بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم مشهد
گروه ریاضی

نگاشتهای خطی در فضاهای متعامد برداری

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

نگارنده:

مصطفی حاجیان اسرمی

استاد راهنما:

آقای دکتر مجید میرزاوزیری

استاد مشاور:

خانم دکتر ثریا طالبی

شهریور ۱۳۸۶

سپاسگزاری

آغاز راه، پر از تشویش و دل‌نگرانی‌هایی است که هر رهرو عشقی را به سختی می‌آزارد وبه حقیقت اگر نبود دستگیری و یاری عزیزانی که خورشید علم وبصیرت از نگاه آنان طلوع می‌کند، طی طریق برای اینجانب بسیار سخت وطاقت فرسا بود، لذا بر خود واجب می‌دانم که از زحمات و تلاشهای بی شائبه و ارزشمند پدر و مادر مهربان و اساتید عزیز و ارجمند آقای دکتر مجید میرزاوزیری وخانم دکتر ثریا طالبی که راهنمایی و مشاوره بنده را بر عهده داشتند و همچنین از همه دوستان عزیزم بخصوص آقای شکراله سهرابی که اینجانب را در تهیه وتدوین این پایان نامه یاری نموده اند تقدیر وتشکر نمایم.

مصطفی حاجیان اسرمی

۸۶/۶/۲۴

تقدیم به :

پدرم : آن باور پر از صلابت و استواری

مادرم: آن اسوه صبر و بردباری

همسرم: که بهار نگاهش، افقهای تازه بودن را به رویم گشود.

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: نگاشتهای خطی در فضاهای متعامد برداری

که توسط مصطفی جمال اسرمی تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۶/۶/۲۴ نمره: ۱۸/- هجده تمام درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر مجید میرزاوزیری	استاد راهنما	دانشیار	
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
دکتر علی جلیلیان عطار	استاد ممتحن	استادیار	
دکتر مرتضی آقائی	نماینده گروه آموزشی		

فهرست مندرجات

چکیده:

در این پایان نامه نگاشت های ثابت متعامد را در یک فضای متعامد متساوی‌الساقین معرفی کرده ودر مورد پایایی آنها بحث می کنیم به عنوان یک کاربرد پایایی معادله مربعی پکسیدر

$$F(x+y)+F(x-y)=2g(x)+2h(y)$$

را شرح می‌دهیم.

مقدمه

معادلات تابعی یکی از شاخه های زیر اساسی مهم ریاضیات درحال رشد می‌باشد. بخصوص در دو دهه اخیر روشهای خاصی از ریاضیات و نتایج جالبی از کاربردهای مختلف آن بدست آمده است. برای دیدن روش های مختلف حل معادلات تابعی می توان به کتابهای جی.آسزل[1] و جی.دامبرز[2]

[1] - J. Aczel

[2] - J. Dhombres

[1] و ام.کازوما[1] [20] و دی.اچ.هیرس[2] و جی.ایساک[3] و ام.راسیاس[4] [16] رجوع کرد. و برای اطلاعت تاریخی می‌توان به کتابهای آسزل [2] و دامبرز [11] رجوع کرد.

این پایان نامه شامل چهار فصل می‌باشد. که فصل اول مربوط به تعاریف و قضایای مقدماتی است که اکثرا با آنها آشنا هستیم. فصل دوم علاوه بر معرفی برخی از معادلات تابعی و اثبات نتایج اصلی مربوط به این معادلات،پایایی آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم مساله اصلی در مورد پایایی معادلات تابعی را اولین بار اس.اولام[5] در سال ۱۹۴۰ مطرح نمود و در سال ۱۹۴۱ دی.اچ.هیرس روش خاصی را برای حل این معادلات بیان نمود و در سال ۱۹۷۸ ت.ام.راسیاس نتیجه هیرس را روی یک میدان تعمیم بخشید که این نوع پایایی را پایایی **اولام-هیرس-راسیاس** برای معادلات تابعی نامید. که منظور از پایایی در این فصل همین پایایی است.

