دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار


پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش آمار - ریاضی

# بسط هایی از توزیع های احتمال لاگرانژی


استاد راهنما:

دکتر محمد حسین علامت ساز

پژوهشگر:

بهاره یاوری زاده



آبان ماه ۱۳۸۸

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

بهاره یاوری زاده

تحت عنوان

**بسط هایی از توزیع های احتمال لاگرانژی**

در تاریخ **۲۰ /۸۸/۸** توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **بسیار خوب** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد — امضاء

۲- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر نصرا... ایران پناه با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۳- استاد داورخارج از گروه دکتر علی دولتی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

امضای مدیر گروه

**سپاسگزاری**

سپاس خدای را مرا شوق دانستن و توان ادراک آموخت.

مراتب سپاس و تشکر خود را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز ابراز می دارم که در تمام مراحل تدوین این رساله با تلاش های بی وقفه و راهنمائی های ارزنده خود مرا یاری نمودند. همچنین از جناب آقای دکتر نصرا...ایران پناه و جناب آقای دکتر علی دولتی داوران این پایان نامه کمال تشکر را دارم.

## چکیده

بسط های لاگرانژی می توانند در فراهم کردن مدل های احتمال متعددی مفید واقع شوند. این مدل های احتمال در مسائل واقعی از جمله فرآیندهای شاخه ای، فرآیندهای صف بندی، سم شناسی زیست محیطی، انتشار اطلاعات، بوم شناسی، اعتصاب در کارخانجات، فروش محصولات جدید و تعداد محصولات برای سوددهی بهینه کاربرد دارند. توزیع های احتمال لاگرانژی رده وسیعی از توزیع های احتمال را تشکیل می دهند که خانواده های بسیار مهمی نظیر توزیع های پواسن تعمیم یافته، دوجمله ای منفی تعمیم یافته، سری لگاریتمی تعمیم یافته و سری توانی را در برمی گیرند.

در این پایان نامه پس از ارائه مقدمه و مفاهیم اولیه، توزیع های احتمال لاگرانژی، توزیع های لاگرانژی موزون و نیز توزیع های لاگرانژی تعمیم یافته را مورد مطالعه قرار داده و ارتباط آن ها را با توزیع های لاگرانژی بررسی خواهیم کرد. در ادامه چند توزیع آمیخته لاگرانژی تعمیم یافته را بررسی می کنیم. سپس به تشریح چند توزیع شبه احتمال که بر اساس بسط های لاگرانژی ایجاد می شوند می پردازیم. در نهایت حالت چند متغیره توزیع های لاگرانژی را مورد توجه قرار خواهیم داد.

**کلید واژه ها**: بسط های لاگرانژی، توزیع های لاگرانژی نوع اول و دوم، توزیع های موزون، توزیع های شبه احتمال و بسط های لاگرانژی چند متغیره.

## فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

**عنوان** **صفحه**

## فهرست جدول ها

**عنوان** **صفحه**

# فهرست علائم اختصاری

| | | |
|---|---|---|
| ASD | Abel Series Distributions. | توزیع های سری آبل |
| GPD | Generalized Poisson Distribution | توزیع پواسن تعمیم یافته |
| MPSD | Modified Power Series Distribution | توزیع سری توانی تعدیل یافته |
| QPD-I | Quasi Polya Distribution I | توزیع شبه پولیا نوع اول |
| QPD-II | Quasi Polya Distribution II | توزیع شبه پولیا نوع دوم |
| QPD-I | Quasi Binomial Distribution I | توزیع شبه دوجمله ای نوع اول |
| QPD-II | Quasi Binomial Distribution II | توزیع شبه دوجمله ای نوع دوم |
| QPD-I | Quasi Hypergeometric Distribution I | توزیع شبه فوق هندسی نوع اول |
| QPD-II | Quasi Hypergeometric Distribution II | توزیع شبه فوق هندسی نوع دوم |
| GSDs | Gould Series Distributions | توزیع های گولد سری |
| $BL_1D$ | Basic Lagrange Distribution of the first kind | توزیع لاگرانژ اصلی نوع اول |
| $BL_2D$ | Basic Lagrange Distribution of the second kind | توزیع لاگرانژ اصلی نوع دوم |
| $GL_1D$ | Generalized Lagrange Distribution of the first kind | توزیع لاگرانژ تعمیم یافته نوع اول |
| $GL_2D$ | Generalized Lagrange Distribution of the second kind | توزیع لاگرانژ تعمیم یافته نوع دوم |
| MLD | Multivariate Lagrange Distribution | توزیع لاگرانژ چند متغیره |

