بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

فهرست مطالب

فصل دوم معیارهای جداپذیری و معیارهای درهم تنیدگی

فصل سوم سنجه های در هم تنیدگی

چکیده

در هم تنیدگی یکی از شگفت انگیزترین جنبه های مکانیک کوانتومی است. تشخیص حالت های کوانتومی درهم تنیده و تعیین میزان در هم تنیدگی آنها از مهمترین مباحث نظریه اطلاعات کوانتومی است. برای این منظور، سه رهیافت مهم وجود دارد. رهیافت اول، استفاده از معیارهایی است که به صورت کیفی و گاهی نیز به صورت کمی، درهم تنیدگی یک حالت کوانتومی را مشخص می کنند. از میان معیارهای موجود، در این پایان نامه معیارهای پرز، هورودکی، برد، کاهش، بازآرایی ماتریسی و بی نظمی را مورد مطالعه قرار می دهیم و با اعمال هر کدام از این معیارها بر حالت های کوانتومی مهمی همچون حالت های ورنر و حالت های بیشینه درهم تنیده بل، نقاط ضعف و قوت هر کدام از آنها را بررسی می کنیم. رهیافت دوم که کمّی تر است و میزان در هم تنیدگی یک حالت را مشخص می کند، استفاده از مفهوم سنجه درهم تنیدگی است. سنجه های مهمی چون سنجه درهم تنیدگی شکل یابی، سنجه توافق، سنجه منفی بودن و سنجه هندسی در هم تنیدگی، توابعی ریاضی اند که با اثر کردن بر روی یک حالت کوانتومی(ماتریس چگالی)، میزان درهم تنیدگی آن حالت را معین می کنند. اعمال این سنجه ها بر برخی حالت های کوانتومی و بررسی ویژگیهای آنها و نیز ارتباط آنها با یکدیگر، نتایج جالبی را در مورد کارآیی و اهمیت مفهوم سنجه درهم تنیدگی به دست می دهد. گرچه تلاش برای یافتن معیارها و سنجه های جدید همچنان ادامه دارد، اما به طور قطع و یقین نمی توان گفت کدام معیار یا سنجه، کارآیی و جامعیت بیشتری دارد زیرا هرکدام از آنها در بررسی رده خاصی از حالت ها مفید است. رهیافت سوم برای تشخیص حالت های در هم تنیده، استفاده از مفهوم شاهد درهم تنیدگی است. شاهد درهم تنیدگی عملگری هرمیتی است که مقدار چشمداشتی آن با ماتریس چگالی حالت مورد مطالعه، آزمون کارآمدی برای تعیین درهم تنیدگی است. چه بنا به قضیه هان-باناخ، یافتن شاهدی که مقدار چشمداشتی آن با ماتریس چگالی مورد نظر منفی است، نشان دهنده درهم تنیده بودن حالت مذکور است. اما آنچه که برای ما اهمیت دارد، ساختن شاهدهایی است که چنین خصوصیتی داشته باشند. در این پایان نامه دو روش مهم ساختن شاهد یعنی استفاده از عملگرهای موضعی متعامد(LOO) و بهینه سازی به روش برنامه ریزی خطی را مورد مطالعه قرار داده و با استفاده از آن تلاش می کنیم تا برای یک حالت کوانتومی نمونه، شاهدی بسازیم که حدود درهم تنیدگی آن را مشخص کند.

کلید واژه ها: درهم تنیدگی، معیار، سیستم دو قسمتی، سنجه، شاهد درهم تنیدگی، عملگر متعامد موضعی، بهینه سازی محدب.

مقدمه

درهم تنیدگی کوانتومی یکی از جالب ترین جنبه های مکانیک کوانتومی است. همان گونه که اینشتین، پودولسکی و رزن [۱] نشان داده اند، حالت های کوانتمی دو سیستم که از لحاظ فیزیکی جدا از هم می باشند و در گذشته با هم اندرکنش داشته اند، می توانند در پاسخگویی به بسیاری از سوالات در خصوص پیامدهای اندازه گیری موضعی کارساز باشند. حالت های کوانتومی خالص درهم تنیده آنتروپی صفر دارند. اما به نظر می رسد وقتی که فرد مشاهده کننده تنها به یکی از زیرسیستم ها دسترسی دارد، این حالت ها می توانند آنتروپی بیشینه داشته باشند. در مدل های کلاسیکی، وجود هر گونه رابطه ای بین اندازه گیری های موضعی روی سیستم های جدا از هم ممنوع است. اما در مدل های کوانتومی، اندازه گیری های موضعی روی سیستم های کوانتومی جدا از هم، تا حدود معینی می توانند با هم رابطه داشته باشند. نامساوی های بل این حدود را مشخص می کنند[۲]، و نقض نامساوی های بل مستلزم درهم تنیدگی است. به علاوه، اخیرا معلوم شده است که درهم تنیدگی یک منبع بسیار مهم در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی مانند ترابرد کوانتومی[۱] ، محاسبات کوانتومی[۲] ، رمزنگاری کوانتومی[۳] ، و مخابرات کوانتومی [۴] است[۳]. برای مورد حالت های خالص، تعیین شرط درهم تنیدگی بسیار ساده است، زیرا مبتنی بر خواص تجزیه اشمیت یا به طور معادل مرتبه ماتریس های چگالی کاهیده است که به صورت سرراست محاسبه می شود. اما برای مورد حالت های دوقسمتی آمیخته، هیچ روش عملی منحصر به فردی یافته نشده است که به طور تضمینی بتواند درهم تنیدگی هر حالت درهم تنیده را تشخیص دهد. در سال های اخیر، تلاش های

