١١٨٤٢٢

دانشکده فیزیک

گروه فیزیک نظری و اخترفیزیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک-گرایش فیزیک نظری

عنوان

مطالعه طیف انواع جبرهای نیم‌ساده جابجاپذیر با استفاده ازجبر ینگ- بکستر و رویکرد Bethe-Ansatz

اساتید راهنما

دکتر محمدعلی جعفریزاده

دکتر سیدکمال‌الدین سیدیعقوبی

استاد مشاور

دکتر رحیمه صوفیانی

پژوهشگر

احسان براتی

۱۳۸۸/۷/۱۸

پژوهشگاه اطلاعات و مدارک علمی ایران
مرکز مدارک

شهریور ۱۳۸۸

۱۱۸۳۶۶

سپاس

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستیم بخشید و به طریق دانش رهنمونم کرد.

بر خود لازم می دانم مراتب سپاس خود را از استاد راهنمای اولم جناب پرفسور محمد علی جعفرنژاده ابراز نمایم. بی شک بدون ایشان جمع آوری این پایان نامه غیر ممکن بود. اراده راسخ، پشتکار و پیگیری مداوم ایشان همواره امید بخش رسیدن به هدف در این مدت بود.

از استاد راهنمای دوم جناب آقای دکتر سید کمال الدین سید یعقوبی صمیمانه تشکر می کنم. یقینا راهنمایی ها و تجربیات ایشان در آینده من بی تاثیر نخواهد بود.

از زحمات استاد مشاورم سرکار خانم دکتر رحیمه صوفیانی قدردانی می کنم. کسیکه با صبر و تحمل خود همواره در ادامه راه یاریگر من بودند.

از جناب آقای دکتر مهدی رضایی کرامتی به خاطر پذیرفتن داوری پایان نامه و همچنین حمایت های بی دریغشان سپاسگزارم.

همچنین از دوست خوبم آقای سید فرید تقوی تشکر می کنم که در این مدت بعنوان یک دوست و همکار، همراه من بودند. از تمامی دوستانم نیز که هر کدام در این مدت به من کمک کردند و بهترین خاطرات زندگیم را رقم زدند، تشکر می کنم.

و در پایان از پدر و مادر فداکار و خانواده عزیزم که همواره مرا حمایت کرده اند صمیمانه تشکر می کنم.

نام خانوادگی دانشجو: **براتی** نام: **احسان**

عنوان پایان نامه: **مطالعه طیف انواع جبرهای نیم ساده جابجاپذیر با استفاده ازجبر ینگ- بکستر و رویکرد** Bethe-Ansatz

اساتید راهنما: **دکتر محمد علی جعفریزاده- دکتر سیدکمال الدین سیدیعقوبی**
استاد مشاور: **دکتر رحیمه صوفیانی**

مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته: **فیزیک** گرایش: **فیزیک نظری**
دانشگاه: **تبریز** دانشکده: **فیزیک** تاریخ فارغ التحصیلی: ۸۸/۷ تعداد صفحات: ۹۶

کلید واژه ها: مدل های انتگرال پذیر، مدل های اسپینی، جبر ینگ- بکستر، رویکرد بتانزاتز، جبرهای جابجا پذیر

چکیده:

در این پروژه ابتدا جبر ینگ- بکستر و رویکرد بتانزاتز و نقش آنها در حل انواع مدل های حل پذیر فیزیک آماری از جمله مدل های اسپینی مورد مطالعه قرار می گیرند. از حل جبر ینگ- بکستر یک سری ماتریس های همزمان قطری پذیر بدست می آید که این ماتریس ها مولد های یک جبر جابجا پذیر را تشکیل می دهند. بنابراین از طریق مطالعه انواع مدل های حل پذیر انواع جبرهای جابجاپذیر معروف ریاضی را بدست آورده و طیف این جبر ها را توسط رهیافت بتانزاتز تعیین می کنیم. جبرهای جابجاپذیر و طیف آنها در شاخه های مختلف فیزیک از جمله فیزیک ماده چگال و مدل های پیمایش کاتوره ای کلاسیکی و کوانتومی و نیز انتقال حالات کوانتومی روی شبکه های اسپینی که در شاخه محاسبات و اطلاعات کوانتومی مطرح است کاربرد دارند.