در فصل سوم به بررسی معادلات تابعی مورد بحث در فضای توابع مجموعه مقدار می‌پردازیم.

و سرانجام در فصل چهارم به رابطه نگاشت های خطی در فضای متعامد برداری می پردازیم.

و فرض می‌کنیم X فضای متعامد متساوی الساقین با رابطه ی تعامد $\perp$ و Y فضای باناخ باشد .

---

[1] - M. Kuczma

[2] - D. H. Hyers

[3] - G. Isac

[4] - M. Rassias

[5] - S. Ulam

و نگاشتهای $f,g,h,k:X\rightarrow Y$ در رابطه ی $F(\circ)=g(\circ)=h(\circ)=k(\circ)=\circ$ و در نامساوی زیر نیز صدق کنند

$$\|F(x+y)+g(x-y)-h(x)-k(y)\|\leq\varepsilon$$

برای هر $x,y\in X$ با $x\perp y$. آنگاه F ترکیب خطی از نگاشت کوشی تقریباً متعامد و نگاشت مربعی تقریباً متعامد و نگاشت پایای تقریباً متعامد می باشد . همچنین شرح فوق برای g صادق می‌باشد . که این پایایی معادله مربعی پکسیدر را نشان می‌دهد.

نمادهای C , $\Re$, Q را به ترتیب برای اعداد مختلط و اعداد حقیقی و اعداد گویا بکار برده ایم وبقیه‌ی نمادها را در متن معرفی کرده ایم.

فصل اول

تعاریف وقضایای کلی

۱-۱ زیر فضای خطی

تعریف (۱-۱-۱). فرض کنید که V فضای خطی روی F باشد یعنی به ازای هر $x, y \in V$ و هر $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم

$$\alpha x + \beta y \in V$$

زیر مجموعه $W \subset V$ **زیر فضای خطی** از V می‌باشد هر گاه برای هر $\alpha, \beta \in F, x, y \in W$ ترکیب خطی زیر را داشته باشیم

$$\alpha x + \beta y \in V$$

۱-۲ تابع

تعریف(۱-۲-۱). اگر A, B دومجموعه و f تابعی از A به B باشدآنگاه دامنه ی f را با $D(f)$ و برد f را با $R(f)$ نشان می دهیم . فرض کنیم X, Y دو فضای خطی روی F باشند.

تابع $T:X\to Y$ را **عملگر خطی**[1] از X به Y گوییم هر گاه به ازای هر $x,y\in X$ و هر $\alpha,\beta\in F$ داشته باشیم

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

یک عملگر خطی از X به F را یک **تابعک خطی**[2] گوییم .

عملگر $I:X\to X$ را با ضابطه $I(x)=x$ را عملگرهمانی وعملگر صفر از X به Y را با ضابطه‌ی $0(x)=0$ برای هر $x\in X$ تعریف می کنیم.

۱-۳ توپولوژی

تعریف(۱-۳-۱). یک **توپولوژی** τ روی یک مجموعه‌ی X، دسته ای از زیر مجموعه های X است، که آنها را مجموعه های **باز** می نامیم، بقسمی که $\phi\in\tau$ و $X\in\tau$ و اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه های باز مجموعه ای باز و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه های باز مجموعه ای باز باشد .

مجموعه ی X با توپولوژی τ را یک **فضای توپولوژیک** نامیده و آنرا به (X,τ) نشان می دهیم .

اگر $x\in X$ و U یک مجموعه‌ی باز شامل X باشد، آنگاه U را یک **همسایگی** X می نامیم .

$A\subset X$ را **بسته** گوئیم هر گاه متمم A یعنی $X-A$ باز باشد . اشتراک تمام مجموعه های بسته شامل A را که مجموعه‌ی بسته است با $\overline{A}$ نشان داده و آنرا **بستار** A می نامیم . مجموعه A را در X **چگال** نامیم هرگاه $\overline{A}=X$

X را **تفکیک پذیر**[3] نامیم هرگاه X دارای زیر مجموعه‌ی شمارش پذیر چگال باشد . اجتماع تمام مجموعه های باز مشمول A را که مجموعه‌ی باز است با A° نشان می دهیم و آنرا **درون**

---

[1] - Linear Operator
[2] - Linear Functional
[3] - Seperable

A می نامیم . $A\subset X$ را **فشرده** گویند هرگاه بصورت اجتماع متناهی از پوشش باز باشد.