[۱] Quantum Teleportation
[۲] Quantum computation
[۳] Quantum cryptography
[۴] Quantum communication

قابل توجهی برای پاسخگویی به این سوال انجام شده است [٤،٥،٦،٧]. هنوز اما فقط معیارهای ناکاملی پیشنهاد شده اند که یا می توانند برخی از حالت های درهم تنیده و نه همه آنها را تشخیص دهند و یا این که فقط برای ابعاد محدودی پاسخگو باشند. چنین وضعی تا حدودی ناخوشایند است، زیرا همه حالت های تولید شده در آزمایشگاه برای کاربردهای عملی فرآیندهای اطلاعات کوانتمی حالت های آمیخته هستند. بنا بر این چه از دیدگاه عملی و چه از دید گاه نظری، به ابزار موثری نیاز داریم که بتواند شرط در هم تنیدگی یا جداپذیری یک حالت را برای ما معین کند. یک حالت دو قسمتی آمیخته را جداپذیر گویند [٨] هر گاه بتوان آن را به صورت ترکیبی محدب از حالت های حاصل ضرب خالص نوشت:

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right| \otimes \left|\phi_i\right\rangle\left\langle\phi_i\right|$$

که در آن $\left|\phi_i\right\rangle$ ، $\left|\psi_i\right\rangle$ به ترتیب بردارهای حالت روی فضاهای H_A و H_B متعلق به زیرسیستم های A و B هستند و داریم: $p_i > 0$ و $\sum_i p_i = 1$. حالتی را که چنین تجزیه ای را قبول می کند، می توان توسط «عملگرهای موضعی(تبدیلات یکانی، اندازه گیری ها و ...) و مخابرات کلاسیکی » یا LOCC [١] به دو قسمت تجزیه کرد و بنا براین چنین حالتی نمی تواند درهم تنیده باشد. ابزار موثری که بتواند شرط درهم تنیدگی یا جداپذیری یک حالت را برای ما معین کند، « معیار» نامیده می شود. معیار جداپذیری خاصیت ساده ای است که به سادگی می توان نشان داد برای هر حالت جداپذیری برقرار است. هر معیار جداپذیری شرط لازمی را برای جداپذیری به دست می دهد که شرط کافی نیست. اگر یک حالت ρ این شرط را ارضا نکند، آن گاه باید درهم تنیده باشد.

یکی از اولین و پرکاربردترین این معیارها معیار پرز یا ترانهاد جزئی مثبت (PPT) است که می گوید اگر ترانهاد جزئی یک ماتریس چگالی دلخواه مانند ρ ماتریسی مثبت نباشد، و به عبارتی دارای ویژه مقدار منفی باشد، آن گاه درهم تنیده است. علاوه بر این هورودکی [١١] بر اساس کار وورونویچ[٢] [١٠] ، نشان داده است که در فضاهای $2 \otimes 2$ و $2 \otimes 3$ شرط پرز شرط لازم و کافی برای درهم تنیدگی است. به هر حال در فضاهای با ابعاد بالاتر، حالت هایی وجود دارند که با وجود PPT بودن، درهم تنیده اند که حالت های درهم تنیده مقید نامیده می شوند[١٢]. معیار مفید دیگر برای تعیین درهم تنیدگی حالت های PPT، معیار برد است [١٠،١٢]. این معیار بر اساس وجود یک مجموعه حالت های حاصل ضرب خالص $\{\left|\psi_i\right\rangle\left|\phi_i\right\rangle\}$ برای هر حالت جداپذیر ρ استوار است که این مجموعه حالت های حاصل ضرب خالص، برد ρ را تشکیل می دهد، در حالی که $\{\left|\psi^*_i\right\rangle\left|\phi_i\right\rangle\}$

---

[١] Local operators and classical commnication

[٢] Woronowitz

برد ρ^{T_A} را تشکیل می دهد. معیارهای دیگری که عموما ضعیف تر از معیار پرز هستند، معیار کاهش و معیار بی نظمی و مهادسازی می باشند. هیچ یک از این معیارها و حتی هیچ ترکیبی از آنها به منظور ارائه یک شاخص کامل برای جداپذیری، کافی نیستند.