فهرست مطالب **صفحه**

مقدمه..... ۱

فصل اول: بررسی منابع

مدل های انتگرال پذیر..... ۳

فصل دوم: مبانی و روشها

۲-۱ جبر ینگ- بکستر..... ۹

۲-۲ رویکرد بت ۱٤

۲-۳ مدل اسپینی هایزنبرگ..... ۲٤

۲-۳-۱ تعمیم به جبر SU(3) ۳۰

۲- ٤ لایه بندی در گراف و روش توزیع طیفی..... ۳٦

۲-۵ مدل گاودین..... ۳۹

۲-٦ مدل هوبارد..... ٤۸

۲-۷ مدل کالوگرو- ساترلند..... ۵۸

فصل سوم: بحث و نتیجه گیری

۳-۱-۱ جبرهای بدست آمده از مدل اسپینی هایزنبرگ در حالت تک ذره ای..... ٦۳

۳-۱-۲ جبرهای بدست آمده از مدل اسپینی هایزنبرگ در حالت دو ذره ای..... ٦۸

۳-۱-۳ طیف مدل اسپینی هایزنبرگ با استفاده از رهیافت بت..... ۷۲

۲-۳ جبرهای بدست آمده از مدل گاودین..... ۷٤

۳-۳ انتقال حالت کوانتومی بر روی زنجیره اسپینی در مدل هوبارد..... ۷٦

٤-۳ انتقال حالت کوانتومی در شبکه‌های اسپینی..... ۸۳

واژه نامه..... ۹۰

مراجع..... ۹۱

مقدمه

بخش عظیمی از علوم طبیعی بر مبنای نظریاتی است که همگی شالوده ذهن بشری است. در این میان علم فیزیک نیز از این اصل مستثنی نیست. حتی بخشی از فیزیک نیز که از مشاهدات حاصل شده است بعدها به صورت نظریاتی که توسط مشاهده تایید می شود به ثبت رسیده اند. از این رو اهمیت و جایگاه فیزیک و بخصوص فیزیک نظری در بین علوم طبیعی به خوبی مشخص می شود. جستجو برای یافتن نظریه ای که عمومیت بیشتری نسبت به نظریه های قبلی داشته باشد و پدیده های بیشتری را توجیه کند در تمام علوم به چشم می خورد. پیدایش فیزیک کوانتومی دریچه جدیدی را به روی فیزیکدانان گشود. نظریه کوانتومی در فیزیک و شیمی نه تنها پدیده های مشاهده شده را به خوبی توجیه می کند بلکه نظریات کلاسیک قبلی را نیز پوشش می دهد. بنابراین رسیدن به درک صحیحی از پدیده های کوانتومی که همگی توسط مدلهایی کوانتومی مطرح می شوند از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

نظریات فیزیکی همگی به زبان ریاضیات بیان می شوند و هرچه یک نظریهٔ فیزیکی مبنای ریاضی محکم تر و اصولی تری داشته باشد، بالطبع در توصیف پدیده فیزیکی مورد نظر قدرتمند تر خواهد بود. در مکانیک کوانتومی سیستم فیزیکی توسط هامیلتونینی بیان می شود که خصوصیات سیستم از جمله برهمکنش های بین ذرات موجود در سیستم و انرژی سیستم را بیان می کند. به همین دلیل بررسی هامیلتونین سیستم در مسائل فیزیکی جایگاه ویژه ای دارد. در اکثر مسائلی که در آنها هامیلتونین سیستم مطرح است یافتن طیف انرژی سیستم ضروری به نظر می رسد، چرا که با داشتن ویژه مقادیر و ویژه حالات یک سیستم می توان به بسیاری از خصوصیات سیستم دست یافت. تمامی مدل های انتگرال پذیر نیز به نوعی به هامیلتونین سیستم در ارتباط هستند. به همین دلیل اهمیت

