بسم الله الرحمن الرحيم

گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

توسیع های محض گروه های آبلی و فشرده موضعی

از

علی اکبر طالش علیجان

استاد راهنما

دکتر حسین نسهله

شهریور ۱۳۸۸

تقدیم به خانواده ام

تقدیرو تشکر:

با سپاس به درگاه خداوند متعال که به من توفیق انجام این پایان نامه را عنایت فرمود.

لازم می دانم ازاستاد راهنمای گرامی، دکترحسین سهله، بخاطرزحمات فراوان، راهنماییهای بجا درمراحل تحقیق و نگارش پایان نامه قدردانی نمایم.

فهرست

چکیده:

توسیع های محض گروه های آبلی و فشرده موضعی

علی اکبر طالش علیجان

فرض کنید $Pext(C,A)$، گروه توسیع های محض از A به C باشد که A و C گروه های آبلی و فشرده موضعی هستند. دراین پایان نامه گروه $Pext(C,A)$ را مورد مطالعه قرارمی دهیم.

شرایطی را روی A,C قرارمی دهیم که تحت آن شرایط تساوی $Pext(C,A) = Ext(C,A)^1$ برقرارشود. گروه های انژکتیو محض در کاتاگوری گروه های آبلی و فشرده موضعی مورد بررسی قرارمی گیرند. فرض کنید ℓ نمایش رده ای ازگروه های آبلی و فشرده موضعی باشد که می توان بصورت جمع مستقیم یک گروه به طور فشرده تولید شده و یک گروه گسسته نوشت. دراین پایان نامه گروه های $G \in \ell$ که درکاتاگوری گروه های آبلی و فشرده موضعی انژکتیو محض هستند را مشخص می کنیم. سپس گروه های $G \in \ell$ را که در ℓ انژکتیو و تصویری محض هستند را مشخص می کنیم.

کلید واژه:

گروه آبلی، فشرده موضعی، انژکتیو محض، گروه به طورفشرده تولید شده،گروه گسسته، تصویری محض

Abstract:

Pure extensions of locally compact abelian groups

Ali Akbar Talesh Alijan

Let $Pext(C,A)$ denote the group of pure extensions of A by C which A and C are locally compact abelian (LCA) groups. In this thesis, we study the group $Pext(C,A)$. We set conditions on A and C which under those conditions $Pext(C,A) = Ext(C,A)^1$. We study pure injective groups in the category of LCA groups. Let ℓ denote the class of LCA groups which can be written as the topological direct sum of a compactly generated group and a discrete group. In this thesis, we determine the groups G in ℓ which are pure injective in the category of LCA groups. Finally we determine the groups G in ℓ which are pure injective and pure projective in ℓ.

Key words:
Abelian group, locally compact, pure injective, compactly generated group, discrete group, pure projective

مقدمه

فرض کنید £، کاتاگوری گروه های آبلی و فشرده موضعی باشد که درآن همریختی های پیوسته به عنوان مرفیسم درنظرگرفته می شوند. هدف این پایان نامه، مطالعه ی $Pext(C,A)$، گروه توسیع های محض از A به C است که درآن A و C گروه هایی متعلق به £ هستند.

در[7] ثابت شده است که برای گروه های $A,C \in £$، $Ext(C,A) \cong Ext(\hat{A},\hat{C})$ که $\hat{A}$ و $\hat{C}$ به ترتیب دوگان های A و C هستند. درحالت کلی لزومی ندارد که برای گروه های $A,C \in £$، داشته باشیم: $Pext(C,A) \cong Pext(\hat{A},\hat{C})$.

سوالی که دراینجا مطرح می شود اینست که تحت چه شرایطی، $Pext(C,A) \cong Pext(\hat{A},\hat{C})$؟ فرض کنید $\Re$ نمایش رده ای ازگروه های آبلی و فشرده ی موضعی باشند که درشرایط زیرصدق می کنند: اگر $G \in \Re$ آنگاه $\hat{G} \in \Re$ و برای هرعدد صحیح مثبت n، nG در G بسته است. دراین پایان نامه ثابت می شود که اگر $A,C \in \Re$، آنگاه $Pext(C,A) \cong Pext(\hat{A},\hat{C})$.

برای گروه های $A,C \in £$، $Ext(C,A)^1$ را بصورت زیرتعریف می کنیم:

$$Ext(C,A)^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nExt(C,A)$$

در[4] ثابت شده است که برای گروههای گسسته A و C، $Pext(C,A) = Ext(C,A)^1$.