مجموعه $A\subset X$ **موضعا فشرده** می باشد اگر هر نقطه اش همسایگی ای با بست فشرده داشته باشد.

۱-۴ فضاهای متری

تعریف(۱-۴-۱). فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد . تابع حقیقی d تعریف شده روی $X\times X$ را یک **متریک** روی X نامیم، هرگاه برای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم

الف. $d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$.

ب . $d(x,y)=d(y,x)$

ج.(نامساوی مثلثی) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

مجموعه ی X با متریک d را یک **فضای متری** نامیده و آنرا با (X,d) نشان می دهیم.

فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در X باشد . گوییم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **همگرا**[1] به X است، هرگاه برای $\varepsilon>0$ ، عددی طبیعی مانند n_0 وجود داشته باشد بقسمی که $n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$ و در این صورت می نویسیم $x_n\to x$.

دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را **کوشی**[2] نامیم اگربرای هز $\varepsilon>0$ وجودداشته باشد $n_0\in\mathrm{N}$ بقسمی که $m,n\geq n_0\Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، گوییم X **متریک پذیر**[3] است هرگاه یک متریک d روی X وجود داشته باشد بقسمی که توپولوژی تولید شده بوسیله d مساوی τ باشد.

---

[1] - Convergent
[2] - Cuachy
[3] - Metrizable

۱-۵ فضای توپولوژیکی برداری

تعریف(۱-۵-۱). فضای توپولوژیکی برداری X یک فضای خطی با توپولوژی τ می باشند بطوری که

الف - برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی تک عنصری $\{x\}$ بسته باشد .

ب - اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند .

اگر X یک فضای توپولوژیکی برداری باشد آنگاه $A \subset X$ را **کراندار** گوییم اگر برای هر همسایگی V از صفر عدد $s > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر $t > s$ داشته باشیم

$$E \subset tv$$

و در این فضا توابع $M_\lambda : X \to X, T_a : x \to x$ که بصورت $T_a x = a + x$ و $M_\lambda x = \lambda x$ تعریف می شوند همانسانی های از X به روی X هستند برای هر $a \in X$ و هر $\lambda \in F - \{0\}$.

تعریف(۱-۵-۲). زیر مجموعه ی A از X را **محدب** گوییم، اگر برای هر $t \in [0,1]$ داشته باشیم، $tA + (1-t)A \subset A$, $B \subset x$ را **موزون(جاذب)** می نامیم اگر برای هر $|\alpha| \le 1, \alpha \in F$ داشته باشیم $\alpha B \subseteq B$. $U \subset X$ را **متقارن** نامیم هرگاه $U = -U$ باشد .

۱-۶ قضیه بئر[1]

قضیه(۱-۶-۱). اگر X یک فضای متری تام باشد، اشتراک هرگردایه شمارش پذیر از زیر مجموعه های باز چگال X در X چگال است .

گاهی قضیه بئر را بدلیل زیر قضیه رسته ای می‌نامند .

---

[1] - Baire

مجموعه‌ی $E \subset X$ را **هیچ جا چگال** گوییم اگربستش $\overline{E}$ شامل زیر مجموعه‌ی باز نا تهی ای از X نباشد . هر اجتماع شمارش پذیر از مجموعه های هیچ جا چگال را یک مجموعه از **رسته‌ی اول** می‌نامند . سایر زیر مجموعه های X از **رسته‌ی دوم** می باشد . قضیه فوق هم ارز با حکم زیر است . هیچ فضای متری تام از رسته‌ی اول نیست

