بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده پیام نور مرکز تبریز

موضوع:

روش نقطه‌درونی اولیه-ثانویه برای برنامه‌ریزی غیر خطی با همگرایی محلی و سراسری قوی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر میرکمال میرنیا

استاد مشاور:

جناب آقای دکترعلیرضا غفاری

دانشجو:

حسام‌الدین تاجدینی

«زمستان ۱۳۸۵»

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

دانشگاه پیام نور

باسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: روش نقطه درونی اولیه دوگان برای برنامه ریزی غیرخطی باشرایط همگرایی سراسری ومحلی قوی.

که توسط حسام الدین تاجدینی **تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۱/۲۶ **نمره :** ۱۶/۵ شانزده و نیم **درجه ارزشیابی:** خوب

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر میرکمال میرنیا	استاد راهنما	دانشیار	
۲- علیرضا غفاری	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
۳- دکتر رحیمی اردبیلی	استاد ممتحن (داور)	استاد	
۴- دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

(نمونه تصویب نامه پایان نامه)

سازمان مرکزی: تهران ۱۹۵۶۹ ابتدای جاده لشکرک - صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تلفن ۹-۲۰۶۰-۲۲۴۲ (۰۲۱)، دورنگار ۲۲۴۴۱۵۱۱ (۰۲۱)
پست الکترونیک Info@pnu.ac.ir، نشانی الکترونیک Http://www.pnu.ac.ir

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست اشکال

چکیده

در روشهای نقطه درونی ابتدا به طریقی یک نقطه در درون ناحیه شدنی مسأله انتخاب می‌شود. سپس دنباله‌ای از نقاط درونی شدنی همگرا به نقطه‌ی بهینه تولید می‌شود.

روش نقطه درونی اولیه ـ ثانویه تلفیقی از روشهای لاگرانژی و نقطه درونی می‌باشد یعنی ابتدا با قرار دادن توابع مانعی و جریمه‌ای مسأله مقید تبدیل به مسأله‌ی نامقید می‌شود و سپس شرایط لازم مرتبه‌ی اول لاگرانژی این مسأله را ایجاد می‌کند و در نهایت با یک روش نقطه درونی به حل مسأله می‌پردازد.

مقدمه

روشهای لاگرانژی روشهای حل مسائل بهینه‌سازی مقید مبتنی بر حل مستقیم شرایط لازم مرتبه اول لاگرانژ می‌باشند. برای مسأله مقید

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t}$$
$$h(x) \leq 0$$

که در آن x،بردار n بعدی و h(x)، تابع برداری m بعدی است این روش عبارتست از حل دستگاه معادلات

$$\nabla f(x)+\lambda^t \nabla h(x)=0$$
$$\lambda_i h_i(x)=0 \qquad i=1,\dots,m$$

نسبت x و λ، مجموعه شرایط لازم یک دستگاه n+m معادله بر حسب n+m مجهول متشکل از مؤلفه‌های x و λ بدست می‌دهد بنابراین این روشها با فضای n+m بعدی سروکار دارند.

در روشهای نقطه درونی ابتدا به طریقی یک نقطه در درون ناحیه شدنی مسأله انتخاب می‌شود. سپس دنباله‌ای از نقاط درونی شدنی همگرا به نقطه‌ی بهینه تولید می‌شود.

روش نقطه درونی اولیه ـ ثانویه تلفیقی از روشهای لاگرانژی و نقطه درونی می‌باشد یعنی ابتدا با قرار دادن توابع مانعی و جریمه‌ای مسأله مقید تبدیل به مسأله‌ی نامقید می‌شود و سپس شرایط لازم مرتبه‌ی اول لاگرانژی این مسأله را ایجاد می‌کند و در نهایت با یک روش نقطه درونی به حل مسأله می‌پردازد. هر چند که اساس کار این روش‌ها مشخص و یکسان است ولی گونه‌های متفاوتی از این روش‌ها ابداع شده‌اند که اهمیت و وسعت کار انجام شده روی آن را نمایان می‌سازد و چنانچه ملاحظه خواهید نمود هنوز موارد زیادی از این الگوریتم‌ها نیازمند مطالعه، تحقیق و اصلاح بیشتری می‌باشد.