فرض کنید $A,C \in £$. سوالی که دراینجا مطرح می شود اینست که تحت چه شرایطی روی A و C، $Pext(C,A) = Ext(C,A)^1$؟ ثابت می شود که اگر A و C به طورفشرده تولید شده($generated$ $compactly$) باشند و یا A و C بدون زیرگروه کوچک($subgroup$ $small$) باشند، آنگاه $Pext(C,A) = Ext(C,A)^1$.

فرض کنید $G \in £$ و هرتوسیع محض $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$ در£ شکافنده باشد. ثابت می شود $G \cong R^n \oplus T^m \oplus G'$ که n یک عدد صحیح نامنفی، m یک عدد اصلی و G' یک گروه تاب دار توپولوژیکی و بخشپذیرمتراکم است که هیچ زیرگروه باز، فشرده و محض غیربدیهی ندارد.

فرض کنید ℓ نمایش رده ای ازگروه های متعلق به £ باشد که می توان بصورت جمع مستقیم توپولوژیکی یک گروه به طورفشرده تولید شده و یک گروه گسسته نوشت. فرض کنید $G \in \ell$و $0 \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$ یک توسیع محض در ℓ باشد. تحت چه شرایطی روی G، $0 \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$ شکافنده است؟ ثابت می شود

اگر $G \cong R^n \oplus T^m \oplus A \oplus B$ که n یک عدد صحیح نامنفی، m یک عدد اصلی، A حاصلضرب مستقیم گروه های دوری متناهی و B یک گروه گسسته و کراندار است، آنگاه $0 \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow 0$ شکافنده است. همچنین ثابت می شود اگر $G \cong R^n \oplus C \oplus D$ که n یک عدد صحیح نامنفی، C یک گروه فشرده و تاب دار و D، جمع مستقیمی از گروه های دوری است (D گسسته است)، آنگاه هر توسیع محض $0 \longrightarrow G \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow 0$ شکافنده است.

ساختاراین پایان نامه بصورت زیراست:

درفصل صفر تعاریف، قضایا و مثالهای مورد نظر ارائه می گردد.

درفصل یک توسیع های محض گروه های آبلی و فشرده موضعی معرفی و بعضی قضایای مربوط به آنها مورد بررسی قرارمی گیرند.

درفصل دو گروه های انژکتیو وتصویری محض در£ مورد بررسی قرارمی گیزد.

برای شماره گذاری قضایا، مثال ها وتعاریف، ازاعداد بصورت فارسی استفاده شده است.

نحوه شماره گذاری بصورت زیراست:

ابتدا شماره فصل، سپس شماره قضیه(تعریف، مثال) ذکرمی شود. به عنوان مثال۲-۴ یعنی فصل۲، قضیه۴.

برای رجوع به مراجع ازنماد $[a,b.c,d]$ استفاده می شود یعنی مرجع a، فصل b بخش c و مورد d.

فصل صفر

تعاریف و مثال ها و قضایای مورد نیاز

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مورد نیازمی پردازیم. تعاریف و قضایای از ۰-۱ تا ۰-۲۱ در [4] و از ۰-۲۲ تا ۰-۶۵ در [10] آمده است.

۰-۱- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه باشد. آنگاه برای هرعدد صحیح مثبت n، $G[n]$ و nG را بصورت زیرتعریف می کنیم:

$$G[n]=\{x\in G; nx=0\}$$

$$nG=\{nx; x\in G\}$$

که $nx=\overbrace{x+x+\ldots+x}^{n\text{بار}}$.

۰-۲- **تعریف:** گروه D را بخشپذ یر گوئیم هرگاه برای هرعدد صحیح نامنفی m، $mD=D$.

۰-۳- **تعریف:** گروه D را انژکتیو نامیم هرگاه برای هرتکریختی $\alpha : A\to B$ از گروهها وهرهمریختی گروهی $\beta : A\to D$، همریختی $\eta : B\to D$ وجود داشته باشد، بطوریکه $\eta\alpha=\beta$.

۰-۴-**گزاره:** گروه های بخشپذیر، انژکتیوهستند. $[4, IV.21, Theorem1]$

۰-۵-**گزاره:** فرض کنید D یک گروه باشد. آنگاه شرایط زیرمعادلند:

(الف) D بخشپذیراست.

(ب) D انژکتیو است.

