بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

گراف مقسوم علیه های صفر در حلقه های جابجایی

از :

سمیرا عالی کپورچال

استاد راهنما :

دکتر فرهاد درستکار

استاد مشاور :

دکتر احمد عباسی

شهریور ۱۳۸۸

تقدیر و تشکر

ای خداوند بزرگ و مهربان همیشه تو را شاکرم به خاطر تمام نعمت هایی که بر من روا داشتی و داری .

از پدر و مادر عزیزم به خاطر تمام زحمت هایی که برای من کشیده اند قدر دانی می کنم که هر آنچه دارم از وجود با سعادت آنها می باشد.

همچنین از استاد گرامی ، جناب آقای دکتر فرهاد درستکار ، که زحمت زیادی برای پایان نامه من انجام دادند و با صبر و حوصله فراوان ، راهنمایی های فراوانی به اینجانب ارائه نمودند ، کمال تشکر را دارم. همچنین از استاد مشاور محترم ، جناب آقای دکتر احمد عباسی و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر اسماعیل عزیزپور کمال سپاسگزاری را دارم.

از داوران گرامی ، جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری طرقی و جناب آقای دکتر منصور هاشمی و اساتید محترم گروه ریاضی دانشکده علوم پایه کمال قدر دانی را دارم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده

گراف مقسوم علیه های صفر در حلقه های جابجایی

سمیرا عالی کپورچال

به یک حلقه جابجایی R ، گراف مقسوم علیه صفر آن ، $\Gamma(R)$ وابسته می شود. در این پایان نامه ما گراف مقسموم علیه صفر $\Gamma(R)$ را مطالعه می نماییم و رابطه بین برخی خواص حلقه R و گراف $\Gamma(R)$ را بررسی می کنیم.

واژه های کلیدی : ایده آل های اول وابسته ، حلقه جابجایی ، قطر ، کمر ،گراف ، گراف مسطح ، گراف مقسوم علیه صفر.

Abstract

The Zero – Divisors Graph at Commutative Rings

Samira Alee Kapurchal

For each commutative ring R, let Γ(R) be the zero – divisor graph graph of R . In this thesis we Study the zero – divisor graph Γ(R) . we investigate the interplay between the ring theoretic Properties of R and the graph theoretic properties of Γ(R) .

Key words : Associated prime ideal , Commutative rings , Diameter , Girth , Graph , Planar graph , Zero – Divisor graph.

پیشگفتار :

نظریه گراف شاخه ای از ریاضیات است که در قرن هجدهم توسط اویلر ریاضیدان بزرگ ابداع گردیده است. مهم ترین کاربرد نظریه گراف مدل سازی پدیده های گوناگون و بررسی بر روی آنها می باشد. از این رو امروزه نظریه گراف در کلیه شاخه های مختلف علوم کاربرد های فراوان دارد. در این پایان نامه سعی شده است که به بررسی بعضی از قضایای نظریه حلقه ها با استفاده از نظریه گراف بپردازیم. رئوس مطالبی که در این پایان نامه بررسی گردیده به شرح زیر می باشد :

در فصل اول این پایان نامه برای حلقه R ، گراف مقسوم علیه صفر آن یعنی $\Gamma(R)$ را بررسی می نماییم و به ذکر بعضی خواص گراف $\Gamma(R)$ که قبلا اثبات شده است می پردازیم. در انتهای فصل اول نیز به بررسی خود ریختی گراف مقسوم علیه صفر می پردازیم. (ر.ک. [3])

در فصل دوم به بررسی این مطلب که برای کدام حلقه متناهی R ، گراف $\Gamma(R)$ مسطح است می پردازیم. در ادامه فصل دوم ارتباط کمر گراف مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$ و ایده آل های اول وابسته حلقه R را بررسی می کنیم. (ر.ک. [1])

در فصل سوم نیز قطر و کمر گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه حاصلضرب مستقیم خارجی را بررسی می کنیم. (ر.ک. [4])

فصل صفر

تعاریف و مفاهیم اولیه

فرض کنیم G یک گراف با مجموعه راس های $V(G)$ و مجموعه یال های $E(G)$ باشد و R یک حلقه جابجایی یکدار باشد.

تعریف (۰-۱): گراف ساده گرافی ا ست که بین هر دو راس آن فقط یک یال ا ست .

تعریف (۰-۲): یک گراف که بین هر دو راس آن مسیری وجود داشته باشد را یک گراف همبند گوییم .

تعریف (۰-۳): دو راس v و w از گراف G را مجاور گویند ، هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد(یعنی ، یک یال بصورت $v - w$ وجود داشته باشد) . در این صورت می گویند که رئوس v و w بر آن یال واقع هستند. به همین ترتیب دو یال متمایز از G را مجاور گویند ، هرگاه حدا قل یک راس مشترک داشته باشند .

تعریف (۰-۴): یک گراف ساده را که هر دو راس متمایز آن مجاور باشند ، یک گراف کامل گویند . یک گراف کامل با n راس را بصورت K_n نمایش می دهند .