| | | |
|---|---|---|
| $dL_1D$ | delta Lagrange Distribution of the first kind | توزیع لاگرانژ دلتای نوع اول |
| $dL_2D$ | delta Lagrange Distribution of the second kind | توزیع لاگرانژ دلتای نوع دوم |
| $L_1D$ | Lagrange Distribution of the first kind | توزیع لاگرانژ نوع اول |
| $L_2D$ | Lagrange Distribution of the second kind | توزیع لاگرانژ نوع دوم |

# فصل اول

# تعاریف و مفاهیم پایه

## ۱-۱ مقدمه

توزیع های آماری از مهمترین ابزارهای اولیه ای هستند که در هر موضوع و مبحث آماری مطرح و مورد نیازند. با شناختن توزیع یک مجموعه داده، مطالعه و بررسی این داده ها بسیار راحت تر و منظم تر می گردد و سرعت رسیدن به اهداف مورد نیاز افزایش می یابد. در طی سه دهه گذشته کنسول[1] به همراه شاگرد و همکارقدیمی اش، فامویه[2] مطالعه بسیار زیادی را در زمینه توزیع های آماری به خصوص توزیع های گسسته انجام داد. او توزیع های احتمال لاگرانژی را تعریف کرد و با معرفی تعداد زیادی توزیع های مفید و توسعه برنامه های کامپیوتری مناسب و موثر مرز جدیدی را در زمینه توزیع های آماری و کاربردهای آنها باز کرد. کنسول و شنتون[3] در اوایل ۱۹۷۰ به قدرت بسط های لاگرانژی در به دست آوردن توزیع های احتمال گسسته پی بردند. توزیع های احتمال به دست آمده به توزیع های لاگرانژ نوع اول و نوع دوم تقسیم شدند. مهمترین عامل در کلاس توزیع های لاگرانژی، تبدیل لاگرانژ $z = ug(z)$ است که توسط لاگرانژ[4] (۱۸۱۳-۱۷۳۶) ارائه شد. (کنسول و شنتون،۱۹۷۲). او با استفاده از این تبدیل تابع $f(z)$ را به صورت یک سری توانی از $u$ بسط داد. اوتر[5] (۱۹۴۹) اولین محققی بود که