(پ) D جمعوند مستقیم هرگروه شامل خودش است. $[4, IV.24, Theorem5]$

۰-۶- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه باشد. آنگاه H را یک زیرگروه محض G گوئیم هرگاه برای هرعدد صحیح مثبت n، $nH=H\bigcap nG$.

۰-۷- **تعریف:** گروه G را تاب دارگوئیم هرگاه هرعنصرآن ازمرتبه ی متناهی باشد.

۰-۸- **تعریف:** گروه تاب دار G را کراندارگوئیم هرگاه عدد صحیح مثبتی چون n وجود داشته باشد بطوریکه $nG = 0$.

۰-۹-**گزاره:** فرض کنید A یک زیرگروه محض وکراندارگروه D باشد، آنگاه A جمعوند مستقیم D است.
$[4, V.27, Theorem5]$

۰-۱۰- **تعریف:** گروه D را تصویری محض گوئیم هرگاه به ازای هردنباله ی دقیق $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ ازگروه ها و همریختی های گروهی وهرهمریختی $\phi : D \to C$، همریختی چون $\psi : D \to B$ وجود داشته باشد، بطوریکه $\beta \circ \psi = \phi$.

۰-۱۱-**گزاره:** گروه D تصویری محض است اگروتنها اگر D جمع مستقیم گروه های دوری باشد.$[4, V.30, Theorem2]$

۰-۱۲- **تعریف:** $Hom(A,B)$، مجوعه ی همه ی همریختی های از A به Bاست که با عمل زیرتشکیل گروه می دهد:

فرض کنید f و g دو همریختی از Aبه B باشند. آنگاه برای هر $a \in A$ ، تعریف کنید:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

۰-۱۳-**گزاره:** فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ گردایه ای ازگروه ها باشد.

آنگاه: $Hom(\bigoplus_{i \in I} A_i, C) \cong \prod_{i \in I} Hom(A_i, C)$. $[4, VIII.43, Theorem1]$

۰-۱۴-**گزاره:** فرض کنید $\{C_i\}_{i \in I}$ گردایه ای ازگروه ها باشد.

آنگاه: $Hom(A, \prod_{i \in I} C_i) \cong \prod_{i \in I} Hom(A, C_i)$. $[4, VIII.43, Theorem2]$

۰-۱۵- **تعریف:** دنباله ی $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ ازگروه ها و همریختی های گروهی را یک دنباله ی دقیق کوتاه نامیم هرگاه α یک تکریختی، β یک برویختی و $\operatorname{Im}\alpha = Ker\beta$. دنباله ی دقیق کوتاه فوق را یک توسیع از A به C گوئیم.

۰-۱۶- **تعریف:** فرض کنید $Ext(C,A)$ مجموعه ی همه ی توسیع های از A به C باشد. برای توسیع های $0 \to A \xrightarrow{\mu_1} B_1 \xrightarrow{\upsilon_1} C \to 0 : E_1$ و $0 \to A \xrightarrow{\mu_2} B_2 \xrightarrow{\upsilon_2} C \to 0 : E_2$، توسیع $E_1 + E_2$ از A به C را بصورت زیرتعریف می کنیم:

$$E_1 + E_2 = \nabla_A (E_1 \oplus E_2) \Delta_C$$

که:

$$E_1 \oplus E_2 : 0 \to A \oplus A \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{\upsilon_1 \oplus \upsilon_2} C \oplus C \to 0$$

$$\nabla_A : A \oplus A \to A \qquad \Delta_C : C \to C \oplus C$$
$$(a_1,a_2) \mapsto a_1 + a_2 \qquad c \mapsto (c,c)$$

آنگاه $Ext(C,A)$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می دهد. برای جزئیات بیشتر به $[4]$ مراجعه شود.

۰-۱۷- **تعریف**: دنباله ی دقیق $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ را محض گوئیم هرگاه $\operatorname{Im}\alpha$ یک زیرگروه محض B باشد.

۰-۱۸- **تعریف**: گروه توسیع های محض از A به C را با $Pext(C,A)$ نمایش می دهیم که زیرگروهی از $Ext(C,A)$ است. برای جزئیات بیشتر به $[4]$ مراجعه شود.