تعریف (۰-۵): فرض کنیم v یک راس از گراف G باشد. در این صورت درجه v را با $d(v)$ نشان می دهند و آن را تعداد یال هایی که راس v بر آنها قرار دارد تعریف می کنند. همچنین $Min\{d(v) : v \in V\}$ را با $\delta(G)$ و $Max\{d(v) : v \in V\}$ را با $\Delta(G)$ نمایش می دهند.

تعریف (۰-۶): فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای V_1 و V_2 افراز کرد بطوریکه هر یال G یک راس از V_1 را به یک راس از V_2 وصل کند . در این صورت G را یک گراف دو بخشی گویند و بصورت $G(V_1, V_2)$ نمایش می دهند . در یک گراف دو بخشی لزوما هر راس از V_1 به هر راس از V_2 وصل نیست . ا ما اگر چنین با شد و اگر G ساده باشد ، آنگاه G را یک گراف دو بخشی کامل گویند ، هنگامی که G دو بخشی متناهی باشد آن را با $K_{r,s}$ نشان می دهند که در آن r و s به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 هستند . توجه کنید که $K_{r,s}$ ، تعداد $r+s$ راس و rs یال دارد .

تعریف (۰-۷): یک گراف r- بخشی گرافی است که مجموعه راسهای آن را می توان به r زیرمجموعه افراز کرد بطوریکه یالی که دو عضو یکی از آن مجموعه ها را به هم وصل می نماید موجود نباشد. یک گراف r- بخشی را که هر راس آن با هر راس دیگر که در زیرمجموعه یکسانی قرار ندارد ، متصل شده باشد را یک گراف کامل گویند.

تعریف (۰-۸): یک گراف دو بخشی کامل بصورت $K_{1,s}$ ، یک گراف ستاره ای نامیده می شود .

تعریف (۰-۹): یک زیر گراف از گراف G ، خود یک گراف ا ست ، که هر راس آن به $V(G)$ تعلق دارد و هر یال آن عضو $E(G)$ است.

تعریف (۰-۱۰): اگر $x_0, \dots, x_{k-1}, y$ راس هایی متمایز از گراف G باشند آنگاه

$$x_0 - x_1 - \cdots - x_{k-1} - y$$

یک راه به طول k است. طول کوتاهترین راه از x به y را با $d(x,y)$ نمایش می دهند و در صورتی که چنین راهی از x به y موجود نباشد $d(x,y)$ را برابر با ∞ تعریف می کنند.

تعریف (۰-۱۱): فرض کنید $x_0, \dots, x_{k-1}$ که $k \geq 3$ راس هایی متمایز از گراف G باشند که به ازای هر $0 \leq i \leq k-1$ ، راس های x_i و x_{i+1} مجاور می باشند. چنانچه راس های x_0 و x_{K-1} نیز مجاور باشند در این صورت مسیر $x_0 - x_1 - \cdots - x_{K-1} - x_0$ را یک دور به طول k گوییم.

قضیه (۰-۱۲): (ر. ک . [6, 1.3.1])

هر گراف G شامل یک مسیر به طول $\delta(G)$ و یک دور به طول حداقل $\delta(G) + 1$ است (به شرط آنکه $\delta(G) \geq 2$) .

تعریف (۰- ۱۳): طول کوتا هترین دور در گراف G را با $girth(G)$ نمایش می دهند و آن را کمر گراف G گویند. اگر G شامل هیچ دوری نباشد ، کمر گراف G را برابر بی نهایت تعریف می کنند .

تعریف (۰-۱۴): سوپریمم فاصله بین رئوس متمایز گراف G را قطر گراف G گویند و آن را با $diam(G)$ نشان می دهند.

قضیه (۰-۱۵): (ر. ک . [6, 1.3.2])

اگر گراف G شامل یک دور باشد ، آنگاه $gr\ (G) \leq 2diam(G) + 1$.

قضیه (۰-۱۶): (ر. ک . [8])

یک حلقه آرتینی (با ا حتساب یکریختی) منحصرا حاصلضرب تعداد متناهی از حلقه های موضعی آرتینی می با شد .

قضیه (۰-۱۷): (ر. ک . [8 , Theorem 82])

فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری با شد و A یک R- مدول غیر صفر با تولید متناهی باشد . فرض کنید S یک زیر حلقه از R باشد که مشمول در $Z(A)$ (مرکز A) می باشد. در این صورت یک عضو غیر صفر منحصر بفرد مانند a از A چنان موجود ا ست که $Sa = 0$.

قضیه (۰-۱۸): (ر. ک . [8, Theorem 6])

فرض کنیم R یک حلقه و A یک R - مدول باشد و Z یک ایده آل غیر صفر در R باشد که در بین مجموعه تمام ایده آل های پوچساز از اعضای غیر صفر A بیشین است. در این صورت Z یک ایده آل اول است.

تعریف (۰-۱۹): رشته اکیدا صعودی و متناهی از ایده آلهای اول مانند $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ را یک رشته از طول n می گویند. فرض کنید $P \in spec(R)$ ، بنا به تعریف ، سوپریموم تمام $n \in N \cup \{0\}$ که به ازای آنها زنجیری از ایده آل های اول R با طول n مانند $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$ موجود می باشد را بلندی P گویند و آن را با $ht(P)$ نشان می دهند . در صورتی که سوپریموم موجود نباشد $ht(P) = \infty$ تعریف می شود .