رهیافت دیگر برای تشخیص درهم تنیده بودن و جداپذیر بودن حالت ها شامل « شاهد های درهم تنیدگی » است[۱۳]. یک شاهد درهم تنیدگی یک مشاهده پذیر مانند W است که مقدار چشمداشت آن روی هر حالت جداپذیر نامنفی است، اما مقدار چشمداشت آن روی یک حالت درهم تنیده ρ منفی است. در این حالت می گوییم که شاهد W درهم تنیدگی ρ را تشخیص می دهد. این ایده علاوه بر ارائه ابزار نظری دیگری برای تشخیص حالت های درهم تنیده، پاسخ این سوال را که « آیا یک روش تجربی برای تشخیص مجموعه حالت های کوانتومی وجود دارد یا نه؟» در اختیار ما می گذارد. با مطالعه ساختار هندسی مجموعه حالت های کوانتومی می توان نشان داد که برای هر حالت درهم تنیده، یک شاهد درهم تنیدگی W وجود دارد [۱۱،۱۰]. بنا بر این همواره مشاهده پذیری که می تواند اندازه گرفته شود، وجود دارد که نشان خواهد داد که حالت درهم تنیده است.

مسئله دیگری که در نظریه اطلاعات کوانتومی مطرح است، تعیین مقدار کمی درهم تنیدگی یک حالت درهم تنیده است. در واقع درهم تنیدگی کوانتومی همانند پتانسیل در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی عمل می کند و لذا بایستی بتوان مانند هر پتانسیلی یک مقدارکمی برای آن پیدا کرد. هر تابعی که مقدار درهم تنیدگی کوانتومی را مشخص کند سنجه درهم تنیدگی نامیده می شود. از مهمترین سنجه هایی که تاکنون برای تعیین محتوای کمی درهم تنیدگی سیستمهای دو ذره ای پیشنهاد شده است، درهم تنیدگی شکل یابی است که توسط بنت[۱] و همکارانش [۹] معرفی شده است. درهم تنیدگی شکل یابی مقدارکمی منابع لازم برای تولید یک حالت درهم تنیده را مشخص می کند. هیل[۲] و ووترز[۳] [۱۹] نشان دادند که برای سیستم های $2\otimes 2$ درهم تنیدگی شکل یابی تابع یکنواختی از کمیت دیگری بنام توافق[٤] است. ووترز در مرجع [۲۰] روشی جهت محاسبه توافق یک حالت دلخواه از سیستم $2\otimes 2$ ارائه داده است.

در فصل اول این پایان نامه پس از ارائه تعاریف ضروری مربوط به انواع حالت های کوانتمی اعم از جداپذیر و درهم تنیده، تعریف برخی از عملگرهای موضعی را به طور مبسوط آورده ایم. سپس شاهد درهم تنیدگی را تعریف و قضیه مربوط به آن را مطرح کرده ایم. و این فصل را با معرفی مفهوم نگاشت مثبت، قضیه هورودکی و یکریختی جمیولکوفسکی به پایان برده ایم.

---

[۱] Bennet
[۲] Hill
[۳] Wootters
[٤] Concurrence

در فصل دوم به بررسی برخی معیارهای درهم تنیدگی پرداخته ایم. مهمترین آنها معیار پرز است که در حالت کلی فقط در فضاهای $2 \otimes 2$ و $3 \otimes 2$ شرط لازم و کافی برای جداپذیری است. با ارائه مثال نقض عدم برقراری این معیار در ابعاد بالاتررا نشان داده ایم. معیاردیگر معیار کاهش است که آن نیز همانند معیار پرز مبتنی برمفهوم نگاشت های مثبت اما نه کاملاً مثبت است. این معیارنیز با مثالهای مفصلی مورد بررسی قرار گرفته است. درخلال این بحث ها به نحوه ساختن شاهدهای درهم تنیدگی از روی نگاشت های مثبت اما نه کاملاً مثبت نیز اشاره کرده ایم. نحوه طبقه بندی حالت ها رانیز با لحاظ کردن تعریف حالت درهم تنیده PPT و نیز قضیه لونشتاین و سنپرا[1] به تفصیل مورد مطالعه قرار داده ایم. در ادامه این فصل معیار بازآرایی ماتریسی را که مبتنی برنوع خاصی از تبدیل ماتریسی است که درآن درآیه های ماتریس مورد نظر به شکل خاصی تغییر آرایش می دهند بررسی کرده ایم. در این معیارتعریف نرم کی فن نقش اساسی ایفا می کند. معیار آنتروپی، دیگر معیار مهمی است که در این فصل مورد مطالعه قرار گرفته است. این فصل رابا تعریف معیار عمده سازی[2] به پایان برده ایم.

در فصل سوم به بررسی سنجه های کوانتمی پرداخته ایم. تعاریف و خواص یک سنجه درهم تنیدگی مورد مطالعه قرار گرفته است. و مونوتون که حالت خاصی از سنجه است تعریف شده است. سنجه شکل یابی و سنجه توافق[3] دو سنجه مهمی هستند که ارتباط آن دو با هم نیز حائز اهمیت است وما این مطلب را به تفصیل بررسی کرده ایم. درادامه فصل سوم تعریف مونوتون مهمی به نام منفی بودن[4] را آورده ایم. این فصل را با مطالعه سنجه هندسی که مبتنی بر تعریف فاصله بین نزدیکترین حالت جداپذیر به حالت مورد مطالعه است، به پایان برده ایم.