---

[1] Consul
[2] Famoye
[3] Consul and Shenton
[4] Lagrange
[5] Otter

تبدیل لاگرانژ $z = ug(z)$ را در مطالعه توزیع های احتمال به کار برد و اهمیت آن را برای توسعه فرآیندهای چند متغیره تشخیص داد. گود[1] (۱۹۶۵-۱۹۶۰) تعمیم چند متغیره بسط لاگرانژ را توسعه داد وآن را برای چند فرآیند تصادفی به کار برد. اما به علت پیچیدگی و ارائه مختصر مسائل، کار او در بین محققان جلب توجه زیادی نکرد. تا اینکه خاتری[2] (۱۹۸۲) تعاریفی از توزیع لاگرانژ چند متغیره را که توسط گود(۱۹۷۵) و کنسول و شنتون (۱۹۷۳b) مطالعه شده بود به اتمام رساند و چند نتیجه جدید را به دست آورد. جاناردان و رائو[3] (۱۹۸۳) کلاس جدیدی از توزیع های گسسته را تحت عنوان توزیع های لاگرانژی نوع دوم معرفی کردند. آنها نشان دادند که بعضی از توزیع های موزون متعلق به توزیع لاگرانژ نوع اول، عضوی از خانواده توزیع های لاگرانژ نوع دوم هستند. همچنین جاناردان[4] (۱۹۸۷) مشخصه سازی هایی را برای توزیع های لاگرانژ موزون به وسیله احتمال شرطی ارائه داد. جاناردان(۱۹۹۷) نشان داد که توزیع سری توانی تعدیل یافته زیر کلاسی از توزیع لاگرانژ نوع دوم است. کنسول و فامویه(۲۰۰۱) پیچش توزیع لاگرانژ نوع دوم را ثابت و گشتاورهای مرکزی آن را به دست آوردند همچنین توسط آنها (۲۰۰۵a) قضیه هم ارزی ثابت شد. سپس لی و همکاران[5] (۲۰۰۶) کار آنها را روی توزیع های تعمیم یافته لاگرانژی مورد مطالعه قرار دادند.

### ۱-۲ مفاهیم مفید

در این بخش برخی مفاهیم مفید به کار رفته در این رساله مانند تابع تحلیلی، تابع هولومورفیک، تابع مروموروفیک، بسط های لاگرانژی و توابع فوق هندسی را شرح می دهیم.

### ۱-۲-۱ تابع تحلیلی[6]

تابع مختلط $f(z)$ در نقطه $z_0$ تحلیلی است اگر مشتق آن نه تنها در $z_0$ بلکه در هر نقطه $z$ در یک همسایگی $z_0$ موجود باشد. تابع $f$ در ناحیه $R$ تحلیلی است اگر در هر نقطه $z$ تحلیلی باشد. اگر تابع $f$ در ناحیه $R$ تحلیلی باشد، آنگاه حول هر نقطه $z$ از $R$ باید یک همسایگی موجود باشد که $f$ بر آن تعریف شده باشد. بنابراین توابع

[1] Good
[2] Khatri
[3] Janardan and Rao
[4] Janardan
[5] Li .et al.
[6] Analiytic function

تحلیلی معمولاً بر حوزه ها تعریف می شوند. تابع تحلیلی $f$ در $-1 \leq z \leq 1$ یعنی $f$ در سراسر حوزه $-1 \leq z \leq 1$ تحلیلی است.

### ۱-۲-۲ تابع هولومورفیک[1]

تابعی است که بر روی زیر مجموعه ای باز از صفحه مختلط $C$، با مقادیری در $C$ که در هر نقطه مشتق مختلط دارد، تعریف شده است. هولومورفیک بودن یک شرط قوی تر از مشتق پذیری مختلط است و دلالت بر این دارد که تابع بینهایت بار مشتق پذیر است و می تواند با سری تیلورش نشان داده شود. هولومورفیک بودن در نقطه $a$، به معنی نه تنها مشتق پذیری در $a$ ، بلکه مشتق پذیری در هر جا درون یک دیسک باز به مرکز $a$ در صفحه مختلط است.

### ۱-۲-۳ تابع مرومورفیک[2]

تابع مرومورفیک روی یک زیر مجموعه باز $D$ از صفحه مختلط، تابعی است که روی تمام $D$ به جز نقاط تکین خود هولومورفیک است. که این نقاط قطب های توابع هستند. هر تابع مرومورفیک روی $D$ می تواند به صورت نسبت دو تابع هولومورفیک تعریف شده روی $D$ (با مخرجی که ثابت صفر نباشد) بیان شود.

