بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش کاربردی)

روش تکراری وردشی برای حل معادلات تابعی

از

مریم شه بالای پیشخانی

استاد راهنما

دکتر جعفر بی آزار

تیر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر ومادر عزیزم

آنانکه راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت

آنانکه دعای خیرشان همواره بدرقه راهم بوده است

سرو وجودشان سرسبز و استوار باد

تقدیر و تشکر

* من لم يشكر المخلوق، لم يشكر الخالق *

سپاس بی پایان ایزد منان را که الطاف بیکران او بر همگان جاری است و رحمت پروردگار بر تمام آنان که رهرو طریق علم و معرفتند. در اینجا لازم می دانم مراتب تقدیر و قدردانی خود را از کسانی که در مراحل تدوین پایان نامه مرا مورد لطف و عنایت خود قرار دادند، اعلام دارم.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای **دکتر جعفر بی آزار** که راهنمایی های ایشان در اجرای این تحقیق مشکلات راه را برایم هموار ساخت، بسیار سپاسگزارم.

از داوران محترم جناب آقای **دکتر سعید کتابچی** و جناب آقای **دکتر مازیار صلاحی** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از خانواده ی عزیزم که در تمام مراحل تحصیلی حامی من بوده اند و دوستان بزرگوارم خانم ها ابراهیمی و آیاتی که هر یک به نحوی اینجانب را مورد لطف قرار دادند صمیمانه قدردانی می کنم.

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

عنوان | **صفحه**

فهرست شکل ها

عنوان صفحه

چکیده

روش تکراری وردشی برای حل معادلات تابعی

مریم شه بالای پیشخانی

در این پایان نامه روش تکراری وردشی که توسط جی-هوآن خی برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شد برای حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی به کار برده می شود. نتایج حاصل از این روش، با نتایج حاصل از روش تجزیه ی آدومین مقایسه می شود. همچنین همگرایی روش تکراری وردشی برای حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت مورد بحث قرار می گیرد. برای انجام محاسبات از نرم افزار میپل ۱۱ استفاده شده است.

واژگان کلیدی : معادلات تابعی، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی، روش تکراری وردشی، ضریب لاگرانژ، تابع تصحیح، روش تجزیه ی آدومین.

Abstract

Variational iteration method for solving functional equations

Maryam shahbala pyshkhani

In this thesis, Variational iteration method, which has been proposed by Ji-Huan He to solve functional equations, has been employed to solve systems of ordinary differential equations. Results of using this method are compared with those of using Adomian decomposition method. Convergence of variational iteration method for solving linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients has been discussed. For computations Maple 11 is used.

Key words: Functional equation, System of ordinary differential equations, Variational iteration method, Lagrange multiplier, Correction functional, Adomian decomposition method.

پیشگفتار

از آن جایی که حل معادلات تابعی از مباحث بسیار مهم در آنالیز عددی می باشد بسیاری از پژوهشگران علوم ریاضی و مهندسی تحقیقات خود را به این موضوع اختصاص داده اند. در پایان نامه حاضر نتایج حاصل از دو روش عددی تکراری وردشی و تجزیه ی آدومین برای حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی با یکدیگر مقایسه می شوند.

این پایان نامه شامل چهار فصل است که به صورت زیر می باشد:

در فصل اول برخی مفاهیم و تعاریف اولیه در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه و روش تجزیه ی آدومین معرفی می گردد. در فصل دوم ابتدا مقدماتی در مورد حساب تغییرات بیان و در ادامه ساختار اصلی روش توضیح داده می شود. فصل سوم به حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی با روش تکراری وردشی اختصاص دارد و با ارائه مثال هایی، کارایی روش نشان داده می شود. در فصل چهارم همگرایی روش تکراری وردشی برای حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت مورد بحث قرار می گیرد. در پیوست برنامه هایی که با استفاده از امکانات نرم افزار میپل به منظور انجام محاسبات تهیه شده، ارائه می شود.