تعریف (۰-۲۰): بعد حلقه R را با $dim(R)$ نشان می دهند و آن را به صورت

$$dim(R) = sup\,\{ht(P): P \in spec(R)\}$$

تعریف می کنند. در صورتی که سوپریموم موجود نباشد ، $dim(R)$ را ∞ تعریف می کنند.

لم (۰-۲۱): فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرار اند

۱) $Z(R)$ یک ایده آل اول است اگر وتنها اگر $Z(R)$ یک ایده آل باشد.

۲) اگر R یک حلقه نوتری با شد ، آنگاه $Z(R)$ یک ایده آل پوچساز است اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده آل (اول) باشد .

۳) $\{0\}$ یک ایده آل اولیه از R است اگر و تنها اگر $Z(R) = nil(R)$.

۴) اگر $dim(R) = 0$ ، آنگاه $Z(R) = nil(R)$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده آل و در نتیجه ایده آل اول از R باشد.

برهان(۱) ($\Leftarrow$) بدیهی است .

($\Rightarrow$) فرض کنید $Z(R)$ یک ایده آل باشد . نشان می دهیم $Z(R)$ یک ایده آل اول است . فرض کنید $xy \in Z(R)$. پس وجود دارد $0 \neq a \in R$ بطوریکه $xya = 0$. اگر $ya = 0$ در این صورت $y \in Z(R)$. اگر $ya \neq 0$ ، آنگاه از $x(ya) = 0$ نتیجه می گیریم که $x \in Z(R)$. پس از $xy \in Z(R)$ داریم $x \in Z(R)$ یا $y \in Z(R)$. لذا $Z(R)$ یک ایده آل اول است .

برای اثبات (۲) ($\Leftarrow$) فرض کنید $Z(R)$ یک ایده آل پوچساز باشد. بدیهی است که $Z(R)$ یک ایده آل و در نتیجه یک ایده آل اول است.

($\Rightarrow$) فرض کنید $Z(R)$ یک ایده آل باشد. ثابت می کنیم $Z(R)$ یک ایده آل پوچساز است. مطابق قضیه (۰- ۱۷) ، اگر $A = R$ و $S = Z(R)$ انتخاب شوند آنگاه یک عضو منحصر بفرد $0 \neq a \in R$ چنان موجود است که $Z(R)a = 0$ لذا $Z(R) \subseteq Ann(a) \subseteq Z(R)$. پس $Z(R) = Ann(a)$.

برای اثبات (۳) ($\Leftarrow$) فرض کنید $\{0\}$ یک ایده آل اولیه از از حلقه R و $t \in nil(R)$ دلخواه باشد. بنابراین توان مثبتی از t برابر صفر خواهد شد. فرض کنید عدد طبیعی k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $t^k = 0$. با توجه به انتخاب k داریم $t^{k-1} \neq 0$. از اینکه $0 = t^k = tt^{k-1}$ و $t^{k-1} \neq 0$ نتیجه می شود که $t \in Z(R)$ و لذا $nil(R) \subseteq Z(R)$ اکنون فرض می کنیم که $a \in Z(R)$. از این رو عضو مخالف صفری در R مانند b چنان موجود است که $ba = 0$. از اینکه $\{0\}$ یک ایده آل اولیه است و $b \neq 0$ نتیجه می شود که $a \in nil(R)$ و در نتیجه $Z(R) \subseteq nil(R)$ می باشد. لذا

$$Z(R) = nil(R).$$

($\Rightarrow$) فرض کنید $ab = 0$ و $a \neq 0$. چون $a \neq 0$ است پس $b \in Z(R)$ از طرفی بنا بر فرض $Z(R) = nil(R)$. از این رو عدد طبیعی مانند k چنان موجود است که $b^k = 0$. لذا $\{0\}$ یک ایده آل اولیه است.

برا اثبات (۴) ($\Leftarrow$) بدیهی است اگر $Z(R) = nil(R)$ آنگاه $Z(R)$ یک ایده آل از R است.

($\Rightarrow$) بدیهی است $nil(R) \subseteq Z(R)$. برای اثبات عکس این شمول فرض کنید $x^k \neq 0$ به ازای هر $k \in \mathbb{N}$. اگر $S = \{x^k: k \in \mathbb{N}\}$ در این صورت $(0:x) \cap S = \emptyset$. لذا بنابر قضیه ای ، یک ایده آل اول P از R چنان موجود است که $P \cap S = \emptyset$, $(0:x) \subseteq P$. بنا بر قضیه ای در جبر پیشرفته یک ایده آل اول مینیمال ما نند P' موجود است که

$$(0:x) \subseteq P' \subseteq P$$

و در این صورت $P' \cap S = \emptyset$. از طرفی $P' \in W.Ass(R)$ و در نتیجه

$$P' \subseteq Z(R) = \bigcup_{P \in W.Ass(R)} P$$

از اینکه $Z(R)$ یک ایده آل است نتیجه می گیریم که $Z(R)$ یک ایده آل اول است. چون $dim(R) = 0$ ، هر ایده آل اول R یک ایده آل بیشین است. لذا $P' = Z(R)$. چون $P' \cap S = \emptyset$ پس $x \notin Z(R)$. بنابراین اگر $x \in Z(R)$ ، آنگاه وجود دارد $k \in \mathbb{N}$ بطوریکه $x^k = 0$. بنا براین $nil(R) \supseteq Z(R)$ و لذا $Z(R) = nil(R)$.