بررسی مدلهای انتگرال پذیر مشخص می شود. مدلهای انتگرال پـذیر ممکـن اسـت از نـوع کلاسـیک باشند، مانند مدل آیزینگ، و یا کوانتومی باشند. همچنین ممکن است این مدلها از نوع معین یا نا معـین باشند. در هر صورت علاوه بر یافتن طیف هامیلتونین، این مدلها کاربردهای دیگـری نیـز دارنـد ماننـد انتقال حالات کوانتومی بر روی شبکه‌های متناظر با این مدل‌ها در برخـی شـبکه‌هـای اسـپینی، کـه در ادامه به برخی از آنها اشاره خواهد شد. در این پروژه هدف بررسی برخی مدلهای انتگرال پـذیر معـین کوانتومی است که حتی المقدور در حالت تک ذره ای باقی بمانند، یعنی در اولین حالـت برانگیختگـی قرار داشته باشند. هر کدام از این مدلها درنهایت به یک سری کمیات پایـسته منجـر مـی شـود کـه بـا یکدیگر تشکیل جبر جابجایی می دهند و هامیلتونین سیستم نیز بر حسب این کمیات نوشته می شـود. لذا با داشتن یک سری عملگرهای جابجا پذیر می توان ویژه مقادیر و ویـژه حالتهـای همزمـان آنهـا را بدست آورد و به طیف هامیلتونین سیستم دست یافت. در این پایاننامه، انتگرال پذیری و حـل پـذیری معادلند و به یک مفهوم بکار رفته اند.

فصل اول

مدل های انتگرال پذیر

تعاریف متعددی برای یک مدل انتگرال پذیر در مراجع مختلف آمده است[۱]. به عنوان مثال بر اساس تعریف لیوویل[1] اگر هامیلتونین سیستم توسط معادلات زیر داده شود.

$$H = H[p(x;t), q(x,t)] \qquad (۱-۱)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = \frac{-\partial H}{\partial q} \qquad (۱-۲)$$

می توان تبدیلی مانند $(P(x,t), q(x,t)) \to (a(\lambda), b(\lambda,t))$ یافت به طوری که هامیلتونین جدید فقط به متغیر عمل بستگی داشته باشد یعنی $H = H[a(\lambda)]$. در این صورت سیستم انتگرال پذیر گفته می شود و بنابراین معادلات $\dot{b} = \frac{\partial H}{\partial a} = w$ و $\dot{a} = \frac{\partial H}{\partial b} = 0$ حل خواهند شد که در این معادلات $a(\lambda)$ به عنوان مولد یکسری کمیات پایسته شناخته می شود و در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\ln\left(a(\lambda)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \lambda^j \qquad (۱-۳)$$

که در آن C_jها ضرایب ثابتی هستند.

تعداد ضرایب ثابت در هر سیستم با تعداد درجات آزادی سیستم در ارتباط است. به عنوان مثال در مدل های انتگرال پذیر میدانی که درجه آزادی نامعین دارند تعداد این ضرایب نامعین است و در مورد سیستمهایی با تعداد معین از ذرات (تعداد معین درجات آزادی) فقط تعداد معینی کمیت مستقل پایسته وجود خواهد داشت. در حالت کلی در مکانیک کلاسیک به سیستمی با n درجه آزادی انتگرال پذیر گفته می شود اگر سیستم دارای n انتگرال حرکت مستقل از هم باشد که رابطه پواسون آنها با هم

1-Liouville

و با هامیلتونین سیستم صفر شود. ولی در مکانیک کوانتومی با فضای نمایش سروکار داریم. در این مورد متغیرهای دینامیکی X_i^α تعریف می شوند. سیستم انتگرال پذیر است هرگاه این متغیرها با هم رابطه جابجایی داشته باشند یعنی به ازای $i \neq j$ داشته باشیم: $\left[X_i^\alpha, X_j^\beta\right] = 0$، یا به عبارت دیگر تشکیل جبر بدهند. لازم به ذکر است که صرفا وجود یک سری کمیات مستقل پایسته دال بر انتگرال پذیری سیستم نیست بلکه این کمیات باید با یکدیگر رابطه جابجایی نیز داشته باشند. در ادامه خواهیم دید که وجود این رابطه جابجایی در مدلهایی کوانتومی توسط معادله ای معروف به معادله ینگ-بکستر[1] تضمین می شود. پیشرفت های اساسی نظریه انتگرال پذیری در دهه های ۷۰ و ۸۰ میلادی و با توجه به اصول و کاربردهای روش پراکندگی معکوس بدست آمده است[۲]. یک مسئله پراکندگی توسط یک معادله خطی بیان می شود. یکی از کمیاتی که در این معادله ظاهر می شود عملگر لاکس[2] نامیده می شود که این عملگر در هر یک از مدل های انتگرال پذیر نیز ظاهر می شود. با توجه به تعریف لیوویل از انتگرال پذیری در مورد مسائل پراکندگی نیز پارامترهای $b(\lambda,t), a(\lambda)$ وجود دارند که در این مورد $a(\lambda)$ با ضریب انتقال و $b(\lambda,t)$ با ضریب بازتابش در فرایند پراکندگی در ارتباط هستند. بدین ترتیب با فرمولبندی روش پراکندگی معکوس، نوتاسیون انتگرال پذیری به حوزه کوانتومی نیز راه پیدا کرد[۳و۲و۱].