روش بکارگیری در این پایان‌نامه مبتنی بر روش نیوتن می‌باشد، که شامل حل دســتگاه معادلات غیرخطی و حل یک نمونه خطی شده در هر تکرار است تحت مفروضات مناسب روش نیوتن دارای همگرایی سراسری و همچنین موضعی بسیار ارزنده‌ای است.

این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل می‌باشد. کـه در فـصل اول کلیـاتی در مـورد مـسئله بهینه‌سازی مقید و مفاهیم اساسی مربوط به آن و سایر مطالب لازم در این زمینه گنجانده شده است.

فصل دوم که قسمت اصلی این پایان‌نامه است شـامل الگـوریتمی از روش نقطـه درونـی اولیه- ثانویه و اثبات همگرایی آن می‌باشد در فصل سوم تعمیم این روش به حالت کلی مسأله بهینه‌سازی مقید و اصلاحات موردنیاز به رشته‌ی تحریر درآمده است.

فصل اول

۱.۱ قیود

مسائل برنامه ریزی غیر خطی کلی را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{array}{lll} \min f(x) & & \\ \text{s.t} & & \\ h_1(x)=0 & g_1(x)\le 0 & \\ h_2(x)=0 & g_2(x)\le 0 & \\ \vdots & \vdots & (۱) \\ h_m(x)=0 & g_P(x)\le 0 & \\ x\in\Omega\subset E^n & & \end{array}$$

که در ان $m \le n$ و توابع f و h_i ، $i=1,2,\ldots,m$, و g_j، $j=1,2,\ldots,p$ پیوسته هستند و معمولاً فرض میشود که دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته اند. برای تسهیل در نماد گذاری توابع بردار $h=(h_1,h_2,\ldots h_m)$ و $g=(g_1,g_2,\ldots,g_p)$ را معرفی می کنیم و (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ll} \min f(x) & \\ \text{s.t} & \\ h(x)=0 & \\ g(x)\le 0 & (۲) \\ x\in\Omega & \end{array}$$

قیدهای $h(x)=0$, $g(x)\le 0$ موسوم به قیدهای تابعی هستند، در حالی که قید $x\in\Omega$ یک قید مجموعه‌ای است. در اغلب موارد فرض می‌کنیم که یا Ω همه فضای E^nاست یا آنکه جواب مسئله (۲) در درون Ω واقع است. نقطه ای چون $x\in\Omega$ که در همه قیدهای تابعی صدق می کند ممکن (یا شدنی) نامیده شود.

مفهومی اساسی که از آن بینش زیادی به دست می‌آید و نیز شرح و بسط نظریه را آسان می سازد مفهوم قید موثر است. یک قید نامساوی به صورت $g_t(x) \le 0$ در یک نقطه ممکن x موثر نامیده می‌شود اگر $g_t(x)=0$ و در x ناموثر خوانده میشود اگر $g(x)_t<0$. طبق قرارداد در نقطه ممکن x هر قید تساوی به صورت $h_i(x)=0$ موثر نامیده می‌شود. قیدهای موثر در یک نقطه ممکن x موجب تحدید ناحیه ممکن در همسایگی‌های x می‌شوند در حالی که قیدهای ناموثر در همسایگی‌های x تاثیری ندارند بنابراین واضح است که در بررسی خواص یک نقطه مینیمم موضعی میتوان تنها به قیدهای موثر توجه شود.

۲،۱ صفحه مماس E^n

مجموعه ای از قیدهای تساوی به صورت:

$$\begin{aligned} h_1(x)&=0\\ h_2(x)&=0\\ &\vdots\\ h_m(x)&=0 \end{aligned} \tag{۳}$$

معرف زیر مجموعه‌ای از E^n است که آن را به بهترین وجه می‌توان یک ابر رویه انگاشت اگر قیدهای همه‌جا، به مفهومی که در زیر می‌آید متنظم باشند، این ابررویه داری بعد n-m است. اگر همان طور که در این بخش فرض می کنیم . توابع h_i ، $i=1,2,\cdots,m$ به C^1 تعلق داشته باشد رویه تعریف شده به وسیله آنها هموار نامیده می‌شود.