فصل اول

مقدمات اولیه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و معرفی روش تجزیه ی آدومین

۱-۱ مقدمه

۱-۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۳ صورت برداری دستگاه معادلات دیفرانسیل

۱-٤ تبدیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی n ام به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

۱-۵ معرفی روش تجزیه ی آدومین

۱-۱ مقدمه

در این فصل برخی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در مورد دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه می گردد و روش تجزیه ی آدومین به صورت خلاصه معرفی می شود.

۱-۲ تعاریف ومفاهیم اولیه

مدلسازی بسیاری از مسائل مهم و شایان توجه در مهندسی، علوم تجربی و علوم اجتماعی از اهمیت ویژه ای برخوردار است و حاصل این مدلسازی معمولاً به شکل یک معادله یا دستگاه معادلات جزئی یا تابعی ظاهر می شود. معادله ی حاصل از پدیده ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک و یا چند متغیر مستقل مطالعه می شود، یک معادله ی دیفرانسیل است. اگر تابع فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد، یک معادله ی دیفرانسیل معمولی $(O.D.E)$ ظاهر می شود. و اگر تعداد متغیرهای مستقل بیش از یکی باشد، یک معادله ی دیفرانسیل جزئی $(P.D.E)$ به دست می آید.

در اغلب مسائل ریاضیات کاربردی، چند متغیر وابسته وجود دارد که هر کدام تابعی از یک متغیر مستقل و سایر توابع وابسته هستند. این متغیر معمولاً زمان است. وقتی این نوع مسائل به زبان ریاضی توصیف می شوند، نتیجه غالباً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می باشد.

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ی اول، با شرایط اولیه، به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad & x_1(t_0) &= \alpha_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad & x_2(t_0) &= \alpha_2, \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad & x_n(t_0) &= \alpha_n.
\end{aligned}
$$

که شامل n معادله، n متغیر وابسته x_1، x_2، ... و x_n و یک متغیر مستقل t است. همچنین f_1، f_2، ... و f_n توابع حقیقی و پیوسته از $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$، در دامنه $D \subset R^{n+1}$ هستند. α_i ها نیز اعداد حقیقی معلوم هستند.

۱-۲-۱ مثال

هر یک از دستگاه های زیر، مثالی از یک دستگاه $(O.D.E)$ مرتبه ی اول می باشند

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \\ \dfrac{dz}{dt} = -\beta z + xy. \end{cases} \tag{۱-۱}$$

که در آن x، y و z متغیرهای وابسته، t متغیر مستقل و σ، ρ و β پارامترند.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -2u + u^2 v, \\ \dfrac{dv}{dt} = u - u^2 v. \end{cases} \tag{۲-۱}$$

۱-۲-۲ تعریف

بعد یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برابر با تعداد متغیرهای وابسته آن است.

در مثال (۱-۲-۱) دستگاه (۱-۱) سه بعدی است. ودستگاه (۱-۲) دو بعدی است.

۱-۲-۳ تعریف

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوییم، اگر متغیرهای وابسته در آن فقط از درجه یک باشند و جمله هایی شامل حاصل ضرب متغیرهای وابسته در آن وجود نداشته باشد.

۱-۲-٤ مثال

دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4t^2 + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x \sin t + y. \end{cases}$$

خطی است، زیرا هر جمله شامل حداکثر یک عامل درجه اول x یا yاست. در مثال (۱-۲-۱) دستگاه های (۱-۱) و (۱-۲) غیر خطی هستند.

صورت کلی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه ی اول با ضرایب ثابت عبارت است از

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1(t),\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2(t),\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n(t).
\end{aligned} \tag{۳-۱}$$

با شرایط اولیه ی

$$x_1(t_0)=\alpha_1, x_2(t_0)=\alpha_2, \ldots, x_n(t_0)=\alpha_n.$$

که در آن a_{ij} ها ضرایب دستگاه، b_i ها توابع معلوم و α_i ها اعداد داده شده هستند.