### ۱-۲-۴ بسط های لاگرانژی

فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع تحلیلی اند که در $[-1و1]$ به طور متوالی مشتق پذیرند و $g(0) \neq 0$. لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶) معکوس تبدیل لاگرانژ $u = z/g(z)$ را در نظر گرفت و دو بسط سری توانی زیر را به دست آورد. این دو بسط توسط جنسن[3] (۱۹۰۲) و ریوردان[4] (۱۹۶۸) نیز ارائه شده اند:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k \qquad (۱-۱)$$

$$a_k = \frac{1}{k!} D^{k-1}[g^k(z) D f(z)]_{z=0} \qquad a_0 = \mathrm{f}(0)$$

---
[1] Holomorphic
[2] Meromorphic
[3] Jensen
[4] Riordan

$$\frac{f(z)}{1-zg'(z)/g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k \qquad (۲-۱)$$

$$b_k = \frac{1}{k!} D^k [g^k(z) f(z)]_{z=0} \qquad b_0 = f(0)$$

که در آنها $D = \partial/\partial z$ . رابطه (۱-۱) بسط لاگرانژ اول و رابطه (۲-۱) بسط لاگرانژ دوم نامیده می شوند. با جایگذاری

$$f_1(z) = (1 - zg'(z)/g(z)) f(z)$$

به جای تابع $f(z)$ در رابطه (۱-۱)، بسط (۲-۱) به بسط (۱-۱) تبدیل می شود. همچنین با جایگذاری تابع

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{1-zg'(z)/g(z)}$$

به جای تابع $f(z)$ در رابطه (۲-۱)، بسط (۱-۱) به بسط (۲-۱) تبدیل می شود. بنابراین بسط لاگرانژ (۱-۱) و (۲-۱) مستقل از هم نیستند. دو بسط بالا نقش مهمی را در نظریه توزیع های احتمال لاگرانژی بازی می کنند. به علاوه این دو بسط تعدادی عبارات جبری مفید را فراهم می کنند که توسط ریوردان (۱۹۶۸) و گولد[1] (۱۹۷۲) ارائه شده اند. برای مثال یکی از این عبارات مفید به صورت

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+k\theta)^{k-1}}{n!} \frac{(b+(n-k)\theta)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(a+b+n\theta)^n}{n!}$$

است. عبارت فوق در فصل چهارم اثبات شده است.

حال فرض کنید $f(z_1,z_2)$، $g_1(z_1,z_2)$ و $g_2(z_1,z_2)$ سه تابع دو متغیره باشند. به طوریکه $g_1(0,0) \neq 0$، $g_2(0,0) \neq 0$ و هر سه تابع نسبت به $z_1$ و $z_2$ به طور متوالی مشتق پذیر باشند. پوانکاره[2](۱۸۸۶) تحت تبدیل های $u = z_1/g_1(z_1,z_2)$ و $\upsilon = z_2/g_2(z_1,z_2)$ بسط دو متغیره $f(z_1,z_2)$ را برحسب سری توانی از $u$ و $\upsilon$ در نظر گرفت و بسط دو متغیره لاگرانژی زیر را به دست آورد.

$$f(z_1,z_2) = f(0,0) + \sum_{x_1}^{\infty}\sum_{x_2}^{\infty} \frac{u^{x_1}\upsilon^{x_2}}{x_1!\,x_2!} D_1^{x_1-1}\{D_2^{x_2-1}[g_1^{x_1} g_2^{x_2} D_1 D_2 f$$

---

[1] Gould
[2] Poincare

$$+g_1^{x_1}\left(D_1 g_2^{x_2}(D_2 f)\right) + g_2^{x_2}\left(D_2 g_1^{x_1}(D_1 f)\right)\Big\}_{z_1=z_2=0} \qquad (۳-۱)$$

که در آن $D_{\mathrm{i}} = \partial/\partial \mathrm{z_i}$، $f(z_1,z_2) = f$ و $g_{\mathrm{i}}(z_1,z_2) = g_i$ با $i = 1,2$.