فصل چهارم این پایان نامه نیز به روشهای ساختن شاهدهای درهم تنیدگی برای حالت های درهم تنیده اختصاص یافته است. در این فصل ابتدا با نحوه ساختن شاهد درهم تنیدگی با استفاده از مشاهده پذیرهای متعامد موضعی[5] آشنا می شویم و کاربرد آن را برای یک حالت کوانتمی نمونه بررسی می کنیم وسپس روش بهینه سازی به روش برنامه ریزی خطی[6] را معرفی می کنیم و تلاش می کنیم با استفاده از آن شاهدی را برای حالت کوانتمی نمونه مذکور بسازیم.

---

[1] Lewenstein and Sanpera theorem
[2] Majorization
[3] Concurrence
[4] Negativity
[5] Local Orthogonal Operators
[6] Linear Programming

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم مورد نیاز در طول پایان نامه را معرفی می کنیم.

۱-۱ **فضای هیلبرت**: یک فضای برداری کامل را که در آن ضرب داخلی تعریف می شود، فضای هیلبرت[۱] می گویند. به هر سیستم کوانتومی یک فضای هیلبرت نسبت داده می شود.

حداکثر تعداد بردارهای مستقل دریک فضای هیلبرت H را بعد آن می نامند و با dim H نشان می دهند.در هر فضای هیلبرت می توان به تعداد بعد آن بردار پایه معرفی کرد که هر بردار دلخواه برحسب بردارهای پایه به طور کامل تعیین می شود.

مثلاً با دو حالت $\langle 0|\,,\langle 1|$ به عنوان بردارهای پایه،هر حالت درفضای هیلبرت دو بعدی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad (۱-۱)$$

که درآن αو β دو عدد مختلط دلخواه هستند.

۱-۲ **فضای هیلبرت حاصل از دو سیستم کوانتومی**: دو سیستم کوانتومی A , B را در نظر می گیریم و فضای هیلبرت آنها را به ترتیب با H_A, H_B نشان می دهیم.فضای هیلبرت سیستم مرکب به صورت حاصلضرب تانسوری $H = H_A \otimes H_B$ تعریف می شود ، که برای آن داریم:

---

[۱] Hilbert Space

$$\dim H_A = M \le N = \dim H_B$$

و

$$\dim H = \dim H_A . \dim H_B = M . N \qquad (۲-۱)$$

در سراسر این رساله پایه سیستم A را به صورت $\{ | e_i \rangle \} \in H_A$ در نظر می گیریم. بنابراین هر حالتی در فضای H_A را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} a_i |e_i\rangle \qquad (۳-۱)$$

همچنین پایهٔ سیستم B را به صورت $\{|f_i\rangle\} \in H_B$ در نظر می گیریم.ودر نتیجه هر حالتی را در فضای H_B می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^{N} b_j | f_j\rangle \qquad (٤-۱)$$

از این رو یک پایهٔ فضای مرکب $H = H_A \otimes H_B$ به صورت $\{|e_i\rangle \otimes | f_j\rangle\}$ است و می توان هر حالتی را در فضای مرکب به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle \otimes | f_j\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i, f_j\rangle \in H_A \otimes H_B \qquad (۵-۱)$$

۱-۳ تعریف کیوبیت و سیستم N کیوبیتی :

۱-۳-۱ کیوبیت:

کیوبیت[۱] که مخفف کوانتم بیت[۲] است ، عبارت است از یک فضای هیلبرت دو بعدی. معمولاً دو بردار پایهٔ متعامد بهنجار یک کیوبیت را با $|1\rangle, |0\rangle$ نشان می دهند.

در اینصورت ، هر حالت تک کیو بیتی را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad ; \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad ; \quad a,b \in C \qquad (٦-۱)$$

a و b ضرایب بسط هستند که به ترتیب دامنه ی احتمال بودن در حالت های $|1\rangle, |0\rangle$ را نشان می دهند و C نشانگر میدان اعداد مختلط است. روی میدان اعداد مختلط ، فضای هیلبرت تک کیوبیت، همان فضای C^2 است. فضای هیلبرت یک سیستم دو کیوبیتی ، عبارت است از :

$$H = H_A \otimes H_B = C^2 \otimes C^2 .$$

به طور طبیعی بردارهای پایه ی این فضای هیلبرت به صورت زیرند:

$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$.

---

۱ Qubit
۲ Quantum bit

بنابراین هر حالت را در این فضای چهار بعدی می توان بر حسب این پایه ها نوشت. به عنوان مثال:

$$\left|\psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

۱-۳-۲ سیستم N کیوبیتی:

حالت کوانتمی یک سیستم N-کیوبیتی نیز می تواند به عنوان یک بردار در یک فضای مختلط 2^N بعدی بیان شود. چنانچه پایه های متعامد بهنجار هر کیوبیت را با $|0\rangle, |1\rangle$ نشان دهیم، پایه های متعامد بهنجار سیستم N-کیوبیتی به صورت رشته های دودویی مانند $|01100...101\rangle$ خواهد بود.