مفهومی مرتبط با هر نقطه واقع بر رویه ای هموار، صفحه مماس در آن نقطه است . این اصطلاح در فضای دو یا سه بعدی دارای معنای واضحی است. برای بیان دقیق این مفهوم در حالت کلی ، نخست منحنیهای واقع بر یک رویه را تعریف می کنیم . یک منحنی بر یک رویه S خانواده‌ای از نقاط $x(t) \in S$ است که به طور پیوسته به وسیله $a \le t \le b$,t پارامتری شده است. منحنی مشتق‌پذیر است. اگر $\dot{x} \equiv (d/dt)x(t)$ وجود داشته باشد. گفته می‌شود منحنی $x(t)$ از نقطه $x^*(t)$ می‌گذرد اگر $x^* = x(t^*)$ به ازای t^*ای، $a \le t^* \le b$. البته مشتق منحنی در x^* به صورت $\dot{x}(t^*)$ تعریف می‌شود، که خود برداری در E^n است.

حال همه منحنی‌های مشتق پذیر S را که از نقطه ای چون x^* می‌گذرد در نظر بگیرید. صفحه مماس در x^*به عنوان گردایه مشتقات همه این منحنیهای مشتق پذیر در x^*معرفی می‌شود. صفحه مماس، زیر فضای از E^n است.

برای رویه‌هایی که با مجموعه‌ای از روابط قیدی همچون (۳) تعریف می‌شوند، به دست آوردن نمایشی صریح از صفحه مماس مسئله‌ای اساسی است که اکنون بدان می‌پردازیم. ایده‌آل ما این است که این صفحه مماس را بر حسب مشتقات توابع h_i که معرف رویه‌اند، مشخص کنیم. زیر فضای

$$M = \{y : \nabla h(x^*)y = 0\}$$

را معرفی می‌کنیم و به بررسی شرایطی که M را معادل صفحه مماس در x^* می‌سازد می‌پردازیم. مفهوم اصلی در راه رسیدن به این مقصود همان نقطه منتظم است.

تعریف نقطه‌ای چون x^* که در قید $h(x^*)=0$ صدق می‌کند. یک نقطه منتظم برای قید نامیده می‌شود اگر بردارهای $\nabla h_1(x^*), \nabla h_2(x^*), \cdots \nabla h_m(x^*)$ مستقل خطی باشند.

در نقاط منتظم توصیف صفحه مماس بر حسب گرادیانهای توابع قیدی امکان پذیر است.

قضیه در یک منطقه منتظم x^* از رویه S که به وسیله $h(x)=0$ تعریف میشود . صفحه مماس عبارت از :

$$M=\{y:\nabla h(x^*)y=0\}$$

اثبات فرض کنید T صفحه مماس در x^* است. واضح است که $T \subseteq M$ خواه x^* منتظم باشد و خواه نباشد. زیرا هر منحنی $x(t)$ که از نقطه x^* در $t=t^*$ با مشتق $\dot{x}(t^*)$ با ضابطه $\nabla h(x^*)\dot{x}(t^*)\neq 0$، روی S قرار ندارد.

برای اثبات $M \subset T$ باید نشان دهیم که اگر $y \in M$ آنگاه یک منحنی بر S وجود دارد که از نقطه x^* با مشتق y می گذرد برای ساختن یک چنین منحنی، معادلات زیر را در نظر می‌گیریم.

$$h(x^*+ty+\nabla h(x^*)^t u(t))=0$$

که در آن برای t ی مشخص، $u(t)\in E^n$ را مجهول می‌گیریم. این یک دستگاه غیر خطی با m معادله و m مجهول است که به طور پیوسته توسط t پارامتری شده است. در $t=0$ یک جواب $u(0)=0$ موجود است ماتریس ژاکوبی دستگاه نسبت به u در $t=0$ ماتریس $m\times m$

$$\nabla h(x^*)\nabla h(x^*)^t$$

است که ناتکین است. زیرا اگر x^* یک نقطه متنظم باشد آنگاه $\nabla h(x^*)$ دارای رتبه کامل است. پس، بنابر قضیه تابع ضمنی یک جواب پیوسته مشتق‌پذیر $u(t)$ در ناحیه‌ای چون $-a \leq t \leq a$ وجود دارد.