لم (۰-۲۲): فرض کنید R شبه موضعی با ایده آل بیشین غیر صفر M با شد ، اگر عدد طبیعی ما نند k چنان موجود باشد که $M^k = 0$ و $M^{k-1} \neq 0$ ، آنگاه به ازای هر عضو ناصفر $x \in M^{k-1}$ ،

$$Z(R) = M = Ann(x)$$

برهان: چون R شبه موضعی است پس تنها دارای یک ایده آل بیشین مانند M است. با توجه به انتخاب k داریم $M^{k-1} \neq 0$. از $M^{k-1} M = 0$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x \in M^{k-1}$ ، $M \subseteq Ann(x)$. از طرفی به ازای هر $0 \neq x \in M^{k-1}$ ، $Ann(x)$ یک ایده آل سره از R است پس $Ann(x) \subseteq M$ است. در نتیجه به ازای هر $x \in M^{k-1}$ ، $M = Ann(x)$. همچنین از اینکه $M^{k-1} \neq 0$ و $M^{k-1} M = 0$ نتیجه می گیریم که $M \subseteq Z(R)$. چون R موضعی است ، اگر $t \in R - M$ آنگاه t یک عضو یکه از R است و در نتیجه $t \notin Z(R)$. پس $Z(R) \subseteq M$ و لذا $Z(R) = M$.

تبصره (۰-۲۳): فرض کنید (R, M) یک حلقه موضعی متناهی باشد ، در این صورت یک عدد اول p و عدد صحیح مثبت n چنان موجودند که $Char(R) = P^n$ و $M(= Z(R))$ یک p - گروه می باشد.

تعریف (۰-۲۴): ایده آل اول P از حلقه R را یک ایده آل اول وابسته ضعیف گویند اگر $x \in R$ چنان موجود باشد که P یک ایده آل اول مینیمال از $(0:_R x)$ باشد. مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته ضعیف حلقه R را با $W.Ass(R)$ نشان می دهند.

تعریف (۰-۲۵): یک دستگاه از پارامترها برای حلقه موضعی و نوتری (R, M) یک مجموعه $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (که $n = dim(R)$) از عضو های M می باشد به قسمی که $Rad(< x_1, x_2, \ldots, x_n >) = M$.

تعریف (۰-۲۶): یک حلقه موضعی نوتری (R, M) را حلقه موضعی گورنشتاین گوییم اگر R دارای این خاصیت باشد که

هر ایده آل تولید شده بوسیله یک سیستم از پارامترها تجزیه ناپذیر باشد یعنی نتوان آن را بصورت اشتراک دو ایده آل اکیدا بزرگتر نوشت.

تعریف (۰-۲۷): یک حلقه گورنشتاین از بعد صفر را یک حلقه فرو بنیوس گوییم.

قضیه (۰-۲۸): (ر. ک. [8, Theorem 221])

فرض کنید R یک حلقه موضعی از بعد صفر با ایده آل بیشین M باشد. در این صورت R یک حلقه گورنشتاین است اگر و تنها اگر پوچساز M (به عنوان یک فضای برداری بر $\frac{R}{M}$) از بعد ۱ باشد.

فصل اول

گراف مقسوم علیه صفراز یک حلقه جابجایی

۱-۱ ویژگی های گراف مقسوم علیه صفر

۱-۲ خود ریختی های گراف مقسوم علیه صفر

(۱-۱)ویژگی های گراف مقسوم علیه صفر

در این فصل R همواره نشان دهنده یک حلقه جابجایی و بایکه مخالف صفر است .

تعریف (۱-۱-۱): گراف مقسوم علیه صفر عبارت است از گرافی با راسهای $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$، که برای هر xو y متمایز از $Z(R)^*$ ، راسهای x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy = 0$. گراف مقسوم علیه صفر را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می دهیم .

اگر برای هر x و y از $Z(R)$، رابطه $\sim$ را به صورت زیر تعریف کنیم که

$$x \sim y \Leftrightarrow xy = 0 \text{ یا } x = y$$

در این صورت $\sim$ یک رابطه انعکاسی و تقارنی است . به سادگی می توان دید $\sim$ یک رابطه هم ارزی است اگر و تنها اگر گراف $\Gamma(R)$ یک گراف کامل باشد.

قضیه (۱-۱-۲): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد . در این صورت $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و تنها اگر R حلقه متناهی یا R یک دامنه صحیح باشد. بعلاوه اگر $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$ در این صورت R یک حلقه متناهی است که میدان نمی با شد .

