بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

همریختی‌ها و ساختار فضای عملگری جبرهای فوریه و هرتس

توسط

احمد کریمی آخورمه

استاد راهنما

دکتر سید مسعود امینی

استاد مشاور

دکتر علیرضا مدقالچی

آذر ۱۳۸۶

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان نامه آقای **احمد کریمی آخورمه** رشته **ریاضی (محض)** تحت عنوان: «**مطالعه همریختی ها و ساختار فضای عملگری جبرهای فوریه و هرتس**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر علیرضا مدقالچی	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر عبدالحمید ریاضی	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمد باقری	استاد	

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رساله دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۶ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم /جناب آقای دکتر سید مسعود امینی ، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب احمد کریمی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: احمد کریمی
تاریخ و امضا:
۸۶/۹/۱۹

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

تقدیم به

دو الهه صبر، عشق و ایمان،

پدر و مادرم

که موفقیتهایم مرهون محبتهای بی‌دریغ ایشان است.

قدردانی

سپاس بی کلام خدایی را که به انسان عشق را عنایت فرمود ... .

از استاتید فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقایان دکترسید مسعود امینی، دکتر مدقالچی، دکتر ریاضی و دکتر باقری بخاطر تقبل زحمت راهنمایی، مشاوره و داوری این پایان‌نامه قدردانی می‌نمایم.

مراتب سپاس و قدردانی خویش را به محضر اساتید محترم دکتر Nico Spronk و دکتر Ali Ulger به خاطر راهنمایی‌های ظریف و ارزنده ایشان و همچنین تهیه برخی مراجع پایان‌نامه تقدیم می‌دارم.

مراتب سپاس و عمیقترین قدردانی خویش را به محضر دوستان عزیزم آقایان محمد ایلمکچی، صابر رضایی، علی عبدی، محمد حبیبی و سرکار خانم لیلا تقی‌زاده تقدیم می‌نمایم که جوی صمیمی و دوست‌داشتنی در محیط دانشگاه ایجاد نموده و همیشه ایشان را در کنارم حس کرده و از تجربیاتشان برخوردار بوده‌ام.

سپاس بی منتهای خود را نثار دوستان گرانمایه‌ام، جناب آقایان مصطفی حسنلو، مهندس رضا تنها، مهندس علیرضا منیری می‌نمایم که همیشه همچو فانوسی پیش راه، راهنما و راهگشایم بوده‌اند.

در پایان ولی بی کران، از پدر و مادر مهربانم و تک تک اعضای خانواده‌ام به خاطر عشق و حمایت مدامشان تشکر می کنم .

احمد کریمی آخورمه

آذر ۱۳۸٦

چکیده

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $B(G)$ جبر فوریه ـ اشتیلیس آن باشد. جبر فوریه $A(G)$ ایده‌آل بسته $B(G)$ است که توسط عناصر با محمل فشرده تولید می‌شود. جبرهای فوریه به عنوان پیش‌دوگان جبرهای فان نویمان دارای ساختار طبیعی فضای عملگری می‌باشند. فرض کنید همریختی جبری کاملاً کراندار $\phi : A(G) \to B(H)$ داده شده باشد، در این پایان نامه نشان می‌دهیم این همریختی بر حسب یک نگاشت قطعه‌ای آفین $\alpha : Y \to G$، که Y در حلقه همدسته‌های H است، به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\phi(f) = \begin{cases} f \circ \alpha & \text{on } Y, \\ \circ & \text{off } Y \end{cases}$$

که در آن G یک گروه گسسته و میانگین‌پذیر و H یک گروه موضعاً فشرده می‌باشد.

همچنین در این پایان‌نامه جبرهای هرتس $A_p(G)$ و جبر ضربگری آن یعنی $B_p(G)$ را معرفی نموده و به مطالعه ساختار فضای عملگری روی جبرهای هرتس و همچنین شناسایی اعضای خودتوان $B_p(G)$ می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی : جبرهای فوریه، جبر های هرتس، ساختار فضای عملگری، همریختی‌های کاملاً کراندار، نگاشت‌های قطعه‌ای آفین.