۰-۱۹-**گزاره**: اگر $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ یک دنباله ی دقیق محض باشد، آنگاه برای هر گروه G، دنباله های القا شده ی زیردقیق اند: $[4, IX.53, Theorem7]$

(الف)

$$0 \to Hom(C,G) \to Hom(B,G) \to Hom(A,G) \to Pext(C,G) \to Pext(B,G) \to Pext(A,G) \to 0$$

(ب)

$$0 \to Hom(G,A) \to Hom(G,B) \to Hom(G,C) \to Pext(G,A) \to Pext(G,B) \to Pext(G,C) \to 0$$

۰-۲۰- **تعریف**: گروه G را هم تابی گوئیم هرگاه برای هرگروه بدون تاب X، $Ext(X,G) = 0$.

۰-۲۱-**گزاره**: یک گروه تاب دار، هم تابی است اگروتنها اگرجمع مستقیم یک گروه بخشپذیرویک گروه کراندار باشد. $[4, IX.54, Corollary1]$

۰-۲۲- **تعریف**: یک سه تایی $(G,0,\tau)$ یک گروه توپولوژیک است هرگاه:

الف) G یک گروه باشد.

ب) G یک فضای توپولوژیک باشد.

و توابع $G \to G$ و $G \times G \to G$ پیوسته باشند.

$$(x,y) \mapsto x.y \quad x \mapsto x^{-1}$$

۰-۲۳- **مثال**: گروه جمعی R (مجموعه ی اعداد حقیقی) با توپولوژی معمولی یک گروه توپولوژیکی است.

۰-۲۴- **تعریف**: اگر β گردایه همه بازه های نیم بازاعداد حقیقی به صورت $[a,b)$ که $a<b$ آنگاه توپولوژی تولید شده به وسیله β را توپولوژی حد پایین گفته و با R_l نمایش می دهیم.

۰-۲۵- **مثال:** فرض کنید R_l، نمایش گروه جمعی R با توپولوژی حد پایینی باشد، آنگاه R_l یک گروه توپولوژیکی نیست، زیرا اگر $\begin{matrix}\psi : R_l \to R_l \\ x \mapsto -x\end{matrix}$، آنگاه $\psi^{-1}([0,1)) = (-1,0]$ که $(-1,0]$ در R_l باز نیست.

۰-۲۶- **تعریف:** فضای توپولوژیک X را فشرده گوئیم هرگاه هرپوشش بازاز X شامل یک پوشش متناهی باشد.

۰-۲۷- **تعریف:** گروه توپولوژیک G را فشرده گوئیم هرگاه فضای توپولوژیک G فشرده باشد.

۰-۲۸-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی جمعی و A و B زیرمجموعه هایی از G باشند.اگر A باز باشد، آنگاه $A+B$ باز است. اگر A و B فشرده باشند، آنگاه $A+B$ نیز فشرده است. اگر A بسته و B فشرده باشد، آنگاه $A+B$ بسته است. $[10, II.4, Theorem4]$

۰-۲۹- **تعریف:** گروه توپولوژیک G را فشرده ی موضعی گوئیم هرگاه یک همسایگی چون U شامل 0 (عنصرهمانی G) وجود داشته باشد بطوریکه $\overline{U}$ فشرده باشد.

۰-۳۰- **تعریف:** فضای توپولوژیک X را فشرده ی شمارشی گوئیم هرگاه هرپوشش باز وشمارای X، شامل یک پوشش متناهی باشد.

۰-۳۱- **تعریف:** گروه توپولوژیک G را فشرده ی شمارشی موضعی گوئیم هرگاه یک همسایگی چون U شامل 0(عنصرهمانی G) وجود داشته باشد بطوریکه $\overline{U}$ فشرده ی شمارشی باشد.

۰-۳۲- **تعریف:** فضای توپولوژیک X را σ- فشرده گوئیم هرگاه X اجتماع شمارایی اززیرفضاهای فشرده باشد.

۰-۳۳- **تعریف:** گروه توپولوژیک G را σ- فشرده گوئیم هرگاه فضای توپولوژیک G، σ- فشرده باشد.

۰-۳۴-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی و σ- فشرده باشد. فرض کنید f یک همریختی پیوسته از G بتوی یک گروه هاسدورف و فشرده ی شمارشی موضعی $\widetilde{G}$ باشد. آنگاه f یک نگاشت باز است. $[10, II.5, Theorem29]$

۰-۳۵- **تعریف:** فضای توپولوژیک X را همبند گوئیم هرگاه X را نتوان بصورت اجتماع دو مجموعه ی بازوازهم جدا نوشت.

۰-۳۶- **تعریف:** گروه توپولوژیک G را همبند گوئیم هرگاه فضای توپولوژیکی G همبند باشد.