برهان: ($\Longrightarrow$) فرض کنیم حلقه R متناهی با شد ، پس مجموعه مقسوم علیه های صفر R یعنی $Z(R)$ متناهی ا ست، پس $\Gamma(R)$ متناهی می شود . همچنین بدیهی ا ست اگر R یک دامنه صحیح باشد آنگاه $\Gamma(R)$ تهی ا ست .

برعکس ($\Longleftarrow$) فرض کنیم $\Gamma(R)$ متناهی و غیر تهی باشد. نشان می دهیم R متناهی است یا یک دامنه صحیح است. فرض خلف می کنیم R نا متناهی باشد و R حوزه صحیح نباشد . چون R حوزه صحیح نیست پس R دارای مقسوم علیه صفر است. یعنی

$$\exists\, x, y \in R;\ x, y \neq 0, x.y = 0$$

فرض کنید $I = Ann(x)$. پس $y \in I$ و از طرفی $y \in Z(R)$. در این صورت $I \subseteq Z(R)$ چون طبق فرض $\Gamma(R)$ متناهی است پس $Z(R)$ هم متناهی می‌شود لذا I نیز متناهی می شود . حال چون $y \in I$ پس برای هر $r \in R$ داریم $r\, y \in I$. چون I یک مجموعه متناهی است و R یک حلقه نامتناهی است پس می توان عضوی مانند $i \in I$ چنان انتخاب کرد که مجموعه $J = \{r \in R : ry = i\}$ یک زیر مجموعه نامتناهی از R باشد. برای هر r و s از J، می توان نوشت $ry = i$ و $s\, y = i$ در این صورت $(r - s)\, y = 0$، پس $(r - s) \in Ann\,(y)$ لذا $Ann(y)$ نا متناهی است . ولی $Ann(y) \subseteq Z(R)$ و $Ann(y)$ نامتناهی است لذا $Z(R)$ هم نامتنا هی‌می شود که این با فرض متناهی بودن $\Gamma(R)$ در تناقض است . پس R یک حلقه متناهی ا ست .

قضیه (۱-۱-۳): فرض کنید R حلقه ای جا بجایی با شد . در این صورت $\Gamma(R)$ همبند است و $diam(\Gamma(R)) \leq 3$. بعلاوه اگر $\Gamma(R)$ شامل یک دور باشد ، آنگاه $gr(\Gamma(R)) \leq 7$.

برهان: فرض کنیم x و y دو راس متمایز از $\Gamma(R)$ باشند. اگر $xy = 0$ ، در این صورت $d(x,y) = 1$. پس فرض کنیم $xy \neq 0$ باشد. اگر $x^2 = y^2 = 0$ در این صورت $x - xy - y$ یک راه به طول ۲ ا ست ، پس $d(x,y) = 2$. اگر $x^2 = 0$ و $y^2 \neq 0$ باشد چون $xy \neq 0$ ، در این صورت x و y به $Ann(y)$ تعلق ندارند. پس وجود دارد $b \in Z(R)^* - \{x,y\}$ که $by = 0$. اگر $bx = 0$ ، در این صورت $x - b - y$ یک راه به طول ۲ ا ست. اگر $bx \neq 0$ در این صورت $x - bx - y$ یک راه به طول ۲ ا ست . اکنون فرض کنیم $xy \neq 0$ و $y^2 \neq 0$ و $x^2 \neq 0$ پس وجود دارند a و b از $Z(R)^* - \{x,y\}$ بطوریکه $ax = 0$ و $by = 0$. حال اگر $a = b$ ، در این صورت $x - a - y$ یک راه به طول ۲ ا ست ، در نتیجه $d(x,y) = 2$. اگر $a \neq b$ و $ab = 0$ در این صورت

$$x - a - b - y$$

یک راه به طول ۳ است. اگر $ab \neq 0$ و $a \neq b$ در این صورت

$$x - ab - y$$

یک راه به طول ۲ ا ست و $d(x,y) = 2$. بنابر این همواره داریم $d(x,y) \leq 3$ و چون

$$diam(\Gamma) = sup\,\{d(x,y): x,y \in Z(R)^*, x \neq y\}$$

پس $diam(\Gamma) \leq 3$. بنابر قضیه (۰- ۱۵) داریم $gr\big(\Gamma(R)\big) \leq 7$.

قضیه (۱-۱-۴): فرض کنید R یک حلقه آرتینی جابجایی با شد (به عنوان مثال اگر R یک حلقه جابجایی متناهی با شد)، اگر $\Gamma(R)$ شامل یک دور با شد آنگاه $gr\big(\Gamma(R)\big) \leq 4$.