۱-۲-۵ تعریف

هرگاه همه توابع b_i در معادله ی (۱-۳) صفر باشند، دستگاه، همگن نامیده می شود. در غیر این صورت دستگاه غیر همگن می باشد.

۱-۳ صورت برداری دستگاه معادلات دیفرانسیل

هنگام کار با دستگاه های معادلات دیفرانسیل، برای سادگی می توان از نمادهای برداری استفاده کرد. این علامت گذاری منجر به نمایش مناسب جواب نیز می شود. دستگاه (۱-۳) را در نظر بگیرید. آن را به صورت برداری زیر می نویسیم

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

همراه با شرایط اولیه ی مقابل

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

در دستگاه فوق تابع ها به صورت برداری ظاهر شده اند. در این جا لازم است یادآوری کنیم که یک تابع برداری مانند H در R^n با دامنه I، تابعی است که

برای هر $t \in I$، داریم

$$H(t) = \left(h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)\right) \in R^n.$$

تابع Hرا پیوسته (یا مشتق پذیر) گوییم، اگر و تنها اگر هر مؤلفه ی آن پیوسته (و یا مشتق پذیر) باشد. پس برای تابع $H = \left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right)$، H' یا $\frac{dH}{dt}$، به صورت زیر تعریف می شود

$$H'(t) = \left(h_1'(t), h_2'(t), \ldots, h_n'(t)\right).$$

از دیدگاه هندسی، $H'(t)$ بردار مماس بر منحنی تابع Hدر نقطه $\left(h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)\right)$ در فضای R^n است.

بردارهای X، X'، X_0 و تابع برداری $B(t)$ را به صورت

$$\begin{aligned} X &= \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \\ X' &= \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right), \\ X_0 &= \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right), \\ B(t) &= \left(b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)\right). \end{aligned}$$

نمایش می دهیم. با استفاده از ماتریس A

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

دستگاه (۱-۳) را می توان به صورت برداری زیر نوشت

$$X'=AX+B(t),$$
$$X(t_0)=X_0.$$

۱-٤ تبدیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی n ام به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

یکی از دلایل اهمیت دستگاه معادلات معمولی مرتبه ی اول آن است که همواره می توان معادلات مراتب بالا را به چنین معادلاتی تبدیل کرد.

معادله ی دیفرانسیل معمولی مرتبه ی nام زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2},\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \qquad (١-٤)$$

که در آن x تابع مجهول است و f، در ناحیه $D\subset R^{n+1}$، پیوسته فرض می شود.

حال متغیرهای u_1، u_2، ...و u_n را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} u_1&=x,\\ u_2&=x',\\ u_3&=x'',\\ &\vdots\\ u_n&=x^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (١-٥)$$

از معادلات (۱-۵) مشتق می گیریم

$$
\begin{aligned}
u_1' &= x', \\
u_2' &= x'', \\
&\vdots \\
u_n' &= x^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{۱-۶}
$$

می توان سمت راست $n-1$ معادله ی نخست (۱-۶) را با u_i های نظیر در (۱-۵) جانشین کرد.

$$
\begin{aligned}
u_1' &= u_2, \\
u_2' &= u_3, \\
&\vdots \\
u_n' &= f\left(t, u_1, u_2, \ldots, u_n\right).
\end{aligned}
\tag{۱-۷}
$$

حاصل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول است.

اینک، دستگاه (۱-۷) را در نظر می گیریم و قرار می دهیم $x = u_1$. بنا براین خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
x' &= u_2, \\
x'' &= u_3, \\
&\vdots \\
x^{(n-1)} &= u_n, \\
x^{(n)} &= f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right).
\end{aligned}
$$

که آخرین تساوی از رابطه ی فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ی n می باشد.

