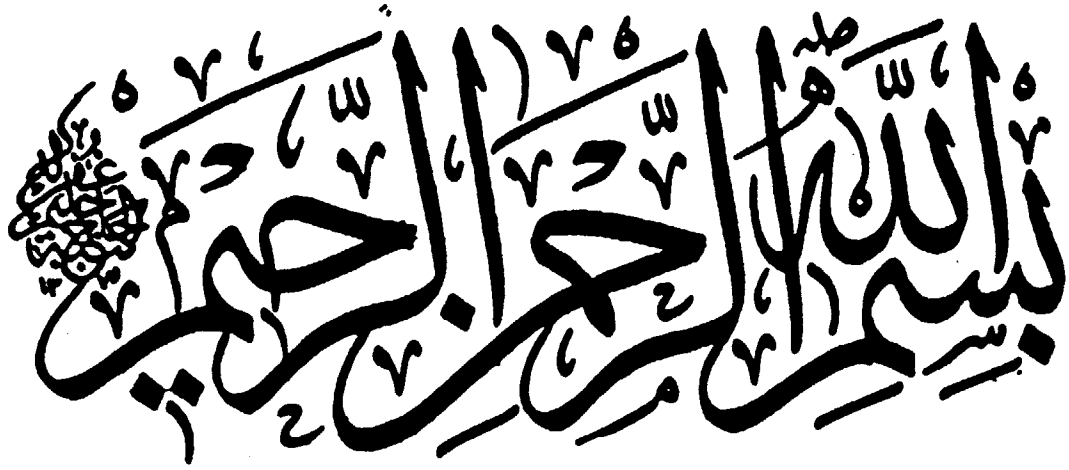

٣٢٧٩١

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بررسی مشخصه‌های توزیع‌های نمایی دو متغیره و چند متغیره براساس نرخ شکست شرطی کاکس

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

محمدباقر سپهری‌فر

۱۰۰۷۵

استاد راهنما

دکتر علی زینل همدانی

۱۳۷۹

۳۲۷۹۱

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تکثیر ممنوع

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

۱۳۸۰/۱۱/۱۰

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته آمار آقای محمدباقر سپهری‌فر

تحت عنـــوان

بررسی مشخصه‌های توزیع‌های نمایی دو متغیره و چند متغیره براساس نرخ شکست شرطی کاکس

در تاریخ ۷۹/۷/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	**دکتر علی زینل همدانی**
۲ ـ استاد مشاور پایان‌نامه	**دکتر علی رجالی**
۳ ـ استاد داور ۱	**دکتر خلیل شفیعی**
۴ ـ استاد داور ۲	**دکتر ایوب ساعی**

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده **دکتر امیر نادری**

تشکروقدردانی

برخود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر همدانی و جناب آقای دکتر رجالی که در نوشتن این پایان نامه با راهنمائیهای خردمندانه خود،مرا مورد لطف قرار دادند صمیمانه سپاسگزاری و تشکر نمایم،همچنین از جناب آقای دکتر شفیعی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبّل فرمودند سپاسگزارم .

از خانوادهٔ عزیزم که با متانت مرا در این مسیر توفیق راه شدند،بسیار متشکر و قدردانم.از خداوند منّان سلامتی تمام این بزرگان را خواستارم .

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعـــات ،
ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است .

تقدیم به خانوادهٔ عزیزم و دو خورشید همیشه تابان آسمان زندگی‌ام :