برهان: فرض کنید $\Gamma(R)$ شامل یک دور با شد . بنابر قضیه (۰- ۱۶) ، $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ که در آن R_i ها حلقه های موضعی می باشند. فرض کنید $n = 1$ باشد . پس R خود یک حلقه موضعی با ایده آل بیشین M ا ست . از قضیه (۰- ۱۸) نتیجه می شود که $M = Ann(x)$ برای یک $x \in M^*$. چون $\Gamma(R)$ شامل یک دور ا ست پس دو عضو متمایز y و z از M^* چنان موجود می با شد که $yz = 0$. حال اگر y و z هر دو مخالف x با شند در این صورت

$$x - y - z - x$$

یک دور می باشد و لذا $gr(\Gamma(R)) \leq 3$. اگر $y = x$ ، در این صورت $x - z - x$ یک دور می با شد و لذا $gr(\Gamma(R)) \leq 2$. حال فرض کنید $n = 2$ یعنی $R = R_1 \times R_2$. اگر $|R_1| \geq 3$ و $|R_2| \geq 3$ ، در این صورت $a_1 \in R_1 - \{0,1\}$ و $a_2 \in R_2 - \{0,1\}$ موجودند و در نتیجه

$$(1,0) - (0,1) - (a_1, 0) - (0, a_2) - (1,0)$$

یک دور می با شد و لذا $gr\big(\Gamma(R)\big) \leq 4$. اکنون فرض کنید $|R_1| < 3$. از این رو $R_1 = \mathbb{Z}_2$. حال اگر

$|Z(R_2)| \leq 2$ با شد، در این صورت $\Gamma(R)$ شامل هیچ دوری نخوا هد بود. این تناقض نشان می دهد که باید $|Z(R_2)| \geq 3$ با شد. پس $Z(R_2)$ دارای حد اقل دو عضو مخالف صفر ا ست . پس می توان دو عضو غیر صفر x و y از $Z(R_2)$ چنان انتخاب کرد که $xy = 0$. بنا براین

$$(\bar{0}, x) - (\bar{1}, 0) - (\bar{0}, y) - (\bar{0}, x)$$

یک دور در $\Gamma(R)$ بوده و در نتیجه $gr(\Gamma(R)) \leq 3$. پس در حالت $n = 2$ همواره داریم $gr(\Gamma(R)) \leq 4$.

حال فرض کنید $n \geq 3$ ، در این صورت

$$(1,0, \dots ,0) - (0,1,0, \dots ,0) - (0,0,1,0, \dots ,0) - (1,0, \dots ,0)$$

یک دور در $\Gamma(R)$ می با شد و در این حالت هم داریم $gr(\Gamma(R)) \leq 3$. در نتیجه همواره داریم

$$gr(\Gamma(R)) \leq 4.$$

قضیه (۱-۱-۵): فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت یک راس از $\Gamma(R)$ موجود است که با هر راس دیگر مجاور است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ که A یک دامنه صحیح ا ست یا $Z(R)$ یک ایده آل پوچ ساز ا ست و بنابراین اول است .

برهان: ($\Rightarrow$) اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ و A یک دامنه صحیح باشد ، پس A مقسوم علیه صفر ندارد . بدیهی است ، $(\bar{1}, 0)$ با هر راس دیگر از $\Gamma(R)$ مجاور است . اگر برای یک $x \in R$ ، $Z(R) = Ann(x)$ با شد در این صورت x مجاور با هر راس دیگر است .

($\Leftarrow$) باید ثابت کنیم که $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ که A یک دامنه صحیح ا ست یا $Z(R)$ یک ایده آل پوچ ساز ا ست . فرض کنید $0 \neq a \in Z(R)$ مجاور با هر راس دیگر با شد . فرض کنید که $Z(R)$ یک ایده آل پوچ ساز نباشد . از $a \in Ann(a)$ نتیجه می شود که $Z(R) = Ann(a)$. چون $Z(R)$ یک ایده آل پوچ ساز نیست ، پس $a \notin Ann(a)$ برای هر $b \in R$ ، $Ann(b) \subseteq Z(R)$. چون a مجاور با هر راس از $\Gamma(R)$ است پس برای هر $t \in Ann(b)$ ، $ta = 0$. لذا $Ann(b) \subseteq Ann(a)$. پس $Ann(a)$ یک عضو بیشین در بین عناصر مجموعه

$$\{Ann(b) : \ b \in R\}$$

می با شد . بنا برقضیه (۰-۱۸) ، $Ann(a)$ یک ایده آل اول است . حال فرض کنید $a^2 \neq a$. بدیهی است برای هر $t \in Ann(a)$ داریم $ta^2 = 0$ ، پس $a^2 \in Z(R)$. چون a مجاور با هر راس $\Gamma(R)$ است پس $a^3 = a^2 a = 0$ در نتیجه $a^2 \in Ann(a)$. اکنون ازاینکه $Ann(a)$ یک ایده آل اول است نتیجه می گیریم که $a \in Ann(a)$. این تناقض نتیجه می دهدکه $a^2 = a$. بدیهی است در این صورت $Ra \cap R(1-a) = 0$. زیرا اگر $x \in Ra \cap R(1-a)$ آنگاه $x = r_1 a$ و $x = r_2 (1-a)$. در نتیجه $r_1 a = r_2(1-a)$. لذا

$$r_1a^2 = r_2(1-a)a = 0 \ \Rightarrow x = r_1a = 0$$

همچنین برای هر $r \in R$ داریم $r = ra + r(1-a)$. از این رو

$$R = Ra \oplus R(1-a).$$

لذا $R \simeq Ra \times R(1-a)$. از طرفی بنا بر قضیه اساسی هومور فیسم

$$Ra \simeq \frac{R}{Ann(a)} = R_1 \quad , \quad R(1-a) \simeq \frac{R}{Ann(1-a)} = R_2$$