حال با انتخاب $f(z_1,z_2) = [\phi(z_1,z_2)]^{\mathrm{c}}$ و $g_{\mathrm{i}}(z_1,z_2) = [\phi(z_1,z_2)]^{\mathrm{c_i}}; \mathrm{i} = 1,2$، که در آن $c$، $c_1$ و $c_2$ ثابت هایی حقیقی اند و $\phi(z_1,z_2)$ روی $-1 \le z_i \le 1; i = 1,2$ یک تابع تحلیلی است. بسط (۱-۳) می تواند به صورت

$$f(z_1,z_2) = f(0,0) + \sum_{x_1}^{\infty}\sum_{x_2}^{\infty}\frac{u^{x_1}v^{x_2}}{x_1!\,x_2!}D_1^{x_1-1}\left\{D_2^{x_2}\left[g_1^{x_1}g_2^{x_2}D_1 f\right]\right\}_{z_1=z_2=0} \qquad (۴-۱)$$

نوشته شود. صورت معادل بسط (۱-۴) به صورت

$$f(z_1,z_2) = f(0,0) + \sum_{x_1}^{\infty}\sum_{x_2}^{\infty}\frac{u^{x_1}v^{x_2}}{x_1!\,x_2!}D_2^{x_2-1}\left\{D_1^{x_1}\left[g_1^{x_1}g_2^{x_2}D_2 f\right]\right\}_{z_1=z_2=0}$$

است.

## ۱-۲-۵ توابع فوق هندسی

تابع فوق هندسی گاوس[1] به صورت:

$$ {}_2F_1[a,b;c;x] = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{[k]}b^{[k]}}{c^{[k]}}\frac{x^k}{k!} \qquad c \neq 0,-1,\ldots$$

تعریف می شود، که در آن $a^{[k]} = a(a+1)\ldots(a+k-1) = \frac{a+k-1}{(a-1)!}$.

اندیس ۲و۱ در هر دو طرف $F$ به ترتیب مربوط به ۲ پارامتر $a$ و $b$ در صورت و یک پارامتر $c$ در مخرج است.

[1] Gauss

سری فوق همگرای مطلق است اگر $|x| < 1$ و واگراست اگر $|x| > 1$. هنگامی که $|x| = 1$ دو حالت رخ می دهد: ۱- اگر $c - a - b > 0$ سری همگرای مطلق است. ۲- اگر $c - a - b < -1$ سری واگراست. هنگامی که $x = 1$ تابع فوق هندسی گاوس به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_1[a, b; c; x] = \frac{c(c - a - b)}{(c - a)(c - b)}$$

## ۱-۳ روند کار

این پایان نامه در ۵ فصل تدوین شده است. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه است. در فصل دوم به بررسی خانواده توزیع های لاگرانژی و خصوصیات آنها می پردازیم. در فصل سوم به مطالعه توزیع های لاگرانژی تعمیم یافته و خصوصیات آنها پرداخته و ارتباط آنها را با توزیع های لاگرانژی مورد بررسی قرار می دهیم. فصل چهارم مربوط به توزیع های شبه احتمال است که بر اساس چند عبارت جبری وابسته به بسط های لاگرانژی ایجاد می شوند. در نهایت در فصل پنجم حالت چند متغیره توزیع های لاگرانژی و برخی از خصوصیات مهم آن ها را بررسی خواهیم کرد.

# فصل دوم

# توزیع های لاگرانژی و خصوصیات آنها

## ۲-۱ مقدمه

جهت یافتن یک الگوی مناسب برای تحلیل مشاهدات شمارشی، محققان از بین چند توزیع احتمال گسسته به انتخاب بهترین مدل می پردازند. اما به دلیل اینکه اکثر پدیده های طبیعی و تحقیقات کاربردی به ویژه در زمینه های زیست شناسی، روان شناسی، اجتماعی وکشاورزی ساختاری چند متغیره دارند، انتخاب مدل مناسب مشکل است. از آنجائی که اکثر الگوهایی که مشاهدات از آنها پیروی می کنند را می توان به صورت ترکیبی از فرآیندهای تصادفی نوشت محققان برای انتخاب مدل مناسب به دنبال ساده سازی ساختار مشاهدات و الگوهای برازش داده شده به آنها هستند. تلاش این محققان آنها را به کشف توزیع های احتمال پیچیده تر و جدیدتری راهنمائی می کند. توزیع های احتمال لاگرانژی رده وسیعی از توزیع های احتمال است که کنسول و شنتون از سال۱۹۷۱ به بعد معرفی کردند. خانواده توزیع های لاگرانژ نوع اول با استفاده از بسط لاگرانژ اول به دست می