مدلهای انتگرال پذیر فراوانی در فیزیک وجود دارد که در زیر به برخی از آنها اشاره می کنیم.

الف) مدل‌های میدانی[3]: از این مدل ها می توان به مدل سین-گورون[4] [٦]، مدل مشتق شده از شرودینگر غیر خطی[5] [۷]، مدل لیوویل [۸]، مدل جرمی تیرینگ[6] [۱۰و۹] اشاره کرد.

1-Yang-Baxter
2- Lax operator
3-Field models
4-Sine-Gordon
5-DNLS
6-Massive Thirring model

ب) مدل های شبکه‌ای[1] : از این مدل ها می توان موارد زیر را نام برد:

مدل زنجیره اسپینی[2] ناهمگن(XXZ) که با مدل شش راسی[3] در ارتباط است و هامیلتونین آن بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{H} = J\sum_{n}^{N}(\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + \cos\eta\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3) \qquad (۱-٤)$$

که در آن σ^i ماتریس های پائولی و J و η پارامترهایی مربوط به کوپلاژ ذرات هستند. مدل شبکه ای سین- گوردون [۱۱] ، مدل نوسانگر- q [۱۲] ، مدل شبکه ای لیوویل [۱۳] ، مدل زنجیره تودای نسبیتی[۱٤]، مدل زنجیره اسپینی همگن [۱۵]، مدل گاودین[4] که حالت حدی مدل زنجیره اسپینی است و هامیلتونین آن در حالت خاص که در اینجا بررسی می شود، بصورت زیر است[۱٦]:

$$H_i = \sum_{i\neq j}^{N}\frac{S_i.S_j}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \qquad (۱-۵)$$

که در آن ε_iها پارامتر آزاد و S_iها اسپین مربوط به ذره iام است. مدل کالوگرو- سادرلند[5] [۱۷] که برهمکنش ذرات با پتانسیل بلندبرد در یک حلقه زنجیره اسپینی را بررسی می کند. مدل هوبارد[6] که رفتار تقریبی الکترونها در یک جامد در دماهای پایین نزدیک به دمای ابررسانایی را بررسی می کند.

از نظر تاریخی پیدایش سیستم های کوانتومی حل پذیر بس ذره ای به سالهای شروع نظریه کوانتومی برمی گردد. بت[7] در سال ۱۹۳۱ در بررسی یک زنجیره اسپینی هایزنبرگی توابع موجی بس ذره ای را پایه گذاری کرد و محاسبه طیف هامیلتونین را به حل مجموعه ای از معادلات جبری کوپل

1-Spin chain
2-Six-vertex
3-Gaudin model
4-Calogero-Sutherland
5-Hubbard model
6-Bethe
7-Lattice models