پس منحنی $x(t) = x^* + ty + \nabla h(x^*)^t u(t)$، بنابر نحوه ساخت آن، یک منحنی بر S است. با مشتق‌گیری از دستگاه نسبت به t در t=0 داریم:

$$\circ = \frac{d}{dt} h(x(t))\Big]_{t=\circ} = \nabla h(x^*)y + \nabla h(x^*)\nabla h(x^*)^t \dot{u}(0)$$

از تعریف y داریم $\nabla h(x^*)y = 0$ و چون $\nabla h(x^*)\nabla h(x^*)^t$ ناتکین است، نتیجه می‌شود که $\dot{u}(0) = 0$ بنابراین:

$$\dot{x}(0) = y + \nabla h(x^*)^t \dot{u}(0) = y$$

و منحنی ساخته شده دارای مشتق Y در نقطه x^* است.

۳،۱ قیدهای نامساوی

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t} \\ &\quad h(x)=0 \\ &\quad g(x)\le 0 \end{aligned} \qquad (۴)$$

را در نظر می گیریم. h,f را همانند گذشته می گیریم و g را یک تابع برداری P بعدی فرض می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $f,h,g\in C^1$.

شرایط لازم مرتبه اول

اکنون شرایط لازم را همانند حالی که با قیدهای تساوی سر و کار داریم، تعمیم می‌دهیم.

تعریف فرض کنید x^* نقطه‌ای است که در قیدهای زیر صدق می‌کند.

$$h(x^*)=0 \quad , \qquad g(x^*)\le 0 \qquad (۵)$$

و J مجموعه اندیسهای j است به طوری که $g_j(x^*)=0$ در این صورت x^* را یک نقطه منتظم برای قیدهای (۵) می نامیم اگر بردارهای

$\nabla h_i(x^*)$، $1\le i\le m$ و $\nabla g_j(x^*)$، $j\in J$ مستقل خطی باشند.

توجه داریم که طبق تعریف قیدهای موثر در بخش ۲،۱ اگر گرادیانهای قیدهای موثر در نقطه x^* مستقل خطی باشند آنگاه x^* یک نقطه منتظم است. یا به بیان معادل x° برای قیدهای (۵) منتظم است اگر تعریف قبلی منتظم بودن برای قیدهای تساوی، برای قیدهای موثر در x^* صدق کند.

شرایط کروش کان تاکر فرض کنید x^* یک نقطه مینیمم نسبی برای

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t} \\ &\quad h(x)=0 \\ &\quad g(x)\le 0 \end{aligned} \tag{۶}$$

باشد، و فرض کنید x^* یک نقطه منتظم برای قیدها است. در این صورت برداری

چون $\lambda \in E^m$ و برداری مانند $\mu \in E^m$ با ضابطه $\mu \ge 0$ وجود دارند به طوریکه:

$$\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) + \mu^t \nabla g(x^*) = 0 \tag{۷}$$

$$\mu^t g(x^*) = 0 \tag{۸}$$

اثبات ابتدا توجه کنید که چون $g(x^*) \le 0, \mu \ge 0$. پس (۸) معادل است با این

عبارت که یک مولفه μ می تواند مخالف صفر باشد تنها اگر قید متناظر موثر باشد.

چون x^* یک نقطه مینیمم نسبی بر مجموعه قیدها است پس همچنین یک نقطه مینیمم نسبی بر زیر مجموعه ای از آن مجموعه است که با صفر قرار دادن قیدهای موثر تعریف میشود . بدین ترتیب برای مسئله ای با قیدهای تساوی که در یک همسایگی x^* تعریف شود. مضارب لاگرانژ موجودند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که (۷) با ضابطه $\mu_j = 0$ برقرار است اگر $g_j(x^*) \ne 0$ و در نتیجه (۸) نیز برقرار است.

مانده است که نشان دهیم $\mu \ge 0$. فرض کنید به ازای kای متعلق به J ، $\mu_k < 0$.