پس می توان فرض کرد که $R \simeq R_1 \times R_2$ که در آن

$$a \to \left(a^2, a(1-a)\right) \to (a,0) \to (1{,}0)$$

یعنی تحت یکریختی $R \simeq R_1 \times R_2$ ، a در تناظر با عضو $(1{,}0)$ از حلقه $R_1 \times R_2$ قرار دارد. پس می توان فرض کرد که $R = R_1 \times R_2$ و عضو $(1{,}0)$ با هر راس دیگر از $Z(R_1 \times R_2)^*$ مجاور است . چون به ازای هر $1 \neq c \in R_1$ داریم $(c,0)(0{,}1) = 0$ ، لذا $(c,0) \in Z(R_1 \times R_2)^*$. چون $(1{,}0)$ با هر راس دیگر از $Z(R_1 \times R_2)^*$ مجاور است پس

$$(c,0) = (c,0)(1{,}0) = (0{,}0)$$

در نتیجه $c = 0$. ازاین رو $R_1 \simeq \mathbb{Z}_2$. برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم که R_2 یک دامنه صحیح است . فرض کنید R_2 یک دامنه صحیح نباشد . پس یک عضو غیر صفر مانند $b \in Z(R_2)$ موجود است. در این صورت $(1,b) \in Z(R_1 \times R_2)^*$ ، در حالیکه $(1,b)(1{,}0) \neq 0$. این تناقض نشان می دهد که R_2 باید یک دامنه صحیح باشد و بدین وسیله اثبات کامل می شود .

نکته (۱-۱-۶): اثبات قضیه (۱-۱-۵) نشان می دهد که اگر یک راس x از $\Gamma(R)$ مجاور به هر راس دیگر باشد ، در این صورت x خود توان است با $Rx = \{0,x\}$ که یک ایده آل-اول R است یا $Z(R) = Ann(x)$ می باشد.

برهان: فرض کنیم یک راس از $\Gamma(R)$ مثل x مجاور به راسهای دیگر است و $x \in Ann(x)$ یا $x \notin Ann(x)$. فرض کنیم که $x \in Ann(x)$. در این صورت از اثبات قضیه (۱-۱-۵) داریم که $Z(R) = Ann(x)$. اگر $x \notin Ann(x)$ ، از اثبات قضیه (۱-۱-۵) داریم که $x^2 = x$ و $R \simeq \mathbb{Z}_2 \times A$ که A یک دامنه صحیح است و x در تناظر با $(\bar{1},0)$ است .

$$Rx \simeq \mathbb{Z}_2 \ \ , \ \ \mathbb{Z}_2 \times A = \{(\bar{0},a) : a \in A\} \cup \{(\bar{1},b) : b \in A\}$$

بدیهی است که Rx یک ایده آل اول از R است. در حقیقت اگر $Z(R)$ یک ایده آل پوچ ساز با شد در این صورت $Ann(Z(R))^*$ دقیقا مجموعه راسهایی است که مجاور به هر راس دیگر هستند :

$$Ann(Z(R))^* = \{r \in R \ : r\left(Z(R)\right)^* = 0\}.$$

نتیجه (۱-۱-۷): فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری با شد. در این صورت یک راس از گراف $\Gamma(R)$ مجاور به هر راس دیگر است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ که A یک دامنه صحیح (نوتری) است یا $Z(R)$ یک ایده آل اول است . بعلاوه اگر $dim(R) = 0$ در این صورت $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ که A یک میدان است یا $\{0\}$ یک ایده آل اولیه از R است (یعنی $Z(R) = nil(R)$).

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنید گراف $\Gamma(R)$ دارای یک راس مخالف صفر مانند a باشد که مجاور با هر راس دیگر است. پس بنا بر قضیه (۱-۱-۵)، $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ می باشد که در آن A یک دامنه صحیح یا $Z(R)$ یک ایده آل پوچساز و در نتیجه بنا بر لم (۰-۲۱) یک ایده آل اول است .

($\Rightarrow$) فرض کنید $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ با شد که A یک دامنه صحیح یا $Z(R)$ یک ایده آل اول است. از طرفی اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ چون R نوتری است لذا A یک دامنه صحیح نوتری و در نتیجه یک میدان خواهد شد . اگر $Z(R)$ یک ایده آل باشد بنا بر لم (۰-۲۱)، $Z(R)$ یک ایده آل پوچ-توان خواهد شد .

برای تکمیل اثبات فرض کنید $dim(R) = 0$. اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ که A یک دامنه صحیح (نوتری) است ، از $dim(R) = 0$ می گیریم که R و در نتیجه A یک دامنه صحیح آرتینی می باشد لذا A یک میدان است. اگر $Z(R)$ یک ایده آل اول باشد در این صورت از $ab \in \{0\}$ و $a \neq 0$ نتیجه می گیریم که $b \in Z(R)$. اکنون از لم (۰-۲۱) قسمت (۴)، $b \in Z(R) = nil(R)$. بنا بر این وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ که $b^n = 0$ یعنی $\{0\}$ یک ایده آل اولیه است.