۱-٤ حالت خالص[۱]: حالت خالص یک سیستم کوانتومی H عبارت است از تصویرگر $|\psi\rangle\langle\psi|$ روی برداری مانند $|\psi\rangle \in H$. به عبارت دیگر حالت خالص حالتی است که همواره توان دوم آن با خودش برابر است:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$$

۱-٥ حالت خالص جداپذیر[۲]:در یک سیستم کوانتومی دو قسمتی،حالت خالص $|\psi\rangle$ را جداپذیر می گویند اگر بتوانیم آن را به صورت یک بردار حاصل ضرب یعنی به صورت $|\psi\rangle = |e, f\rangle \equiv |e\rangle \otimes |f\rangle$ بنویسیم که در آن $|e\rangle$ حالتی از سیستم اول و $|f\rangle$ حالتی از سیستم دوم است.

۱-٦ حالت خالص درهم تنیده[۳]: یک حالت خالص زمانی درهم تنیده است که جداپذیر نباشد.یعنی نتوان آن را به صورت یک بردار حاصل ضرب $|\psi\rangle = |e, f\rangle$نوشت.یعنی: $|\psi\rangle \neq |e, f\rangle$.

۱-۷ تجزیه اشمیت[٤]:

قضیه اشمیت: هر حالت $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ را می توانیم با انتخاب بردارهای پایه ی مناسب به صورت زیر نشان دهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} a_i \, |e_i, f_i\rangle$$

که در آن:

---

۱ Pure State
۲ Separable Pure State
۳ Entangled Pure State
٤ Schmidt Decomposition

$a_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{M} a_i^2 = 1$.

اثبات: می دانیم که برای هر ماتریس A تجزیه ای به نام تجزیه قطبی به صورت $A = UA_dV^{\dagger}$ وجوددارد که درآن U و V ماتریس های یکانی و A_d یک ماتریس قطری نامنفی است.

بردار حالت $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ را در پایه دلخواه $|i, j\rangle$ می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{M,N} A_{ij}|i, j\rangle = \sum_{k,l=1}^{M,N}\sum_{i,j=1}^{M,N} U_{ik}a_k\delta_{kl}V_{jl}^*|i\rangle|j\rangle$$

وبا قرار دادن $\sum_i U_{ik}|i\rangle = |e_k\rangle$ و $\sum_j V_{jk}^*|j\rangle|f_k\rangle$ ، داریم:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{M} a_k|e_k, f_k\rangle \qquad (۷-۱)$$

که $a_k \geq 0$ و شرط بهنجار بودن $|\psi\rangle$ به رابطه $\sum_{i=1}^{M} a_i^2 = 1$ منجر می شود.

نکته: طبق قضیه ی اشمیت یک حالت خالص حالتی است که در تجزیه اشمیت آن فقط یک جمله وجود دارد.

۱-۸ **مرتبه اشمیت**: تعداد a_i های غیرصفر در تجزیه اشمیت را مرتبه اشمیت گویند. حالتی مانند $|0,0\rangle, |1,0\rangle$ که مرتبه اشمیت آن ۱ باشد، حالت حاصل ضرب خالص است. ثابت می شود که تجزیه اشمیت و در نتیجه مرتبه اشمیت یک حالت، منحصربفرداست.

مثالها:

مثال۱:حالت $|\psi\rangle = |0,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ یک بردار حاصل ضرب است.

مثال۲:حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)$ یک حالت خالص جداپذیر است.

مثال۳:حالت های بل، حالت های خالص درهم تنیده هستند:

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)\,. \;\; ; \quad |\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \qquad (۸-۱)$$

توجه کنید که به جای ضریب (-1) در $|\psi^-\rangle, |\phi^-\rangle$ می توان از $e^{i\pi}$ استفاده کرد وآن را جزو فاز حالت های مذکور در نظر گرفت.در نتیجه ضرایب اشمیت مثبتند: $a_i \rangle 0$.

مثال٤:حالت کلی $|\psi\rangle = a_1|01\rangle + a_2|10\rangle$ رادرنظر بگیرید. اگر $a_1 = 0, a_2 = 1$ یا $a_1 = 1, a_2 = 0$ باشد،این حالت یک بردار حاصل ضرب است و اگر $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، این حالت یک حالت با

درهم تنیدگی بیشینه است. چنین حالتی را حالت کاملاً درهم تنیده می گویند. حالت های بل نمونه ای از حالت های کاملاً درهم تنیده هستند.

۱-۹ **حالت آمیخته**[1]: حالت آمیخته حالتی است که نتوان آن را با یک بردار حالت نشان داد. حالت های آمیخته را با یک ماتریس چگالی ρ که یک عملگر مثبت است نشان می دهند.