همچنین فرض کنید S و M به ترتیب رویه و صفحه مماس تعریف شده به وسیله سایر قیدهای موثر در نقطه x^* باشند. بنابر فرض منتظم بودن، y ای وجود دارد به طوری که $y \in M$ و

$\nabla g_k(x^*)y<0$. فرض کنید $x(t)$ یک منحنی بر S گذران از x^* در ($t=0$) با ضابطه $\dot{x}(0)=y$. دراین صورت به ازای $t \geq 0$. $x(t)$ ممکن است و با استفاده از (۷) داریم:

$$\frac{df}{dt}(x(t))\Big]_{t=0} = \nabla f(x^*)y < 0$$

که با مینیمم بودن x^* متناقض است.

شرایط مرتبه دوم

شرایط مرتبه دوم هم لازم و هم کافی برای مسائل با قیدهای نامساوی اساساً با در نظر گرفتن مسئله با قیدهای تساوی حاصل از قیدهای موثر به دست می‌آیند. صفحه مماس مناسب برای این گونه مسائل صفحه مماس بر قیدهای موثر است.

شرایط لازم مرتبه دوم فرض کنید توابع h و g و f متعلق به C^2 و x^* یک نقطه منتظم برای قیدهای (۵) است. اگر x^* یک نقطه مینیمم نسبی برای مسئله (۴) باشد. آنگاه $\lambda \in E^m$، $\mu \in E^p$، $\mu \geq 0$ وجود دارند به طوری که (۷) و(۸) را برقرار می‌سازند و

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*) + \mu^t G(x^*) \qquad (۹)$$

بر زیرفضای مماس برای قیدهای مؤثر در نقطه x^*، نیمه معین مثبت است.

شرایط کافی مرتبه دوم فرض کنید f و g و h متعلق به C^2 باشند. شرایط کافی برای اینکه یک نقطه x^* که در (۵) صدق می‌کند نقطه مینیمم نسبی اکیدی برای مسئله (۴) باشد آن است که $\lambda \in E^m$، $\mu \in E^p$ وجود داشته باشند به طوری که:

$$\mu \geq \circ \tag{۱۰}$$

$$\mu^t g(x^\circ) = 0 \tag{۱۱}$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla h(x^*) + \mu^t g(x^*) = 0 \tag{۱۲}$$

و ماتریس هستی

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T H(x^*) + \mu^t G(x^*) \tag{۱۳}$$

بر زیر فضای

$$M' = \{y : \nabla h(x^*) y = 0, \nabla g_j(x^*) y = 0 , j \in J\}$$

که در آن

$$J = \{j : g_j(x^*) = 0 \quad , \mu_j > 0\}$$

معین مثبت باشد.

۴.۱ روشهای مجموعهٔ موثر

ایده زیر بنایی در روشهای مجموعهٔ مؤثر ، افراز کردن قیدهای نامساوی به دو گروه است آنهایی که قرار است مؤثر در نظر گرفته شوند و آنهایی که قرار است نامؤثر به حساب آیند. از

قیدهای که نامؤثر تشخیص داده شوند اساساً صرف نظر می شود.

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t} \qquad\qquad (۱۴)$$
$$g(x) \leq 0$$

را در نظر بگیرید. در این مسئله برای سادگی بحث حاضر تنها قیدهای نامساوی منظور شده است. همان طور که روشن خواهد شد، گنجاندن قیدهای تساوی در این مسئله سر راست است.

شرایط لازم برای این مسئله عبارت‌اند از:

$$\nabla f(x) + \lambda^t \nabla g(x) = 0 \qquad (۱۵)$$

$$g(x) \leq 0$$
$$\lambda^t g(x) = 0$$
$$\lambda \geq 0$$

این شرایط را می‌توان به شکل نسبتاً ساده‌تری بر حسب مجموعه قیدهای مؤثر بیان کرد. مجموعهٔ اندیسهای قیدهای مؤثر را با A نشان می دهیم، یعنی A مجموعهٔ i هاست به طوری که $g_i(x^*) = 0$. در این صورت شرایط لازم (۱۵) چنین می‌شوند.

$$\nabla f(x) + \sum_{i \in A} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

$$g_i(x) = 0 , \ i \in A$$
$$g_i(x) < 0 , \ i \notin A \qquad (۱۶)$$
$$\lambda_i \geq 0 , \ i \in A$$
$$\lambda_i = 0 , \ i \notin A$$