شده (معادلات بت[1]) تبدیل کرد[۱۸]. بدین ترتیب مسئله توابع موجی توانی به حل معادلات چندجمله ای تبدیل شد. کارهای بت توجیهی برای خواص حالت پایه انرژی و برانگیختکی ها در مدل فرومغناطیس هایزنبرگی ارائه کرد و از آن به بعد بعنوان منبعی برای کارهای فیزیک نظری و ریاضی فیزیک مورد توجه قرار گرفت. بعدها در سال ۱۹٤٤ اونزاگار[2] حلی برای مدل آیزینگ دو بعدی ارائه کرد[۳] که بر اساس جبرهای متقارن با بعد نامعین(جبر اونزاگار) و رهیافت ماتریس انتقال بود و تاثیر بسزایی بر گذر فاز در مدل های میکروسکوپیک گذاشت. کاربردهای جدیدی از روش بت در دهه ٦۰ میلادی با کارهای لیب[3] و لینیگر[4] در مورد برهمکنش های گاز فوتونی ارائه شد. گسترش روش بت به مسائل مکانیک آماری با توجه به کارهای لیب و ساترلند[5] در مورد مدل شش راسی صورت گرفت[٥و٤]. تعمیم روش بت به مسائلی با درجات آزادی داخلی(مانند اسپین) توسط س. ن. ینگ[6] و گاودین[7] صورت گرفت[۲۰و۱۹] که به حدس تودرتوی بت[8] معروف شد. در سال ۱۹٦۹ س. ن. ینگ و س. پ. ینگ نشان دادند که می توان از روش بت در بررسی گاز بوزونی با تابع دلتا گونه از نظر دمایی، استفاده کرد[۲۱] و بدین ترتیب روش بت در حد ترمودینامیکی نیز کاربرد پیدا کرد. از سوی دیگر بکستر در بررسی مدل راسی به شرایطی دست یافت که با معادله ینگ- بکستر که پیشتر توسط ینگ در بررسی حدس تودرتوی بت بدست آمده بود، یکسان بود. در نهایت نقش معادله ینگ- بکستر در ساختار مدل های انتگرال پذیر توسط گروه فادیف[9]، اسکلیانین[10] و تختجان[11] بررسی شد. تلاش آنها در ارائه حلی برای معادله ینگ- بکستر به روش پراکندگی معکوس منجر شد[۲۲] که اساس آن

1-Bethe Ansatz
2-Onsagar
3-Lieb
4-Liniger
5-Sutherland
6-C. N. Yang
7-Gaudin
8-Nested Bethe Ansatz
9-Fadeev
10-Sklyanin
11-Takhtajan

پایه گذاری ویژه حالات ماتریس پراکندگی به روش جبری است. انواع مختلف مدل های حل پذیر هر کدام بعدها توسط افراد مختلف مورد بررسی قرار گرفت که در بررسی هر مدل جداگانه بیان خواهد شد.

در این پایاننامه برخی مدل های حل پذیر فیزیک آماری مانند مدل اسپینی هایزنبرگ، مدل هوبارد، مدل گاودین و مدل کالوگرو- ساترلند و ساختار جبری حاکم برآنها مورد بررسی قرار می گیرد. نشان داده خواهد شد که تمامی این مدل ها از جبر معروف ینگ- بکستر پیروی می کنند و اصولا وجود جبر ینگ- بکستر در یک مدل حل پذیری مدل را تضمین می کند. به عبارت دیگر این جبر به عنوان مولد مجموعه ای از عملگرها به کار می رود که دوبدو با هم رابطه جابجایی دارند. این عملگرها به عنوان انتگرال های حرکت سیستم در نظر گرفته می شوند. همچنین در اکثر مدل ها هدف بررسی نوع $SU(2)$ مدل ها می باشد هرچند در برخی ها مانند مدل هوبارد به نوع $SU(3)$ و سپس به $SU(N)$ تعمیم داده می شود. مدل های انتگرال پذیر در شاخه های مختلف فیزیک کاربرد دارند که بیان همه آنها در اینجا امکان پذیر نمی باشد ولی به جرات می توان گفت که در اکثر گرایش های فیزیک رد پایی از این مدل ها به چشم می خورد. به عنوان مثال می توان به موارد زیر اشاره کرد:

کاربرد مدل اسپینی هایزنبرگ در انتقال حالات کوانتومی در بحث انتقال اطلاعات کوانتومی [۲۳]، فرایندهای غیر تعادلی مانند فرایندهای واکنشی- پخشی[1] با استفاده از مفهوم تابع همبستگی در بحث نفوذ و جابجایی ذرات در شبکه های اسپینی[۲۵و۲٤]. و یا کاربرد مدل گاودین در بحث برهمکنش مواد باردار بوسیله تابش الکترومغناطیسی [۲٦]، فیزیک هسته ای در پدیده جفت شدگی[2] [۲۷] و اپتیک کوانتومی [۲۸]. همچنین می توان به کاربرد های انواع مدل های انتگرال پذیر کوانتومی

1-Reaction-diffusion process
2-Pairring

دیگر در مباحثی مانند فیزیک ماده چگال، فیزیک آماری، نظریه ریسمان و سیاه چاله ها اشاره کرد. با توجه به کاربرد های ذکر شده لزوم طرح چنین پروژه ای روشن می شود.