۱-۱۰ جداپذیری حالت آمیخته:

حالت آمیخته ρ جداپذیر است، اگر بتوان آن را به صورت ترکیب محدبی از حالت های خالص حاصلضربی نوشت

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} p_i |e_i, f_i\rangle\langle e_i, f_i| \quad (۱-۹)$$

که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

حالت آمیخته را درهم تنیده می گویند اگر جداپذیر نباشد.

۱-۱۱ ماتریس چگالی[2]:

بهتر است حالت های کوانتومی را به جای تابع موج ، با ماتریس چگالی توصیف کنیم، زیرا مفهوم ماتریس چگالی کلی تر از تابع موج است و حالت های آمیخته را نیز می توان با آن توصیف کرد. ماتریس چگالی را معمولا با ρ نشان می دهند. ρ یک عملگر هرمیتی مثبت روی فضای $H = H_A \otimes H_B$ است که بردارهای حالت را به بردارهای حالت دیگر تبدیل می کند. همه ویژه مقادیر ρ نامنفی هستند و رد ρ مساوی ۱ انتخاب می شود. برای ρ مجموعه های کرنل و برد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$k\{\rho\} = \{|\psi\rangle \in H : \rho|\psi\rangle = 0\} \quad ; \quad R\{\rho\} = \{|\psi\rangle \in H : \exists|\varphi\rangle : \rho|\varphi\rangle = |\psi\rangle\}$$

کرنل و برد زیر فضاهای H هستند که به ترتیب توسط ویژه بردارهای با ویژه مقادیر صفر و ویژه بردارهای با ویژه مقادیر مخالف صفر پدید می آیند. بعد زیر فضای برد را مرتبه ρ می گویند.

در فضای $H = H_A \otimes H_B$ می توان عملگر ρ را با استفاده از عملگرهای پایه به صورت زیر بسط داد:

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \, {}_A\langle k| \otimes {}_B\langle l| = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i, j\rangle\langle k, l| \quad (۱-۱۰)$$

---

[1] Mixed State
[2] Density Matrix

۱-۱۲ عملگرهای موضعی[۱]:

عملگرهایی که فقط روی سیستم A یا سیستم B اثر می کنند عملگرهای موضعی نامیده می شوند. عملگری که روی کل فضای $H = H_A \otimes H_B$ اثر کند،عملگر غیر موضعی[۲] گفته می شود. ترانهادجزئی وهمچنین رد جزئی عملگرهای موضعی هستند که درزیر به آن ها می پردازیم:

۱-۱۲-۱ **ترانهاد جزئی**: ترانهاد جزئی عملگری که روی یک سیستم مرکب همان ترانهاد گیری نسبت به یکی از زیر سیستم های آن است. به عنوان مثال، با توجه به رابطه (۱-۱۰)، ترانهاد جزئی ρ نسبت به سیستم A به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\rho^{T_A})^{ij}_{kl} = \rho^{kj}_{il} \qquad \text{و} \qquad \rho^{T_A} = \sum_{ijkl} \rho^{ij}_{kl} |k\rangle_A \otimes |j\rangle_B \, {}_A\langle i| \otimes {}_B\langle l|.$$

اگر A,B هردو یک تبدیل یکانی موضعی انجام دهند، این تبدیل حتی با انجام ترانهاد جزئی توسط یکی از آنها همچنان یکانی باقی می ماند.یعنی:

$$U = U_A \otimes U_B \quad ; \quad (U)(U^\dagger) = 1$$

$$\rho^{new} = U\rho U \;\rightarrow (\rho^{new})^{T_A} = (U\rho U\;)^{T_A} \qquad (۱-۱۱)$$

$$\rho^{new} = U_A \otimes U_B \, \rho (U_A^\dagger) \otimes (U_B^\dagger) \Rightarrow (\rho^{new})^{T_A} = U_A^* \otimes U_B \rho^{T_A} U_A^T \otimes (U_B^\dagger) \qquad (۱-۱۲)$$

نکته: بافرض $\rho^{T_A} \geq 0$ یعنی مثبت بودن عملگر ρ^{T_A} می توان نشان داد: $(\rho^{new})^{T_A} \geq 0$.

اثبات:

$$\forall |\psi\rangle \in H : \langle \psi | \rho^{T_A} | \psi \rangle \geq 0$$
$$\Rightarrow \langle \psi | (\rho^{new})^{T_A} | \psi \rangle = \langle \psi | U_A^* \otimes U_B \rho^{T_A} U_A^T \otimes (U_B^*)^T | \psi \rangle = \langle \varphi | \rho^{T_A} | \varphi \rangle \geq 0$$
$$\Rightarrow \rho^{T_A} \geq 0 \qquad (۱-۱۳)$$

عکس این مطلب هم صادق است، یعنی بافرض $(\rho^{new})^{T_A} \geq 0$ نشان داده می شود: $\rho^{T_A} \geq 0$ (اثبات برگشت پذیر).