فهرست مندرجات

ج

مقدمه

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $B(G)$ جبر فوریه ـاشتیل‌یس آن باشد که توسط ایمار[۱] [۹] معرفی شده است. $B(G)$ توسط تمام توابع پیوسته مثبت معین روی G تولید می‌شود که می‌توان آن را با فضای دوگان $C^*(G)$ یکی گرفت. $B(G)$ با نرم دوگانی و ضرب نقطه به نقطه و مزدوج مختلط که روی آن در نظر گرفته می‌شود، به یک * ـ جبر باناخ مختلط تبدیل می‌گردد. جبر فوریه $A(G)$ ایده‌آل بسته $B(G)$ است که توسط عناصر با محمل فشرده تولید می‌شود. جبر فوریه برابر فضای درایه‌ای نمایش منظم چپ می‌باشد. وقتی که G آبلی باشد $A(G)$ با جبر گروهی $L^1(\hat{G})$ و $B(G)$ با جبر اندازه $M(\hat{G})$ یکریخت است. مرجع اصلی برای جبرهای فوریه و جبرهای فوریه ـ اشتیل‌یس [۹] می‌باشد. جبرهای فوریه به عنوان پیش‌دوگان جبرهای فان نویمان دارای ساختار طبیعی فضای عملگری می‌باشند. با استفاده از این ساختار جبرهای فوریه، به جبرهای باناخ کاملاً انقباضی تبدیل می‌شوند.

شناسایی همریختی‌های جبری از $L_1(G)$ به $M(H)$ در دهه ۱۹۵۰ مورد توجه قرار گرفت. کوهن[۲] [۲] توصیف کاملی از این همریختی‌ها، وقتی که G یک گروه موضعاً فشرده آبلی بود، بدست آورد. کوهن نشان داد که این همریختی ها می‌توانند با استفاده از یک

[۱] Eymard

[۲] Cohen

نگاشت قطعه‌ای آفین بین دوگان گروه‌ها نمایش داده شوند.

حال فرض می‌کنیم همریختی جبری $\phi : A(G) \to B(H)$ داده شده باشد، نشان می‌دهیم همیشه می‌توان Y زیرمجموعه H و $\alpha : Y \to G$ را پیدا کرد بطوریکه

$$\phi(f) = \begin{cases} f \circ \alpha & \text{on } Y, \\ 0 & \text{off } Y. \end{cases}$$

هاست [3] [۱۷] نشان داد اگر G و H گروه‌های موضعاً فشرده و G آبلی باشد، آنگاه α قطعه‌ای آفین است. همچنین وقتی G زیرگروهی آبلی با اندیس متناهی ندارد، او یک همریختی جبری از $A(G)$ به $B(G)$ ارائه داد که توسط هیچ نگاشت قطعه‌ای آفین نمایش داده نمی‌شد. وقتی G یک گروه آبلی باشد، ساختار فضای عملگری $A(G)$ به گونه‌ای است که هر نگاشتِ کراندار بطور خودکار کاملاً کراندار است، بنابراین نتایج هاست می‌تواند با مفهوم فضای عملگری تفسیر شوند. اولین سوالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا این نتایج برای گروه‌های دیگری برقرار است یا نه؟ تحت چه شرایطی برای گروه‌های دیگری هم برقرار است؟

هرتس [4] [۱۴] جبرهای $A_p(G)$ را معرفی کرد که بطور کلی تعمیمی از جبرهای فوریه و فضاهای L_p می‌باشند. این جبرها، جبرهای فیگا ـ تالامانکا ـ هرتس یا بطور خلاصه جبرهای هرتس نامیده می‌شوند. این جبرها در حالت خاص $p = 2$ همان جبرهای فوریه هستند. سوال دیگری که به ذهن می‌رسد این است که آیا مشابه نتایج بالا برای این

[3] Host

[4] Herz

جبرها برقرار است یا نه؟ تحت چه شرایط اضافی می‌توان حکم‌های بالا را برای جبرهای هرتس تعمیم داد؟

ساختار پایان نامه در یک دیدگاه کلی به شرح زیر است:

در فصل اول به پیشنیازهایی از آنالیز هارمونیک و فضاهای عملگری پرداخته و بعضی نمادها را معرفی می‌نماییم.

در فصل دوم به مطالعه آنالیز هارمونیک روی گروه‌های موضعاً فشرده آبلی و معرفی جبرهای فوریه و فوریه ـ اشتیل‌یس برای این گروه‌ها می‌پردازیم.

در فصل سوم به معرفی جبر فوریه ـ اشتیل‌یس و جبر فوریه یک گروه موضعاً فشرده دلخواه (نه لزوماً آبلی) می‌پردازیم و اغلب لم‌ها و قضایا را بدون اثبات ارائه می‌نماییم.