آید. بسط لاگرانژ دوم نیز برای معرفی خانواده توزیع های لاگرانژ نوع دوم استفاده می شود. جاناردان و رائو (۱۹۸۳) و جاناردان (۱۹۹۷) اشتباهاً فرض کرده بودند که بسط های لاگرانژ تحت تبدیل $z = ug(z)$ از یکدیگر متمایز هستند تا اینکه کنسول و فامویه (۲۰۰۵a) قضیه هم ارزی را ثابت کردند.

در این فصل این توزیع ها را مورد توجه قرار خواهیم داد. در بخش بعدی به تعاریف آن ها پرداخته و در بخش ۲-۳ به مطالعه میانگین و واریانس توزیع های احتمال لاگرانژی نوع اول می پردازیم. در بخش ۲-۴ میانگین و واریانس توزیع های احتمال لاگرانژی نوع دوم را بررسی خواهیم کرد. در بخش ۲-۵ خاصیت پیچش توزیع های لاگرانژ نوع اول و دوم را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در بخش ۲-۶ به مطالعه هم ارزی دو کلاس توزیع های لاگرانژ نوع اول و دوم  پرداخته و در بخش ۲-۷ توزیع های لاگرانژی موزون را شرح خواهیم داد و در نهایت در بخش ۲-۸ توزیع های سری توانی تعدیل یافته را به عنوان زیر خانواده ای از توزیع لاگرانژی نوع اول شرح خواهیم داد.

## ۲-۲ تعاریف و نمادها

تعاریف و مثال های این بخش توسط کنسول و فامویه(۲۰۰۵b) ارائه شده اندکه درآنها $D = \partial/\partial z$ و $N$ معرف مجموعه اعداد طبیعی است.

**تعریف ۲-۱** فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع تحلیلی اندکه در $[-1و1]$ به طور متوالی مشتق پذیرند و

$f(0) \geq 0$ و $g(0) \neq 0$ ، $f(1) = g(1) = 1$ ، $D^{x-1}[g^x(z)f'(z)]_{z=0} \geq 0; x\epsilon N$

آنگاه بسط لاگرانژ (۱-۱) نمایانگر تابع مولد احتمال توزیع لاگرانژ نوع اول است:

$$f(z) = f(0) + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{u^x}{x!} D^{x-1}\left[g^x(z)f'(z)\right]_{z=0}$$

بنابراین تابع چگالی توزیع لاگرانژ نوع اول به صورت زیر است:

$$P(X = x) = \begin{cases} f(0) & x = 0 \\ \frac{1}{x!} D^{x-1}[g^{x-1}(z) f'(z)]_{z=0} & x = 1,2,3, \dots \end{cases} \qquad (۱ - ۲)$$

توابع $f(z)$ و $g(z)$ به ترتیب تابع تبدیل کننده و تابع تبدیل شده نامیده می شوند. به طور کلی هر مجموعه از مقادیر $f(z)$ و $g(z)$ که شرایط مفروض را دارا باشند عضوی از خانواده توزیع های لاگرانژ نوع اول را ایجاد می کنند. کلاس توزیع های لاگرانژ نوع اول را به اختصار با $L_1(f, g; x)$ یا $L_1D$ [۱] نشان می دهیم.