مادرم و مرحوم پدرم

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست مطالب ..... شش

چکیده ۱

فصل اول: مقدمه ۲

مقدمه ۲

فصل دوم: توزیع نمائی یک متغیره و مشخصه‌های آن

۲ـ۱ـ تابع قابلیت اعتماد ٦

۲ـ۲ـ تابع نرخ شکست ٦

۲ـ۳ـ روابط موجود بین توابع f , F , R , h ۹

۲ـ۴ـ خصوصیات تابع h ۹

۲ـ۵ـ تابع تجمعی نرخ شکست ۹

۲ـ٦ـ خصوصیات تابع H ۱۰

۲ـ۷ـ تابع چگالی و تابع قابلیت اعتماد توزیع نمائی ۱۲

۲ـ۸ـ ارتباط توزیع نمائی با فرایند پواسون ۱۴

۲ـ۹ـ خواص توزیع نمائی ۱۵

فصل سوم: معرفی توزیعهای نمائی دو متغیره و روش تولید آنها

۳ـ۱ـ توزیعهای نمائی دو متغیره ۱۹

۳ـ۲ـ مدل فروند ۲٦

۳ـ۳ـ مدل مارشال ـ الکین (BVE) ۳۱

۳ـ۴ـ مدل بلاک ـ باسو $(ACBVE)$ ۳۸

۳ـ۵ـ توزیع فردی و پاتیل (BEE) ۴۲

۳ـ٦ـ تولید داده‌های زوجی با توزیع فروند ۴۷

۳ـ۷ـ معیارهای وابستگی ناپارامتری ۵۰

فصل چهارم: برآورد پارامترها در توزیعهای نمائی دو متغیره و آزمونی برای همبستگی

۴-۱- برآورد پارامترهای مدل فروند ۵۳

۴-۲- برآورد پارامترهای *BVE* ۵۶

۴-۳- برآورد پارامترهای *ACBVE* ۶۲

فصل پنجم: مشخصه‌های خانواده‌ای از توزیعهای نمائی دو متغیره بر پایهٔ نرخ شکست شرطی کاکس

۵-۱- رابطهٔ خانواده *BEE* با *TFR* ۶۵

۵-۲- ارتباط بین نرخ شکست کلی ثابت با *BLMP* ۷۱

۵-۳- مشخصه‌های پنج توزیع نمائی دو متغیره ۸۵

فصل ششم: توزیع نمائی چند متغیرهٔ مارشال - الکین *(MVE)*

۶-۱- مدلسازی *MVE* ۸۸

۶-۲- خواص توزیع *MVE* ۹۱

فصل هفتم: برآورد پارامترهای توزیع نمائی چند متغیره مارشال - الکین

۷-۱- معرفی مدل "شوک مخرب" ۹۶

۷-۲- چگالی و تابع درستنمایی ۹۹

۷-۳- برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمائی *(MLE)* ۱۰۰

ضمیمه

ضمیمه الف ۱۰۳

ضمیمه ب ۱۰۵

مراجع ۱۱۳

چکیده

به‌دلیل اهمیت توزیع نمایی یک‌متغیره درنظریه قابلیت اعتماد،به معرفی برخی از توزیعهای نمایی دومتغیره که درمبحث قابلیت اعتمادبکارمیروند مانند مدل فروند،توزیع مارشال‌والکین(BVE)،توزیع بلاک و باسو ($ACBVE$)می‌پردازیم،سپس مشخصه‌هایی از این توزیعها رابراساس نرخ شکست شرطی‌کاکس مطالعه می‌کنیم.همچنین توزیع دومتغیرهٔنمایی BVE رابه‌حالت چند متغیره نمایی MVE تعمیم داده ،خصوصیاتی ازاین توزیع رانیز بیان می‌کنیم .

فصل اول

مقدمه

اواخر دهۀ ۴۰ و اوایل دهۀ ۵۰، مسأله غیرقابل اعتماد بودن وسائلی که در صنعت هوانوردی بکار برده می‌شد، مطرح گردید. افزایش دقت و قابلیت اعتماد تجهیزات پیچیدۀ الکترونیکی انگیزه‌هائی بودند که موجب پیشرفت نظریه قابلیت اعتماد گردید.[۱]

نظریه قابلیت اعتمادبخشی از کنترل کیفیت است که در آن مشخصۀ مورد مطالعه، طول عمر قطعه‌است ،ولی به دلیل پرهزینه بودن جمع‌آوری داده‌های طول عمر، سعی می‌شود از حداقل داده‌ها، بیشترین اطلاعات استنتاج گردد. بنابراین در مقابل چارت‌های کنترلی ساده، تمرکز روی مطالعه انواع توزیعهای موجود در نظریه قابلیت اعتماد وجود دارد.[۲]

برای تعیین قابلیت اعتماد یک سیستم به شرط داشتن قابلیت اعتماد مؤلفه‌هایش، معمولاً فرض استقلال بین شکست مؤلفه‌ها را در نظر می‌گیرند. زیرا داشتن چنین فرضی محاسبه قابلیت اعتماد سیستم را ساده می‌نماید. امّامی‌دانیم که محاسبۀ احتمال توام رخدادها به کمک حاصل ضرب احتمال آن رخدادها بدون در نظر گرفتن استقلال بین آنها معنی‌دار نخواهد بود و در یک سیستم وابستگی‌های معینی‌به دلیل عوامل کارکرد یا همبستگی‌های درونی بین مؤلفه‌ها و زیرسیستم‌های آن وجود دارد. بنابراین در بسیاری از موارد، فرض داشتن استقلال بین شکستها خطاهای بزرگی را برای پذیرش ایجاد می‌کند.