در فصل چهارم به شناسایی همریختی‌های جبرهای فوریه بر اساس نگاشت‌های قطعه‌ای آفین می‌پردازیم. شایان ذکر است که این فصل، قسمت اول مقاله اصلی این پایان نامه [۱۸] است و مطالب آن حول قضایا و لم‌های این مقاله می‌چرخد.

در فصل پنجم نگاشت‌های قطعه‌ای آفین به شکل گسترده تری مورد بحث قرار گرفته و با استفاده از آن برد همریختی‌های جبرهای فوریه را مطالعه می‌نماییم. مطالب این فصل بر پایه قسمت دوم مقاله اصلی پایان نامه [۱۸] است.

در فصل ششم، ابتدا به معرفی جبرهای هرتس و جبر ضربگری آن‌ها پرداخته و پس از آن یک ساختار فضای عملگری روی این جبرها را ارائه می‌نماییم. در پایان پس از معرفی U ـ مجموعه‌ها به شناسایی اعضای خودتوان $B_p(G)$ می‌پردازیم.

در فصل هفتم سوالات حل نشده‌ای که در حین پایان نامه به آن‌ها برخورده‌ایم آمده است. حل هر یک از این سوال‌ها می‌تواند پنجره‌ای را به سوی تعمیم مطالب این پایان نامه بگشاید.

فصل ۱

پیشنیازها

در این پایان نامه فرض می‌کنیم G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده و μ اندازه هار روی آن باشد [۱۱]. همچنین فرض می‌کنیم $L_1(G)$ و $M(G)$ به ترتیب جبر گروهی[۱] و جبر اندازه[۲] روی G نسبت به اندازه هار G باشند [۱۶]. مجموعه توابع مختلط کراندار و پیوسته روی G را با $CB(G)$، مجموعه توابع $f \in CB(G)$ که در بینهایت صفر می‌شوند را با $C_0(G)$.و همچنین مجموعه تمام توابع $f \in C_0(G)$ که دارای محمل فشرده هستند را با $C_c(G)$ نمایش می‌دهیم.

در این فصل بعضی نماد گذاری‌ها و بعضی پیشنیازها و نتایجی که در متن پایان‌نامه به آنها نیاز داریم را ارائه می‌دهیم.

---

[۱] group algebra

[۲] measure algebra

۱.۱ توابع مثبت معین

در این بخش، تعریف و بعضی خصوصیات توابع مثبت معین روی گروه موضعاً فشرده G ارائه خواهد شد که مرجع اصلی این مطالب، [۳.۳ : [۱۱]] می‌باشد.

تعریف ۱.۱ تابع $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ را مثبت معین[۳] می‌نامیم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ و هر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha_j} \phi(x_i^{-1} x_j) \geq 0.$$

توجه ۱.۱ در واقع تعریف بالا این موضوع را بیان می‌دارد که ماتریس $A = [\phi(x_i^{-1} x_j)]_{n \times n}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، یک ماتریس مثبت معین است. حال اگر $n = 2$ و قرار دهیم $x_1 = x$ و $x_2 = e$، آنگاه ماتریس

$$\begin{pmatrix} \phi(e) & \phi(x^{-1}) \\ \phi(x) & \phi(e) \end{pmatrix}$$

مثبت معین است. بنابراین، $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$ و $\phi(e)^2 - \phi(x)\phi(x^{-1}) \geq 0$ که ایجاب می‌کند برای هر $x \in G$ داشته باشیم $|\phi(x)| \leq \phi(e)$. بویژه، توابع مثبت معین کراندارند و همچنین $\|\phi\|_\infty = \phi(e)$.

فرض کنید $P(G)$ تمام توابع مثبت معین و پیوسته روی G باشد. این بخش را با چند خاصیت مفید $P(G)$ به پایان می‌رسانیم.

---
[۳] positive definite

قضیه ۱.۱ [[۱۱] : ۳.۳۵] اگر ϕ یک تابع پیوسته و کراندار روی G باشد، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند

۱) ϕ مثبت معین است.

۲) برای هر $f \in L_1(G)$، $\int (f^* * f)\phi \geq 0$.

۳) برای هر $f \in C_c(G)$، $\int (f^* * f)\phi \geq 0$.