۰-۳۷- **تعریف:** زیرمجموعه های همبند ماکسیمال هرفضای توپولوژیک را مولفه های همبند فضا گوئیم.

۰-۳۸- **تعریف:** فضای توپولوژیک X را ناهمبند کلی گوئیم هرگاه مولفه های همبند فضا تک نقطه ایها باشند.

۰-۳۹- **تعریف:** گروه توپولوژیک G را ناهمبند کلی گوئیم هرگاه فضای توپولوژیک G ناهمبند کلی باشد.

۰-۴۰- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. C را مولفه ی همانی در G گوئیم هرگاه C مولفه ی همبند شامل عنصرهمانی گروه باشد.

۰-۴۱-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی و C مولفه ی همانی در G باشد. آنگاه G/C یک گروه هاسدورف و ناهمبند کلی است. $[10, II.7, Theorem3]$

۰-۴۲-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی و C مولفه ی همانی در G باشد. آنگاه C، اشتراک همه ی زیرگروه های باز G است. $[10, II.7, Theorem8]$

۰-۴۳-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H یک زیرگروه G باشد. اگر H و G/H همبند باشند، آنگاه G نیزهمبند است. $[10, II.7, Theorem14]$

۰-۴۴- **تعریف:** فرض کنید G و G' دو گروه توپولوژیکی باشند. آنگاه نگاشت $f : G \to G'$ را یک یکریختی توپولوژیکی گوئیم، هرگاه:

(الف) f یک یکریختی گروهی باشد.

(ب) f یک همیومورفیسم ازفضای توپولوژیک G به فضای توپولوژیک G' باشد.

۰-۴۵-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی و فشرده موضعی و C مولفه ی همانی در G باشد. آنگاه C یکریخت توپولوژیکی با $R^n \times E$ است که n یک عدد صحیح نامنفی و E یک گروه آبلی همبند و فشرده است. $[10, II.9, Theorem14]$

۰-۴۶- **تعریف:** فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. $C(X,Y)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$\{ C(X,Y) = \ f ; f : X \to Y$ و f پیوسته است $\}$

اگر $N(A,B) = \{ f \in C(X,Y); f(A) \subseteq B \}$، آنگاه گردایه ی شامل تمام $N(A,B)$ها که A یک زیرمجموعه ی فشرده ی X و B یک زیرمجموعه ی باز Y است، می تواند یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی $C(X,Y)$ باشد. این توپولوژی را توپولوژی فشرده- باز گوئیم.

۰-۴۷- **تعریف:** فرض کنید G و H دو گروه توپولوژیک باشند بطوریکه H آبلی است. فرض کنید $Hom(G,H)$ مجموعه ی همه ی همریختی های پیوسته از G به H باشد.برای $f, g \in Hom(G,H)$ و هر $x \in G$، تعریف می کنیم:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

آنگاه $Hom(G,H)$ با عمل فوق یک گروه است.

اکنون اگر مجموعه ی $Hom(G,H)$ را با توپولوژی فشرده- بازدرنظربگیریم، آنگاه بنا به $[10, p.374, Corollaryb]$ ، $Hom(G,H)$ یک گروه توپولوژیکی است (توجه داشته باشید که اگر G و H گروه های آبلی و گسسته باشند، آنگاه تعریف فوق با تعریف ۰-۱۲معادل است).

۰-۴۸- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی باشد. آنگاه $\hat{G}$، دوگان G، بصورت زیرتعریف می شود:

$$\hat{G} = Hom(G,T)$$

که T، نمایش گروه توپولوژیکی R/Z است.

۰-۴۹-**گزاره:** اگر G فشرده باشد، آنگاه $\hat{G}$ گسسته است. همچنین اگر G گسسته باشد آنگاه $\hat{G}$ فشرده است. $[10, VI.23, Theorem17]$

۰-۵۰-**گزاره:** فرض کنید G_1،...، G_m گروه های آبلی و فشرده موضعی باشند. نگاشت $\theta : \prod_{i=1}^{m} \hat{G}_i \to (\prod_{i=1}^{m} G_i)\hat{}$ که بصورت زیرتعریف می شود، را درنظر بگیرید:

برای هر $(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_m) \in \prod_{i=1}^{m} \hat{G}_i$، $\theta((\chi_1, ..., \chi_m)) = [\chi_1, ... \chi_m]$ که $[\chi_1, ..., \chi_m]$ بصورت زیرتعریف می شود:

$$[\chi_1, ..., \chi_m] : \prod_{i=1}^{m} G_i \to T$$

$$(x_1, ..., x_m) \mapsto \chi_1(x_1) + ... + \chi_m(x_m)$$

آنگاه θ یک یکریختی توپولوژیکی است. $[10, VI.23, Theorem18]$

۰-۵۱- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و $S \subseteq G$. آنگاه پوچساز S در $\hat{G}$ بصورت زیرتعریف می شود:

$$\{ (\hat{G}, S) = \ all \ \ for \ \ \chi \in \hat{G}; \chi(s) = 0 \ \ \} \ s \in S$$

۰-۵۲-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی و فشرده موضعی و H یک زیرگروه بسته G باشد. فرض کنید Y، گروه دوگان G/H باشد. آنگاه Y یکریخت توپولوژیکی با $(\hat{G}, H)$ است. در حقیقت اگر φ نمایش نگاشت طبیعی $x \mapsto x + H$ از G بتوی G/H باشد، نگاشت $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$ یک یکریختی توپولوژیکی از Y بتوی $(\hat{G}, H)$ است. $[10, VI.23, Theorem25]$

۰-۵۳- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی و $\hat{G}$، نمایش دوگان G باشد. برای زیرگروه بسته ی Y از $\hat{G}$، (G,Y) را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(G,Y)=\{x\in G;\chi(x)=0 \ \ for \ \ all \ \ \chi\in Y\}$$

۰-۵۴-**گزاره:** فرض کنید H یک زیرگروه بسته ی G باشد، آنگاه $H=(G,(\hat{G},H))$. $[10,VI.24,Theorem10]$

۰-۵۵-**گزاره:** فرض کنید H یک زیرگروه بسته ی G باشد. آنگاه گروه دوگان H یکریخت توپولوژیکی با $\hat{G}/(\hat{G},H)$ است. $[10,VI.24,Theorem11]$

۰-۵۶- **تعریف:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و a یک عنصر G باشد.عنصر a را فشرده نامیم هرگاه کوچکترین زیرگروه بسته ی G شامل a، فشرده باشد.

۰-۵۷-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی و فشرده موضعی باشد. مجموعه ی B شامل همه ی عناصر فشرده ی G یک زیرگروه بسته ی G است. $[10,II.9,Theorem10]$

۰-۵۸-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی و فشرده موضعی، B زیرگروه بسته ی $\hat{G}$ شامل همه ی عناصرفشرده و C مولفه ی همانی در G باشد. آنگاه $B=(\hat{G},C)$ و $C=(G,B)$. $[10,VI.24,Theorem17]$

۰-۵۹-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی و فشرده موضعی باشد. آنگاه برای هرعدد صحیح مثبت n، داریم:

(الف) $(\hat{G},nG)=\hat{G}[n]$

(ب) $(\hat{G},G[n])=\overline{n\hat{G}}$ $[10,VI.24,Theorem22]$

۰-۶۰- **تعریف:** گروه G را بدون تاب گوئیم هرگاه G به جز 0 (عنصرهمانی G) دارای هیچ عنصری ازمرتبه ی متناهی نباشد.

۰-۶۱-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. آنگاه:

(الف) اگر G بخشپذیرباشد، $\hat{G}$ بدون تاب است.

(ب) اگر G گسسته یا فشرده باشد، G بخشپذیراست اگروتنها اگر $\hat{G}$ بدون تاب باشد. $[10,VI.24,Theorem23]$

۰-۶۲-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی فشرده باشد. آنگاه شرایط زیرمعادلند:

(الف) G همبند است.

(ب) $\hat{G}$ بدون تاب است.

(ج) G یک گروه بخشپذیراست. $[10,VI.24,Theorem25]$

۰-۶۳-**گزاره:** یک گروه آبلی و فشرده موضعی G یکریخت توپولوژیکی با $R^n \times G_0$ است که n یک عدد صحیح نامنفی و G_0 یک گروه آبلی و فشرده موضعی است که شامل یک زیرگروه بازو فشرده است. $[10, VI.24, Theorem 30]$

۰-۶۴-**گزاره:** فرض کنید G یک گروه آبلی، تاب دار و فشرده باشد. آنگاه G یکریخت توپولوژیکی با $\prod_{i\in I} Z(b_i)$ است که I یک مجموعه ی اندیسگذارناتهی و فقط تعداد متناهی عدد صحیح متمایز b_i وجود دارد. $[10, VI.25, Theorem 9]$

توجه داشته باشید که منظوراز $\approx$ درگزاره ۰-۶۵ یکریختی گروهی است.