۱-۷ فضای نرمدار

تعریف(۱-۷-۱). فرض کنیم X یک فضای خطی روی F باشد . تابع $\rho : X \to \Re$ را یک **نیم نرم**[1] نامیم، اگر

الف . بازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم ; $\rho(x, y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

ب . بازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم ; $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$

قضیه(۱-۷-۲). فرض کنیم X یک فضای خطی روی F و ρ یک نیم نرم روی X باشد، آنگاه

الف . $\rho(0) = 0$

ب . بازای هر $x, y \in X$

$$\rho(x - y) \geq |\rho(x) - \rho(y)|$$

ج . $\rho(x) \geq 0$

اثبات . به آسانی بررسی می شود . □

تعریف(۱-۷-۳). فرض کنیم ρ یک نیم نرم روی فضای خطی X باشد، ρ را یک **نرم** نامیم، هرگاه $\rho(x) = 0$ ایجاب کند که $x = 0$.

بنابراین اگر نرم روی X را به صورت $\rho : X \to \Re$ که $\rho(x) = \|x\|$ نشان دهیم،خواهیم داشت

الف . $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$

[1] - Semi-norm

ب . (نامساوی مثلثی) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

ج . $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

اگر فضای خطی X دارای یک نرم باشد، آنگاه X را **فضای نرمدار** گویند .

۱-۸ یکریختی ها روی فضای خطی نرمدار

تعریف(۱-۸-۱). جفت $(Y,\|\cdot\|_Y)$ و $(X,\|\cdot\|_X)$ روی فضاهای خطی نرمدار**یکریخت** اند اگر تکریختی خطی $T: X \to Y$ برای a و b مثبت موجود باشند بطوری که

$$a\|x\|_X \le \|T(x)\|_Y \le b\|x\|_X$$

۱-۹ فضای نرمدار حاصلضرب

تعریف(۱-۹-۱). اگر $(Y,\|\cdot\|_Y)$ و $(X,\|\cdot\|_X)$ فضای خطی نرمدار باشند آنگاه حاصلضرب

$$X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$$

یک فضای خطی نرمدار بوسیله‌ی یکی از نرم های زیر است

۱ - $\|(x,y)\| = \left(\|x\|_X + \|y\|_Y\right)^{1/p}$

۲ - $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$

۱-۱۰ پیوستگی نگاشت ها در فضای نرمدار

تعریف(۱-۱۰-۱). نگاشت $F: X \to Y$ بین فضاهای خطی نرمدار $(X,\|\cdot\|_X)$ و $(Y,\|\cdot\|_Y)$ پیوسته است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x,a) > 0; \|x-a\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(a)\|_Y < \varepsilon$$

اگر F در هر نقطه مانند $a \in X$ پیوسته باشد آنگاه F در هر نقطه پیوسته می باشد .

و F را **پیوسته یکنواخت** گویند هر گاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \|x-y\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x)-F(y)\|_Y < \varepsilon$$

۱-۱۱ دنباله ها و تام بودن در فضاهای نرمدار

تعریف(۱-۱۱-۱). فرض کنید $X = \left(X, \|.\|_X\right)$ فضای خطی نرمدار باشد . دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X همگرا به نقطه ای مانند $a \in X$ است اگر $\|x_n - a\| \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

به طور مشابه سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست اگر **دنباله‌ی مجموع جزئی** $\{S_N\}$ که به صورت $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ تعریف می شود دنباله‌ای همگرا باشد .

لم(۱-۱۱-۲). نگاشت $F : X \to Y$ بین فضای خطی نرمدار پیوسته اگر و فقط اگر $Lim F(x_n) = F(a)$ وقتی $n \to \infty$ برقرار باشد.

اثبات. بدیهی است . □

تعریف(۱-۱۱-۳). دنباله‌ی $\{x_n\}$ **دنباله‌ی کوشی** است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N; m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

فضای خطی نرمدار X **کامل** گویند هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد .

۱-۱۲ فضای نرمدار به زبان توپولوژیکی

تعریف(۱-۱۲-۱). فرض کنید X فضای خطی نرمدار باشد مجموعه ی $S \subset X$ بسته است اگر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در S وجود داشته باشد، بطوری که در X همگرا باشد .یعنی $\lim_{n\to\infty} x_n$ در S موجود باشد .

مجموعه‌ی $U \subset X$ باز است اگر برای هر $u \in U$ وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ بطوری که $\|x-u\| < \varepsilon$ آنگاه $x \in U$.

مجموعه‌ی $S \subset X$ کراندار است اگر $M < \infty$ با این خاصیت که $x \in S$ وجود داشته باشد آنگاه $\|x\| < M$.

برای هر مجموعه ی $S \subset X$ در فضای نرمدار خواهیم داشت $S^{\circ} \subset S \subset \overline{S}$ ،که درون S بصورت زیر تعریف می شود

$$S^{\circ} = \{x \in X; \exists \varepsilon > 0, \|x-y\| < \varepsilon \Rightarrow y \in S\}$$

و بستار Sنیز بصورت زیر تعریف می شود

$$\overline{S} = \{x \in X; \forall \varepsilon > 0, \exists s \in S; \|s-x\| < \varepsilon\}$$

قضیه(۱-۱۲-۲). فرض کنید S زیر مجموعه‌ی بسته و کراندار از $\Re$ باشد اگر تابع $F : S \to \Re$ پیوسته باشد، آنگاه $\alpha, \beta \in S$ وجود دارند که

$$F(\alpha) = \sup_{s \in S} F(S) \quad , \quad F(\beta) = \inf_{s \in S} F(S)$$

اثبات . ([5] را ملاحظه کنید). □

تعریف (۱-۱۲-۳). زیر مجموعه‌ی S از فضای خطی نرمدار فشرده است اگر و فقط اگر برای هردنباله‌ی $\{s_n\}$ در S زیر دنباله ای همگرا در Sداشته باشد .

قضیه (۱-۱۲-۴). یک زیر مجموعه از $\Re^n$ فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد .

اثبات . ([5] را ملاحظه کنید). □

قضیه (۱-۱۲-۵). اگر A زیر مجموعه‌ی فشرده از فضای خطی نرمدار X باشد و $F : X \to Y$ نگاشت پیوسته بین فضاهای نرمدار خطی باشد آنگاه $F(A)$زیرمجموعه‌ی فشرده از Y می باشد.

تعریف (۱-۱۲-۶). فرض کنید X فضای نرمدار باشد.آنگاه **گوی باز** به شعاع $\varepsilon > 0$ و به مرکز x_0 مجموعه زیر می باشد

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

و **گوی بسته** به شعاع $\varepsilon > 0$ و به مرکز x_0 بصورت مجموعه زیر می باشد

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X :\ x - x_0\ \le \varepsilon\}$$

۱-۱۳ فضای هیلبرت[1]

تعریف (۱-۱۳-۱). فضای خطی مختلط H **فضای هیلبرت** نامیده می شود اگر تابع مختلط مقدار $(.,.) : H \times H \to C$ با خاصیت های زیر موجود باشد

۱ . $(x,x) > 0$ و $(x,x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ باشد .

۲ . $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ برای هر $x,y,z \in H$

۳ . $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$ برای هر $\lambda \in c\ ,\ x,y \in H$

۴ . $(x,y) = \overline{(y,x)}$ برای هر $x,y \in C$

۵ . نرم تعریف شده به وسیله‌ی $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ روی این فضاکامل باشد.

خاصیتهای ۱ تا ۴ را **فضای ضرب داخلی**[2] برای $(H,(.,.))$ می نامند .

لم (۱-۱۳-۲). نامساوی شوارتز[3] .در فضای هیلبرت

$$|(x,y)| \le \|x\|.\|y\|$$

اثبات . فرض کنید x,y عناصر غیر صفری باشند و $\lambda \in C$. آنگاه

$$0 \le (x+\lambda y, x+\lambda y)$$

---

[1] - Hilbert Space
[2] - Inner Product Space
[3] - Schuartz Inequality