به منظور گذر از این مشکل بایستی توزیع توأم زمان شکست مؤلفه‌هائی که ساختار یک سیستم را تشکیل می دهند بدست آورد و آنگاه به کمک آن به محاسبهٔ قابلیت اعتماد آن سیستم پرداخت.[۳]

در بسیاری از بررسیهای آماری که در آن دو متغیر تصادفی وابسته مطالعه می‌شوند، از توزیع نرمال دو متغیره به عنوان مدل مناسب استفاده می‌شوداگرچه دراین حالت توزیعهای کناری نیز نرمال هستند ولی چنین مدلی در حالت کلی مدل مناسب برای توصیف زمانهای شکست در یک سیستم نمی‌باشد، بلکه مدل دو متغیره‌ایی مناسب است که دارای توابع چگالی کناری به فرم نمائی یا وایبال و یا مشابه با آنها باشد.[۳]

در چهار دههٔ گذشته توزیعهای دومتغیرهٔ گوناگونی، مخصوصاً تعدادی که برای تحلیل قابلیت اعتماد بکار می‌روند،ایجادشده‌است. مورگنسترن[۱] در ۱۹۵۶ فرمولی کلی برای توزیعهای دومتغیره ارائه داد[۴] بعد از آن گامبل[۲][۵] در خلال سالهای ۱۹۶۷_۱۹۶۰ به مطالعه توزیعهای دومتغیرهٔ نمائی و لجستیک پرداخت، علاوه برآن توزیعهای دومتغیره نمائی توسط آمار دانانی همچون فارلی[۳][۶] در ۱۹۶۰، فروند[۴][۷] ۱۹۶۱، مارشال والکین[۵][۸] ۱۹۶۷ پیدا شد.

از ۱۹۷۰ به بعد مدل‌بندی توزیعهای دومتغیره و چندمتغیره به کمک مدل‌های شوک در قابلیت اعتماد پایه اصلی تحقیقات آماردانانی چون بمیز، بین‌وهیگینز[۶][۹] ۱۹۷۲، پروشخان و سالو[۷][۱۰و۱۱] ۷۶_۱۹۷۴، بلاک و باسو[۸][۱۲] ۱۹۷۴، مارشال[۱۳] ۱۹۷۵، بلاک[۱۴] ۷۷_۱۹۷۵، فردی و پاتیل[۹][۱۵] ۱۹۷۷، شیکد[۱۰] ۱۹۷۷، هالمز[۱۱][۱۶] ۱۹۸۰، سینگپوروالا[۱۲] (۱۹۸۶)، سرکور[۱۳][۱۷] ۱۹۸۷، باسو[۱۸] ۱۹۸۸، باسو و کای‌سان[۱۹] ۱۹۹۷_۱۹۹۳ همدانی[۱۴][۳] ۱۹۹۵_۱۹۸۰ بوده است.

توزیعهای دومتغیره به کمک توزیعهای شرطی در خانوادهٔ توزیعهای نمائی نیز توسط افرادی مانند آرنولد و

---

[۱] Morgenstern
[۲] Gumbel
[۳] Farlie
[۴] Freund
[۵] Marshal and Olkin
[۶] Bemis-Bain-Higgins
[۷] Proschan and Sullo
[۸] Block and Basu
[۹] Friday and Patil
[۱۰] Shaked
[۱۱] Holmes
[۱۲] Singpurwalla
[۱۳] Sarkar
[۱۴] Hamadani

استراس[۱۵][۲۰] در ۱۹۸۸ مورد بررسی قرار گرفت.