فصل دوم

۲-۱ جبر ینگ- بکستر

معادله معروف ینگ- بکستر نخستین بار توسط ینگ[1] در مسائل مربوط به پراکندگی ذرات با برهم کنشی بصورت تابع دلتا (δ) در یک بعد نوشته شد و بعدها بکستر[2] آنرا به مسائل چند بعدی تعمیم داد[۲۹]. برای معادله ینگ- بکستر دو نوع کلاسیکی و کوانتومی وجود دارد[۳۰] که ما نوع کوانتومی آنرا بررسی می کنیم. برای شروع عملگر لاکس[3] را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$L_{n,a}(\lambda)=\lambda \mathrm{I}_n \otimes \mathrm{I}_a + i\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} S_n^{\alpha}\otimes\sigma_a^{\alpha}=\begin{pmatrix}\lambda+iS_n^3 & iS_n^-\\ iS_n^+ & \lambda-iS_n^3\end{pmatrix} \qquad (۲-۱)$$

که در آن λ پارامتری موسوم به پارامتر طیفی است. S_n^{α} و I_n به ترتیب عملگر و ماتریس واحد در فضای هیلبرت h_n هستند. σ_a^{α} و I_a نیز به ترتیب ماتریسهای پائولی و عملگر واحد در فضای کمکی V هستند. V یک فضای کمکی است که بصورت ضرب تانسوری به فضای هیلبرت اضافه می شود. برای تعریف عملگر لاکس به چنین فضای کمکی نیاز داریم که h_nها فضاهای مختلط دوبعدی هستند$(h_n = C^2)$، فضای هیلبرت مسئله بصورت حاصلضرب تانسوری زیر تعریف می شود.

$$H=\prod_{n=1}^{N} h_n \qquad (۲-۲)$$

که در آن $h_n = C^2$ فضای هیلبرت هر ذره است. عملگر p_{ij} به نام عملگر جایگشت را تعریف می کنیم که جای دو ذرهٔ iام و jام را عوض می کند. نشان داده می شود که عملگر جایگشت را می توان برحسب ماتریس های پائولی نوشت.

1-Yang
2-Baxter
3-Lax

$$\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&&&-1\\&&1&\\&1&&\\-1&&&\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix}\right] \qquad (۲-۳)$$

$$=\begin{pmatrix}2&&&\\&0&2&\\&2&0&\\&&&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=2p_{ij}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_{ij}=\frac{1}{2}\left(I_i\otimes I_j+\sum_{\alpha=1}^{j}\sigma_i^\alpha\otimes\sigma_j^\alpha\right) \qquad (۲-٤)$$

با توجه به این رابطه می توان عملگر لاکس را برحسب P_{ij} نوشت.

$$\sum_{\alpha=1}^{j}\sigma_i^\alpha\otimes\sigma_j^\alpha=2p_{ij}-I_i\otimes I_j \qquad (۲-۵)$$

$$L_{n,a}(\lambda)=\lambda I_n\otimes I_a+\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{j}\sigma_n^\alpha\otimes\sigma_a^\alpha=\lambda I_n\otimes I_a+\frac{i}{2}(2p_{na}-I_n\otimes I_a)$$
$$=\left(\lambda-\frac{i}{2}\right)I_{n,a}+ip_{n,a} \qquad (۲-٦)$$

ماتریسی به نام مداری[1] بصورت حاصلضرب عملگرهای لاکس مربوط به ذرات مختلف بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$T_{Na}(\lambda)=L_{Na}(\lambda)...L_{ia}(\lambda) \qquad (۲-۷)$$

برای $N=2$ نشان می دهیم که ماتریس مداری در رابطه اساسی زیر صدق می کند. تعمیم به حالت کلی بطور مشابه صورت می گیرد.

$$R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)T_{n_1a_1}(\mu)T_{n_1a_2}(\mu)=T_{n_1a_2}(\mu)T_{n_1a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu) \qquad (۲-۸)$$