نکته (۱-۱-۸): با توجه به مثال زیر می بینیم که شرط نوتری بودن در نتیجه (۱-۱-۷) لازم است.

مثال : فرض کنید $\{X_\beta\}_\beta$ یک خانواده نامتناهی از مجهولات باشد. در این صورت حلقه $R = \mathbb{Z}_2[\{X_\beta\}] /< \{X_\beta^2\} >$ یک حلقه غیر نوتری شبه موضعی با ایده آل ماکسیمال $Z(R) = nil(R) = < \{X_\beta\} > /< \{X_\beta^2\} >$ از بعد صفر می باشد در حالی که $Z(R)$ یک ایده آل پوچ توان نیست .

نتیجه (۱-۱-۹): فرض کنید R یک حلقه جابجایی متناهی باشد. یک راس از $\Gamma(R)$ مجاور با هرراس دیگر است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ که در آن F یک میدان متناهی یا R یک حلقه موضعی است. بعلاوه برای یک عدد اول p و یک عدد صحیح $n \geq 1$، داریم $|\Gamma(R)| = |F| = p^n$ اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ و $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ اگر R یک حلقه موضعی باشد.

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنید یک راس از $\Gamma(R)$ مجاور با تمام رئوس دیگر آن با شد. بنا بر نتیجه (۱-۱-۷)، $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$، که در آن F یک دامنه صحیح است یا $Z(R)$ یک ایده آل اول از R باشد. چون R متناهی است پس اگر F یک دامنه

صحیح باشد آنگاه F یک دامنه صحیح متناهی و در نتیجه یک میدان است. پس فرض کنید $Z(R)$ یک ایده آل اول از R باشد. چون R متناهی است پس R یک حلقه آرتینی می باشد و لذا $dim(R) = 0$. اکنون از لم (۰-۲۱) می دانیم $Z(R)$ یک ایده آل اول است اگر و تنها اگر $Z(R) = nil(R)$. حال اگر $Z(R)$ یک ایده آل اول باشد در این صورت

$$Z(R) = nil(R) = \bigcap_{P \in Max(R)} P$$

در نتیجه وجود دارد $P \in Max(R)$ بطوریکه $P \subseteq Z(R) \subseteq R$. چون $1 \notin Z(R)$ پس $Z(R)$ یک ایده آل سره از R است لذا $P = Z(R)$. از طرفی $Z(R) = \cap P \subseteq P'$ به ازای هر $P' \in Max(R)$. لذا $P' = Z(R)$ ، در این صورت $Max(R) = \{Z(R)\}$ یعنی R یک حلقه موضعی است.

$(\Longrightarrow)$ فرض کنید $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ که F یک میدان است. از این رو بنا بر نتیجه (۱-۱-۷) ، یک راس از R که مجاور با هر راس دیگر است موجود می باشد اگر R یک حلقه موضعی با ایده آل ماکسیمال M باشد آنگاه برای $P \in Max(R)$ ،

$$M = \cap P = nil(R) \subseteq Z(R) \subset R$$

لذا $Z(R) = M$. پس $Z(R)$ یک ایده آل (اول) می باشد. مجددا بنا به نتیجه (۱-۱-۷)، یک راس از $\Gamma(R)$ مجاور با هر راس دیگر آن می باشد. بدیهی است اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ چون F یک میدان است لذا عدد اول p و عدد طبیعی n موجودند که $|F| = p^n$. حال از اینکه $Z(\mathbb{Z}_2 \times F) = \{0\} \times F \cup \{(1,0)\}$ نتیجه می گیریم $|\Gamma(R)| = p^n$.

اکنون فرض می کنیم R یک حلقه موضعی با ایده آل بیشین M باشد. چون R یک حلقه موضعی متناهی است ، مشخصه آن برابر p^k به ازای یک عدد اول p و یک عدد طبیعی k می باشد. از طرفی دیدیم اگر حلقه R موضعی باشد آنگاه

$$nil(R) = Z(R) = M.$$

چون $char(R) = p^k$ به ازای هر $a \in M$ داریم $p^k a = 0$. یعنی در گروه جمعی M رتبه هر عضو توانی از عدد اول p است لذا گروه جمعی M یک p - گروه می باشد پس بنا بر قضیه‌های سیلو مرتبه M برابر توانی از عدد اول p مانند p^n است لذا

$$|\Gamma(R)| = |Z(R)^*| = |M - \{0\}| = p^n - 1.$$

اکنون مشخص می کنیم که تحت چه شرایطی گراف $\Gamma(R)$ یک گراف کامل می باشد .

قضیه (۱-۱-۱۰): فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ یک گراف کامل است اگرو تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یا برای هر $x, y \in Z(R)$ داشته باشیم $xy = 0$.

برهان: $(\Longrightarrow)$ فرض کنیم $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ پس $Z(R) = \{(0,1)(1,0)\}$ دارای دو راس است که مجاور ند پس $\Gamma(R)$ کامل است. همچنین اگر برای هر $x, y \in Z(R)$ داشته باشیم $xy = 0$ در این صورت حکم بدیهی است.