در فصل دوّم این نوشتار به معرفی برخی از مفاهیم بکار رفته در نظریه قابلیت اعتماد مانند مفهوم تابع نرخ شکست، تابع قابلیت اعتماد، روابط موجود بین تابع چگالی، تابع توزیع و تابع نرخ شکست، انواع نرخ شکست پرداخته توزیع نمائی یک متغیره، ارتباط آن با فرایند پواسون، خواص و مشخصه اصلی این توزیع را بیان می‌نمائیم. در فصل سوم ضمن معرفی مدل شکست دومتغیره، خاصیت بی حافظگی دوبعدی (BLMP) و نرخ شکست دوبعدی $r(x,y)$ توزیعهای نمائی دو متغیرهٔ مهّم از لحاظ کاربرد در تحلیل قابلیت اعتماد نظیر BVE،ACBVE، BEE و خصوصیاتی مانند گشتاورهای این توزیعها، توابع چگالی کناری، نحوهٔ تولید داده‌ها، معیارهای وابستگی ناپارامتری اجرای برنامه تولید داده‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. برآورد پارامترهای برخی از توزیعهای نمائی دو متغیره ذکر شده در فصل دوّم از طریق روشهای حداکثر درستنمائی (MLE)، گشتاوری (MME) و روش INT، مقایسه این سه روش از لحاظ کارائی با یکدیگر و مقایسه کار انجام شده توسط بمیز،بین وهیگینز [۹]، با نتایج موجود همچنین برآورد ضریب همبستگی ρ در BVE و آزمونی برای استقلال طول عمر مؤلفه‌ها در حالتی که مؤلفه‌ها دارای توزیع BVE هستند در فصل چهارم ارائه شده است. در فصل پنجم ضمن معرفی نرخ شکست شرطی کاکس مشخصه‌هایی از خانوادهٔ توزیعهای نمائی دومتغیره را بررسی نموده، ارتباط بین نرخ شکست کلی با BLMP را به همراه مثالهایی بیان می‌نمائیم. مدل‌سازی توزیع نمائی چندمتغیرهٔ $(۱ - ۲^k)$ پارامتری به کمک مدل شوک مخرب و بررسی برخی خصوصیات این توزیع، همچنین برآورد پارامترهای توزیع نمائی چند متغیره با $(k + ۱)$ پارامتر به کمک روشهای ماکسیمم درستنمائی (MLE) و روش INT جهت اولین تکرار در حل معادلات درستنمائی، ارائه دو پیشنهاد موضوعاتی هستند که در فصول ششم و هفتم به آن پرداخته‌ایم.

---

[۱۵] Arnold and Strauss

فصل دوم

توزیع نمائی یک متغیره ومشخصه‌های آن

مقدمه :

همانگونه که توزیع نرمال در زمینه‌های مختلف آماربکارمی‌رود، توزیع نمائی نیز در مطالعه قابلیت اعتماد از اهمیّت بسزائی برخوردار است. از ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۵، اپشتاین[۱] و سابل[۲] [۲۱و۲۲] و دیویس[۳] [۲۳] در یک تجزیه و تحلیل آماری از داده‌های مدت زمان کارکرد یک وسیله تا خرابی، نشان دادند که در بسیاری از حالات توزیع طول عمر قطعه، نمائی است.[۱]

اگر چه توزیع نمائی از قابلیت عملی محدودی برخوردار است و برای بسیاری از متغیرهای تصادفی طول عمر قابل بکارگیری نیست ، لیکن به‌دلیل دارا بودن خاصیت بی حافظگی[۴] و اینکه توزیع نمائی، تنها توزیعی است که دارای چنین خاصیتی است ، از آن بطور مکرر در مطالعه قابلیت اعتماد استفاده می‌گردد.[۲۴]

---

[۱] Epstein

[۲] Sobel

[۳] Davis

[۴] Lack of Memory Propety (LMP)

در این فصل به معرفی توزیع یک متغیره مهم در تئوری قابلیت اعتماد یعنی توزیع نمائی پرداخته، برخی از خصوصیات آن از قبیل تابع نرخ شکست، تابع چگالی و مشخصهٔ این توزیع را بیان می‌کنیم. امّا پیش از آن مفاهیمی از قبیل تابع قابلیت اعتماد[۵]، تابع نرخ شکست[۶] و رابطهٔ آن با تابع چگالی و تابع توزیع شرح داده می‌شود.