قضیه ۲.۱ [[۱۱] : ۳.۱۳] تابع پیوسته و کراندار ϕ روی G مثبت معین است اگر و فقط اگر

$$\int\int f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)\,dx\,dy \geq 0 \qquad (f \in L_1(G)).$$

قضیه ۳.۱ [[۱۱] : ۳.۱۴] اگر ϕ مثبت معین باشد، آنگاه $\overline{\phi}$ نیز مثبت معین است.

قضیه ۴.۱ [[۱۱] : ۳.۱۶] اگر $f \in L_2(G)$، آنگاه $f * \tilde{f} \in P(G)$، که در آن $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

۲.۱ نظریه نمایش

در این بخش ابتدا به ارائه نظریه نمایش جبرهای باناخ و بعد از آن به معرفی نمایش‌های گروه‌های موضعاً فشرده می‌پردازیم. بویژه، ارتباط بین نمایش‌های یکانی گروه موضعاً فشرده G و $*$ ـ نمایش‌های ناتبهگون $L_1(G)$ را ارائه خواهیم نمود. همچنین در این بخش ارتباط بین نمایش‌های یکانی G و توابع مثبت معین روی G را بیان می‌کنیم. بیشتر مطالب این بخش از فصل ۳ مرجع [۱۱] آورده شده است.

تعریف ۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ برگشتی [۴] باشد. $\{\pi, \mathcal{H}\}$ را یک نمایش A می‌نامیم اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ یک $*$ ـ همریختی باشد. $\mathcal{H}$ را فضای نمایش π و بعد آن را بعد π می‌نامیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنید $\{\pi, \mathcal{H}\}$ یک نمایش جبر باناخ برگشتی A و $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ زیرفضای خطی بسته $\mathcal{H}$ باشد. $\mathcal{K}$ را π ـ پایا می‌نامیم اگر $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

تعریف ۴.۱ فرض کنید $\{\pi, \mathcal{H}\}$ یک نمایش جبر باناخ برگشتی A باشد. π را ناتبهگون [۵] می‌نامیم اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد

۱) $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(a)\eta \,:\, a \in A, \eta \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$.

۲) اگر $h \in \mathcal{H}$ و برای هر $a \in A$، $\pi(a)h = 0$، آنگاه $h = 0$.

---

[۴] involutive

[۵] non-degenerate

تعریف ۵.۱ نمایش $\{\pi,\mathcal{H}\}$ از یک جبر باناخ برگشتی A را دوری[۶] می‌نامیم اگر $\xi_\circ \in \mathcal{H}$ موجود باشد بطوریکه $\overline{\text{span}}\{\pi(A)\xi_\circ\} = \mathcal{H}$. در این حالت، $\xi_\circ$ را بردار دوری $\{\pi,\mathcal{H}\}$ می‌نامیم.

تعریف ۶.۱ نمایش $\{\pi,\mathcal{H}\}$ از یک جبر باناخ برگشتی A را تحویل ناپذیر[۷] می‌نامیم اگر $\{\circ\}$ و $\mathcal{H}$ تنها زیرفضاهای π - پایای $\mathcal{H}$ باشند.

در اینجا توجه خود را به نظریه نمایش گروه‌های موضعاً فشرده معطوف می‌نماییم.

تعریف ۷.۱ فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $\mathcal{H}_\pi$ یک فضای هیلبرت باشد. $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ یک نمایش یکانی[۸] G است اگر برای هر $x,y \in G$، $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ و $\pi(x^{-۱}) = \pi(x)^{-۱} = \pi(x)^*$، که در آن $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi) = \{T \in B(\mathcal{H}_\pi) \,:\, T^*T = TT^* = I\}$. در این حالت، $\mathcal{H}$ را فضای نمایش π و بعد آن را بعد π می‌نامیم.

تعریف ۸.۱ فرض کنید $\{\pi,\mathcal{H}\}$ یک نمایش گروه موضعاً فشرده G باشد و $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ زیرفضای خطی بسته $\mathcal{H}$ باشد. $\mathcal{K}$ را π - پایا می‌نامیم اگر برای هر $x \in G$ $\pi(x)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

حال اگر $\mathcal{K}$ مخالف صفر و π - پایا باشد، آنگاه تحدید π به $\mathcal{K}$، یعنی

$$\pi^{\mathcal{K}}(x) = \pi(x)|_{\mathcal{K}}$$

---

[۶] cyclic

[۷] irreducible

[۸] unitary