**مثال ۲-۱** با انتخاب $f(z) = e^{\theta(z-1)};\ \theta > 0$ و $g(z) = e^{\lambda(z-1)};\ 0 < \lambda < 1$ توزیع پوآسن تعمیم یافته $(GPD)$ [۲] عضو خانواده $L_1D$ به صورت زیر می شود:

با توجه به این که

$f(1) = g(1) = e^0 = 1$ ،$g(0) = e^{-\lambda} \neq 0$ و $f(0) = e^{-\theta} > 0$

$$D^{x-1}[g^x(z) f'(z)]_{z=0} = D^{x-1}\left[e^{\lambda(z-1)x} \theta e^{\theta(z-1)}\right]_{z=0} \geq 0$$

با استفاده از رابطه ۲-۱ داریم:

$$P(X = 1) = \frac{1}{1!} D^{1-1}\left[e^{\lambda(z-1)} \theta e^{\theta(z-1)}\right]_{z=0} = \theta e^{-\theta-\lambda}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{2!} D^{2-1}\left[e^{2\lambda(z-1)} \theta e^{\theta(z-1)}\right]_{z=0} = \frac{1}{2!} \theta(\theta + 2\lambda) e^{-\theta-2\lambda}$$

.

.

.

$$P(X = x) = \frac{1}{x!} \theta(\theta + \lambda x)^{x-1} e^{-\theta-\lambda x} \qquad x = 0,1,2, \dots$$

جدول (۲-۱) در صفحه بعد چند توزیع مهم لاگرانژ نوع اول را ارائه می دهد.

---

[1] Lagrange distribution of the first kind
[2] Generalize Poisson distribution

**جدول (۲-۱) چند توزیع مهم لاگرانژ نوع اول**

| $L_1(f,g;x)$ | $f(z)$ | $g(z)$ | نام توزیع |
|---|---|---|---|
| $\frac{n}{n+mx}\binom{n+mx}{x}p^x q^{n+mx-x}$<br>$x=0,1,2,\ldots$ | $(q+pz)^n$ | $(q+pz)^m$ | دوجمله ای منفی تعمیم یافته |
| $\theta(\theta+\lambda x)^{x-1}e^{-\theta-\lambda x}/x!$<br>$x=0,1,2,\ldots$ | $e^{\theta(z-1)}$<br>$\theta>0$ | $e^{\lambda(z-1)}$<br>$0<\lambda<1$ | پوآسن تعمیم یافته |
| $\frac{1}{mx}\binom{mx}{x}\frac{(pq^{m-1})^x}{(-Lnq)}$<br>$x=0,1,2,\ldots$ | $\frac{Ln\left(1+{pz}/{q}\right)}{(-Lnq)}$ | $(q+pz)^m$<br>$1<m<p^{-1}$ | سری لگاریتمی تعمیم یافته |
| $q^n \quad x=0$<br>$\frac{(\lambda x)^{x-1}}{x!\,e^{\lambda x}}(npq^{n-1})\times$<br>$\left[{}_2F_0\left(1-n;1-x;;\frac{p}{\lambda xq}\right)\right]$<br>$x=1,2,\ldots$ | $(q+pz)^n$<br>$0<p<1$ | $e^{\lambda(z-1)}$<br>$0<\lambda<1$ | دوجمله ای- پوآسن |
| $e^{-\theta} \quad x=0$<br>$\frac{(\theta q^m)^x}{e^{\theta}x!}\left[{}_2F_0\left(1-x,-mx;;\frac{-p}{q^{\theta}}\right)\right]$<br>$x=1,2,\ldots$ | $e^{\theta(z-1)}$<br>$\theta>0$ | $(q+pz)^m$<br>$mp<1$ | پوآسن- دوجمله ای |
| $e^{-\theta} \quad x=0$<br>$e^{-\theta}\left[\frac{\theta^x q^{kx}}{x!}\right]\left[{}_2F_0\left(1-x,kx;;\frac{-p}{\theta}\right)\right]$<br>$x=1,2,\ldots$ | $e^{\theta(z-1)}$<br>$\theta>0$ | $\frac{q^k}{(1-pz)^k}$<br>$kp<1$ | پوآسن- دوجمله ای منفی |