۲ـ۱: تابع قابلیت اعتماد

اگر متغیر تصادفی T بیانگر طول عمر (زمان تا خرابی) یک قطعه باشد که منظور از شکست یا خرابی موجود، متوقف شدن توانائی موجود برای انجام کار معین تحت شرایط لازم می‌باشد، آنگاه تابع قابلیت اعتماد در زمان t را با نماد $R(t)$ یا $\bar{F}(t)$ نمایش داده و آنرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم[۲۴]:

تعریف ۲ـ۱: قابلیت اعتماد عبارت است از احتمال کار کردن موجود تحت شرایط معین در فاصله زمانی معین و بدون خرابی برای انجام یک مأموریت، یعنی:

$$\begin{aligned} R(t) &= P\left(\begin{array}{c}\text{موجود در فاصله}(0,t)\text{تحت}\\ \text{شرایط لازم از انجام کار معین}\\ \text{باز نماند}\end{array}\right) \\ &= P(T \geq t) \\ &= \bar{F}(t) \qquad (۱-۲) \end{aligned}$$

۲ـ۲: تابع نرخ شکست :

اندازه‌گیری قابلیت اعتماد با شکست‌هائی که در طول زمان اتفاق می‌افتد مرتبط است، بنابراین یافتن توزیع شکست تلاشی جهت بیان طول عمر قطعه یا موجود به زبان ریاضی‌است . امّا بدلیل آنکه عوامل فیزیکی بسیاری در شکست (خرابی) یک موجود در لحظه‌ای مشخص دخالت دارد و جداسازی و بیان این عوامل به صورت ریاضی میسرنیست ، بنابراین انتخاب یک توزیع شکست هنوز هم کاری هنری است. همچنین در تشخیص زمان شکست واقعی از میان توابع احتمالی نامتقارن به دلیل پراکنده بودن مشاهدات در سمت راست توزیع، با مشکل روبرو است . بنابراین مفهومی‌موردنیازاست تا بوسیله آن به‌توان بین توابع توزیع مختلف براساس یک خاصیت فیزیکی تمایز قائل شد.[۲۴]

---

[۵] Reliability function

[۶] hazard rate function

چنین مفهومی بر پایه تابع نرخ شکست (نرخ شکست آنی[۷] یا بطور ساده نرخ شکست[۸] (متفاوت با چگالی شکست[۹]) بیان‌می شود و در ادبیات قابلیت اعتماد به عنوان hazard rate معرفی می‌گردد. در آمار بیمه نرخ شکست را تحت عنوان "نیروی فناپذیری (میرائی)[۱۰]"، در تئوری مقادیر بیشین و کمین به عنوان "تابع شدت[۱۱]" و در علم اقتصاد معکوس آنرا "نسبت میل[۱۲]" می‌نامند.

می‌دانیم تابع نرخ شکست تابعی از زمان است که مفهوم آنرا می توان با عباراتی نظیر نسبت خرابی قطعات در فاصله $(t, t+\Delta_t)$ هنگامی‌که قطعات تا زمان t سالم هستند، بیان نمود که چنین عباراتی دارای یک مفهوم احتمالی هستند. یعنی هر گاه متغیر تصادفی T بیانگر مدت زمان کار کرد تا خرابی موجود بوده و $F(t)$ و $f(t)$،به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی آن باشند و تابع نرخ شکست را با نماد $h(t)$ یا $r(t)$ نمایش دهیم در این صورت $h(t)dt$ بیانگر آن است که یک قطعه که تا زمان t سالم بوده، در فاصله زمان $(t, t+\Delta_t)$ خراب شود[۲۴]. به عبارت دیگر

$$h(t) = \lim_{\Delta_t \to \circ} \left\{ \frac{P\left(\begin{array}{c|c} \text{یک موجود با عمر} t \text{در بازهٔ} & \text{موجود تا زمان} t \\ \text{زمانی} (t, t+\Delta_t) \text{خراب شود} & \text{سالم بوده است} \end{array} \right)}{\Delta_t} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta_t \to \circ} \frac{P(t < T < t+\Delta_t | T > t)}{\Delta_t}$$

$$= \lim_{\Delta_t \to \circ} \frac{F(t+\Delta_t) - F(t)}{\Delta_t \cdot R(t)}$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)}$$

بنابراین

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{۱ - F(t)} \qquad (۲-۲)$$

---

[۷] Instantaneous failvre rate
[۸] Failure rate
[۹] Failure density
[۱۰] Force of mortality
[۱۱] intensity Function
[۱۲] Mill's Ratio