نکته: همان طور که می دانیم نقش تبدیل یکانی تبدیل پایه ها است ودر این جا هم مشخص است که مثبت بودن ترانهاد جزئی عملگر ρ تحت هر تبدیل یکانی موضعی، ناوردا است.

۱-۱۲-۲ **رد جزئی**[۳]: رد جزئی یک حالت از سیستم مرکب نسبت به هر کدام از دو زیرسیستم Aیا B ماتریس چگالی مربوط به زیرسیستم دیگر را می دهد. به عنوان مثال، ماتریس چگالی مربوط به بردار حاصل ضرب خالص $|\psi\rangle = |e, f\rangle$ را در نظر بگیرید:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = (|e\rangle_A \otimes |f\rangle_B)({}_A\langle e| \otimes {}_B\langle f|) = |e\rangle_A \, {}_A\langle e| \otimes |f\rangle_B \, {}_B\langle f|$$

---

۱ Local Operators
۲ Global
۳ Partial Trace

رد جزئی ρ نسبت به زیرسیستم A به صورت زیر است:

$$tr_A(\rho) = {}_A\langle e|e\rangle_A |f\rangle_{B\ B}\langle f| = |f\rangle_{B\ B}\langle f| \equiv \rho_B$$

و رد جزئی آن نسبت به زیرسیستمB به صورت زیر است:

$$tr_B(\rho) = |e\rangle_{A\ A}\langle e| \equiv \rho_A$$

رد جزئی یک حالت خالص دلخواه را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

فرض کنید $|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} a_{i\mu}|i\rangle_A|\mu\rangle_B$ تجزیه اشمیت یک حالت خالص دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,\mu} a_{i\mu}a_{i\mu}^{\ *}|i\rangle_A|\mu\rangle_{B\ A}\langle i|_B\langle\mu|$$

با فرض اینکه $\{|\nu_B\rangle\}$ پایه های سیستم B باشد، داریم:

$$\rho_A = tr_B(\rho) = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{\nu} {}_B\langle\nu|\psi\rangle\langle\psi|\nu\rangle_B = \sum_{\nu}\sum_{i,\mu} a_{i\mu}a_{i\mu}^{\ *}\ {}_B\langle\nu|\mu\rangle_{B\ B}\langle\mu|\nu\rangle_B |i\rangle_{A\ A}\langle i|$$

$$= \sum_{i,\mu}|a_{i\mu}|^2\ {}_B\langle\mu|\underbrace{(\sum_{\nu}|\nu\rangle_{B\ B}\langle\nu|)}_{\equiv 1_B}|\mu\rangle_B |i\rangle_{A\ A}\langle i|$$

$$= \sum_{i,\mu}|a_{i\mu}|^2\ \underbrace{{}_B\langle\mu|\mu\rangle_B}_{=1}|i\rangle_{A\ A}\langle i| = \sum_{i,\mu}|a_{i\mu}|^2|i\rangle_{A\ A}\langle i|$$

$$\Rightarrow \rho_A = \sum_i p_i\,|i\rangle_{A\ A}\langle i|$$

که درآن $p_i = \sum_{\mu}|a_{i\mu}|^2$ است.

نکته: رد یک حالت ترانهاد جزئی تحت تبدیلات موضعی پایه ها ناوردا باقی می ماند.

اثبات:

$$\begin{aligned} tr(\rho^{new})^{T_A} &= tr(U_A^{\ *}\otimes U_B\rho^{T_A}U_A^{\ T}\otimes U_B^{\ \dagger}) \\ &= tr((U_A^T\otimes U_B^\dagger)(U_A^*\otimes U_B)\rho^{T_A}) \\ &= tr((U_A^TU_A^*\otimes U_B^\dagger U_B)\rho^{T_A}) \\ &= tr(\rho^{T_A}) \end{aligned}$$

و $(U_A^\dagger U_A)^T = 1 \quad ; U_A^TU_A^* = 1$

مثال:رد جزئی حالت $\rho \equiv |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ که در آن $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ است، نسبت به دو زیرسیستم A,B به صورت زیر است:

$$\rho_A = \frac{1}{2}I_2 \quad \text{و} \quad \rho_B = \frac{1}{2}I_2 .$$

نکته: حالتی که تمام رد های جزئی آن متناسب با ماتریس واحد باشد، کاملاً در هم تنیده نامیده می شود.