همچنین اگر معادله ی (۱-٤) دارای شرایط اولیه ای به صورت

$$x\left(t_0\right) = \alpha_1, x'\left(t_0\right) = \alpha_2, \ \ldots, \ x^{(n-1)}\left(t_0\right) = \alpha_n.$$

باشد، شرایط اولیه ی متناظر برای دستگاه (۱-۷) به صورت زیر خواهد بود

$$u_1\left(t_0\right) = \alpha_1, u_2\left(t_0\right) = \alpha_2, \ \ldots, \ u_n\left(t_0\right) = \alpha_n.$$

در واقع با آن چه که بیان شد، لم زیر را ثابت کردیم

لم : معادله ی دیفرانسیل معمولی مرتبه ی nام (۱-٤) و دستگاه معادلات مرتبه ی اول (۱-۷) هم ارز هستند. به این مفهوم که برای هر پاسخ x معادله ی (۱-٤)، u_i هایی در (۱-۷) صدق می کنند که به کمک (۱-٥) تعریف شده اند و برعکس، برای هر پاسخ $\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ از (۱-۷)، $x=u_1$ در (۱-٤) صدق می کند.

۱-٤-۱ مثال

معادله ی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$x''+0.125x'+x=0.$$

با تغییر متغیرهای $u_1=x$ و $u_2=x'$ به دستگاه دو بعدی زیر می رسیم

$$\begin{cases} u_1'=u_2, \\ u_2'=-u_1-0.125u_2. \end{cases}$$

۱-٥ معرفی روش تجزیه ی آدومین

روش تجزیه ی آدومین، توسط جورج آدومین [1] در سال ۱۹٦۱ برای حل معادلات تابعی پیشنهاد و در اوایل دهه هشتاد به طور رسمی ارائه شد. این روش یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات تابعی است و در حقیقت یک روش سری می باشد که.معادلات زیادی از قبیل معادلات دیفرانسیل معمولی، جزئی، خطی یا غیر خطی و... را با دقت قابل توجهی حل می کند. ما در این قسمت به توضیح ساختار روش تجزیه ی آدومین می پردازیم.

۱-٥-۱ ساختار کلی روش تجزیه ی آدومین

معادله ی تابعی

$$A\left(u\left(t\right)\right)=g\left(t\right). \tag{۱-۸}$$

[1] George Adomian

را در نظر می گیریم، که در آن A یک عملگر تابعی از فضای باناخ V به توی V است و $g(t)$ یک تابع معلوم در فضای V است. به منظور یافتن جوابی از معادله (۱-۸) در فضای V، فرض کنید که عملگر A قابل تجزیه به دو بخش خطی B و غیرخطی N باشد یعنی

$$A = B + N.$$

همچنین می توان قسمت خطی B را به صورت $I + R$ تجزیه کرد، که در آن I یک عملگر وارون پذیر و R قسمت باقیمانده عملگر خطی است. بنا براین عملگر A را می توان به صورت زیر نوشت

$$A = I + R + N.$$

در نتیجه معادله ی (۱-۸) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$I(u) + R(u) + N(u) = g(t).$$

بنابراین

$$I(u) = g(t) - R(u) - N(u). \qquad (۱-۹)$$

حال با، اعمال عملگر I^{-1}، وارون عملگر I، بر دو طرف رابطه ی (۱-۹) خواهیم داشت

$$u = I^{-1}g - I^{-1}R(u) - I^{-1}N(u).$$

قرار می دهیم $L = I^{-1}R$ که L یک عملگر خطی است. بنابراین داریم

$$u = I^{-1}g - L(u) - I^{-1}N(u). \qquad (۱-۱۰)$$

به رابطه ی (۱-۱۰) صورت کانونی معادله گوییم.

در روش تجزیه ی آدومین، u به صورت مجموع سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و $N(u)$ به صورت سری $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ در نظر گرفته می شود. که در آن A_n ها چند جمله ایهایی بر حسب u_0، u_1،...و u_n هستند و به آن ها چند جمله ایهای آدومین می گویند.