۰-۶۵-**گزاره:** فرض کنید H یک زیرگروه فشرده و محض گروه آبلی G باشد. آنگاه H به طورجبری یک جمعوند مستقیم G است، یعنی $[10, VI.25, Theorem 21]$ $G \approx H \oplus G/H$.

فصل ۱

توسیع های محض گروه های آبلی و فشرده موضعی

در این فصل،£ نمایش کاتاگوری گروه های آبلی، هاسدورف و فشرده موضعی است که درآن همریختی های پیوسته به عنوان مرفیسم درنظرگرفته می شوند. ℓ نمایش رده ای ازگروه های متعلق به £ است که می توان بصورت جمع مستقیم توپولوژیکی یک گروه به طورفشرده تولید شده(رک. تعریف ۱-۲۷) و یک گروه گسسته نوشت.

برای گروه های $A,C \in £$ گروه $Pext(C,A)$ را تعریف می کنیم و به بیان قضایا و نتایج مربوط به آنها می پردازیم.

۱-۱- **تعریف:** فرض کنید $G,H \in £$ و $f:G \to H$ یک همریختی پیوسته باشد. آنگاه f را سره گوئیم هرگاه f به عنوان یک تابع پیوسته بروی تصویرش بازباشد، یعنی برای هرمجموعه ی باز U در G، $f(U)$ در $f(G)$ بازباشد.

۱-۲- **تعریف:** برای گروه های $A,B,C \in £$، دنباله ی دقیق کوتاه $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ را دقیق سره گوئیم هرگاه ϕ و ψ همریختی های پیوسته ی سره باشند. آنگاه دنباله ی دقیق کوتاه فوق را یک توسیع از A به C گوئیم. گروه توسیع های از A به C با $Ext(C,A)$ نمایش داده می شود. برای جزئیات بیشتربه[7] مراجعه شود (توجه داشته باشید که اگر C و A گروه های گسسته باشند، آنگاه تعریف فوق با تعریف ۰-۱۶ معادل است).

۱-۳- **تعریف:** دنباله ی دقیق کوتاه و سره $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ در£ را یک توسیع محض از A به C نامیم هرگاه $\mathrm{Im}\,\phi$ یک زیرگروه محض B باشد. گروه توسیع های محض از A به C را با $Pext(C,A)$ نشان می دهیم که زیرگروهی از $Ext(C,A)$ است. (توجه داشته باشید که اگر C و A گروه های گسسته باشند، آنگاه تعریف فوق با تعریف ۰-۱۸ معادل است).

۱-۴-**گزاره:** فرض کنید $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک خانواده از گروه ها در £ باشد. آنگاه گردایه ی متشکل از همه ی مجموعه های به فرم، $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \cap (\bigoplus_\lambda G_\lambda)$ که U_λ در G_λ باز است، تشکیل یک پایه می دهد که $\bigoplus_\lambda G_\lambda$ با توپولوژی تولید شده توسط این پایه، یک گروه توپولوژیک می شود (رک [10]).

۱-۵-**گزاره:** اگر $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک خانواده از گروه ها در £ باشد،آنگاه $\prod_\lambda G_\lambda$ متعلق به £ است اگر و تنها اگر G_λ برای همه، به جز تعداد متناهی λ فشرده باشد (رک [10]).

۱-۶-**گزاره:** فرض کنید $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک خانواده از گروه ها در £ باشد. آنگاه $\bigoplus_\lambda G_\lambda \in £$ و $(\bigoplus_\lambda G_\lambda)\hat{} \cong \prod_\lambda \hat{G}_\lambda$ اگر و تنها اگر G_λ برای همه، به جز تعداد متناهی λ گسسته باشد.