در این جا لمی را اثبات می کنیم که در فصل بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

لم: برای دو حالت ρ و σ رابطه زیر همواره برقرار است:

$$tr(\rho^{T_A}\sigma) = tr(\rho\sigma^{T_A}) \qquad (۱۴-۱)$$

برهان: با استفاده از نماد گذاری معمول زیر:

$$\sigma = \sum \sigma_{kl}^{ij} |ij\rangle\langle kl| \Rightarrow \sigma^{T_A} = \sum \sigma_{kl}^{ij} |kj\rangle\langle il|$$

$$\rho = \sum \rho_{kl}^{ij} |ij\rangle\langle kl| \Rightarrow \rho^{T_A} = \sum \rho_{kl}^{ij} |kj\rangle\langle il|$$

داریم:

$$\begin{aligned} tr(\rho^{T_A}\sigma) &= tr\Big(\sum_{i,j,k,l,i',j',k',l'} \rho_{kl}^{ij} |kj\rangle\langle il|\sigma_{k'l'}^{i'j'}|i'j'\rangle\langle k'l'|\Big) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \rho_{kl}^{ij}\sigma_{kj}^{il} \\ &= tr\Big(\sum_{i,j,k,l,i',j',k',l'} \rho_{kl}^{ij} |ij\rangle\langle kl|\sigma_{k',l'}^{i',j'}|k',j'\rangle\langle i'l'|\Big) \\ &= tr(\rho\sigma^{T_A}). \end{aligned}$$

نکته: فضای عملگرهای خطی که روی H اثر می کنند(و آن را با $B(H)$ نشان می دهیم)خود یک فضای هیلبرت با حاصل ضرب اسکالر اقلیدسی زیر است:

$$\langle A|B\rangle = tr(A^{\dagger}B); \;\; A,B \in B(H) \qquad (۱۵-۱)$$

این حاصل ضرب اسکالر معادل با این است که A وB رابه صورت بردارهای ستونی بنویسیم و آنها را در هم ضرب اسکالر کنیم:

$$tr(A^{\dagger}B) = \sum_{i,j} A_{ij}^{*}B_{ij} = \sum_{k=1}^{\dim H^2} a_k^{*}b_k \; .$$

۱-۱۳ شاهد های در هم تنیدگی[۱]:

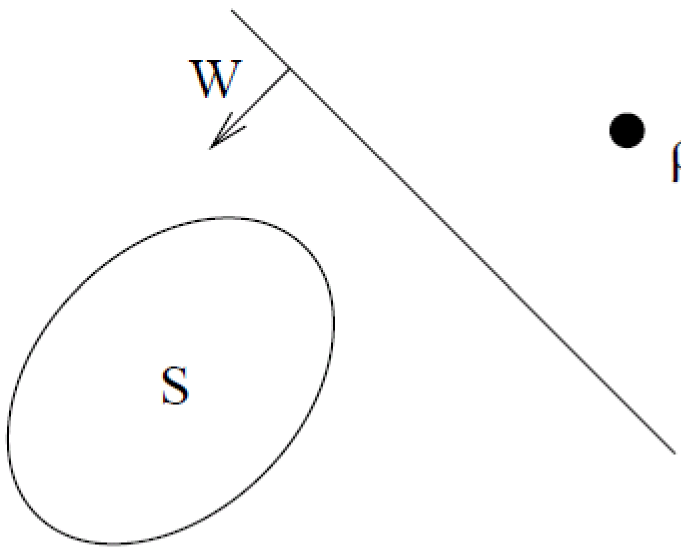
یکی از راههای تشخیص حالت درهمتنیده از حالت جداپذیر استفاده از شاهدهای درهم تنیدگی است. اساس شاهدهای درهم تنیدگی قضیه هان-باناخ است. این قضیه وجود دست کم یک شاهد درهمتنیدگی برای هر حالت درهم تنیده را تضمین می کند.

قضیه هان-باناخ[۲]: فرض کنید S یک مجموعه محدب فشرده در یک فضای هیلبرت متناهی باشد.

---

[۱] Entanglement Witnesses
[۲] Hahan-Banach Theorom

اگر ρ یک نقطه از این فضا باشد به طوری که $\rho \notin S$ ، آن گاه ابر صفحه ای همچون W وجود دارد که ρ را از S جدا می کند [۱۴].



(شکل ۱-شاهد درهم تنیدگی W حالت ρ را از فضای حالت های جداپذیر S جدا می کند)

این قضیه را می توان برای تشخیص در هم تنیدگی حالت های کوانتمی به کار برد،یعنی برای استفاده از این قضیه می توان نقطه ρ در فضا را با یک حالت در هم تنیده، مجموعه محدب وفشرده S را با مجموعه حالت های جداپذیر، و ابر صفحه W را با شاهدهای درهم تنیدگی متناظر کرد.

این قضیه می گوید که برای هر حالت در هم تنیده ی ρ حتماً یک شاهد در هم تنیدگی چون عملگر W وجود دارد که می تواند آن را از مجموعه محدب فشرده حالت های جداپذیر یعنی S جدا کند. به عبارت دیگر، W می تواند درهم تنیده بودن ρ را تشخیص دهد.

شاهد درهم تنیدگی W یک عملگر هرمیتی است به طوری که:

$\exists \rho \notin S : tr(W\rho) < 0$ (ρ حالت درهمتنیده است)

$\forall \sigma \in S : tr(W\sigma) \geq 0$ (σ حالت جداپذیر است)

نکته:اگر برای حالت در هم تنیده ρ، $tr(W\rho) < 0$ باشد، گوییم W ، ρ را تشخیص می دهد.