برهان: ابتدا فرض کنید که G_λ،برای همه به جز تعداد متناهی λ گسسته باشد. آنگاه بنا به تعریف ۱-۴، $\bigoplus_\lambda G_\lambda$ گسسته و بنا براین متعلق به £ است. درنتیجه داریم:

$$(\bigoplus_\lambda G_\lambda)\hat{} = Hom(\bigoplus_\lambda G_\lambda, T)$$

$$\cong \prod_\lambda Hom(\hat{G}_\lambda, T)$$

$$\cong \prod_\lambda \hat{G}_\lambda$$

اکنون فرض کنید که $\bigoplus_\lambda G_\lambda \in £$ و $(\bigoplus_\lambda G_\lambda)\hat{} \cong \prod_\lambda \hat{G}_\lambda$ ، آنگاه چون $\bigoplus_\lambda G_\lambda \in £$، درنتیجه $(\bigoplus_\lambda G_\lambda)\hat{} \in £$. بنابراین $\prod_\lambda \hat{G}_\lambda \in £$. درنتیجه $\hat{G}_\lambda$ برای همه،به جز تعداد متناهی λ فشرده باشد، بنابراین G_λ، برای همه به جز تعداد متناهی λ گسسته است.

۱-۷- **تعریف:** گروه گسسته X تصویری محض نامیده می شود هرگاه برای هر دنباله ی دقیق محض $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ از گروه ها و همریختی های گروهی و هرهمریختی دلخواه $\psi : X \to C$ همریختی چون $\phi : X \to B$ وجود داشته باشد بطوریکه $\beta \circ \phi = \psi$.

۱-۸-**گزاره:** فرض کنید A یک گروه گسسته دلخواه باشد. آنگاه دنباله ی دقیق محض $0 \longrightarrow G \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$ ازگروه ها و همریختی های گروهی وجود دارد بطوریکه X تصویری محض است.

برهان: رجوع شود به $[4, P.127]$.

۱-۹- **تعریف:** گروه گسسته X انژکتیو محض نامیده می شود هرگاه برای هردنباله ی دقیق و محض $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ ازگروه ها و همریختی های گروهی وهرهمریختی دلخواه $\phi : A \to X$ همریختی چون $\psi : B \to X$ وجود داشته باشد بطوریکه $\psi \circ \alpha = \phi$.

۱-۱۰-**گـــــزاره:** فـــرض کنیـــد A یـــک گـــروه گسســـته دلخـــواه باشـــد. آنگـــاه دنبالـــه ی دقیـــق محـــض $0 \longrightarrow H \longrightarrow Y \longrightarrow A \longrightarrow 0$ از گروه ها و همریختی های گروهی وجود دارد بطوریکه Y انژکتیو محض است.

برهان: رجوع شود به $[4, P.128]$.

۱-۱۱-**گزاره:** اگر $\{C_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از گروه ها و A یک گروه گسسته دلخواه باشد،آنگاه:

(الف): $Pext(\bigoplus_{i\in I} C_i, A) \approx \prod_{i\in I} Pext(C_i, A)$

(ب): $Pext(A, \prod_{i\in I} C_i) \approx \prod_{i\in I} Pext(A, C_i)$

برهان: (الف): بنا به گزاره ۱-۸ برای هر i می توان دنباله ی دقیق محض $0 \to G_i \to X_i \to C_i \to 0$ را طوری در نظر گرفت که X_i، تصویری محض باشد. آنگاه (*) $0 \to \bigoplus_{i\in I} G_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i \to 0$ یک دنباله ی دقیق محض است. نشان می دهیم $\bigoplus_{i\in I} X_i$ تصویری محض است.

فرض کنید $0 \to A \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ یک دنباله ی دقیق محض دلخواه و $\psi : \bigoplus_i X_i \to C$ یک همریختی گروهی دلخواه باشد. فرض کنید $\iota_i : X_i \to \bigoplus_i X_i$ انژکسیون کانونی باشد. چون X_i تصویری محض است، درنتیجه بنا به تعریف، برای هر i، همریختی $\phi_i : X_i \to B$ وجود دارد بطوریکه برای هر i ، $\beta\phi_i = \psi\iota_i$.

همریختی $\phi : \bigoplus_i X_i \to C$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

اگر $(x_i)_{i\in I}$ عنصر دلخواهی از $\bigoplus_i X_i$ باشد ، $\phi((x_i)_{i\in I}) = \sum_i \phi_i(x_i)$.

داریم:

$$\begin{aligned}
\beta\phi((x_i)_i) &= \beta(\sum_i \phi_i(x_i)) \\
&= \sum_i \beta\phi_i(x_i) \\
&= \sum_i \psi\iota_i(x_i) \\
&= \psi(\sum_i \iota_i(x_i)) \\
&= \psi((x_i)_i)
\end{aligned}$$

بنابراین $\bigoplus_i X_i$ تصویری محض است. اکنون به ادامه ی برهان برمی گردیم.