1-Monodromy

$$
\begin{aligned}
LHS &= R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)L_{2a_1}(\lambda)L_{1a_1}(\lambda)L_{2a_2}(\mu)L_{1a_2}(\mu)\\
&= R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)L_{2a_1}(\lambda)L_{2a_2}(\mu)L_{1a_1}(\lambda)L_{1a_2}(\mu)\\
&= L_{2a_2}(\mu)L_{2a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)L_{1a_1}(\lambda)L_{1a_2}(\mu)\\
&= L_{2a_2}(\mu)L_{2a_1}(\lambda)L_{1a_2}(\mu)L_{1a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)\\
&= L_{2a_2}(\mu)L_{1a_2}(\mu)L_{2a_1}(\lambda)L_{1a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu) = RHS
\end{aligned}
\qquad (۲-۹)
$$

که در آن از این خاصیت که عملگرهای مربوط به فضاهای مختلف با هم جابجا می شوند، استفاده شده است. از طرفی $T(\lambda)$ را می توان بصورت یک ماتریس 2×2 در فضای کمکی V که با اندیس a مشخص شده است، درنظر گرفت. مؤلفه های این ماتریس خود عملگرهایی در فضای هیلبرت هستند.

$$
T_{N\alpha}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (۲-۱۰)
$$

لازم به ذکر است که عملگرهای لاکس مربوط به ذرات مختلف، خود باهم جابجا می شوند و در معادلهٔ ینگ- بکستر بصورت زیر صدق می کنند.

$$
R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)L_{n_1a_1}(\mu)L_{n_1a_2}(\mu) = L_{n_1a_2}(\mu)L_{n_1a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu) \qquad (۲-۱۱)
$$

که در آن $R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu)$، r-ماتریس[1] نام دارد و بصورت زیر بر حسب عملگر جایگشت نوشته می شود:

$$
R_{a_1,a_2}(\lambda) = \lambda I_{a_1,a_2} + iP_{a_1,a_2} = \begin{pmatrix} a(\lambda) & & & \\ & b(\lambda) & c(\lambda) & \\ & c(\lambda) & b(\lambda) & \\ & & & a(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (۲-۱۲)
$$

که در آن $a=\lambda+i, b=\lambda, c=i$ و شکل ماتریسی $T_{a_1}(\lambda), T_{a_2}(\lambda)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$
T_{a_1}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 & B(\lambda) & 0 \\ 0 & A(\lambda) & 0 & B(\lambda) \\ C(\lambda) & 0 & D(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) & 0 & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad T_{a_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) & 0 & 0 \\ C(\lambda) & D(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(\lambda) & B(\lambda) \\ 0 & 0 & C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (۲-۱۳)
$$

1-R-matrix

همچنین ماتریس مداری نیز در معادله ینگ- بکستر صدق می کند که با توجه به شکل ماتریسی عملگرها می توان درستی این رابطه را تحقیق کرد.

$$R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu)T_{a_1}(\mu)T_{a_2}(\mu)=T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu) \qquad (۲-۱٤)$$

که برای دو سایت این معادله به همان معادله ینگ- بکستر برای عملگر لاکس تبدیل می شود. کمیت $F(\lambda)$را بصورت رد[1] ماتریس مداری تعریف می کنیم که بعنوان مولد جبرهای حاصل شناخته می شود.

$$F(\lambda)=trT(\lambda)=A_N(\lambda)+D_N(\lambda) \qquad (۲-۱۵)$$

که در مورد آن رابطهٔ جابجائی زیر برقرار است.

$$[F(\lambda),F(\mu)]=0 \qquad (۲-۱٦)$$

برای اثبات رابطه جابجایی مولدها طرفین رابطه (۲-۱٤) را در معکوس R-ماتریس یعنی $R^{-1}_{a_1a_2}(\lambda-\mu)$ ضرب می کنیم خواهیم داشت:

$$T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu)=R^{-1}_{a_1a_2}(\lambda-\mu)T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu) \qquad (۲-۱۷)$$

با رد گیری از طرفین رابطه (۲-۱۷) و استفاده از خاصیت ناوردایی رد تحت جایگشت داریم:

$$\begin{aligned}
&tr_{a_1a_2}[T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu)]=tr_{a_1a_2}[R^{-1}_{a_1a_2}(\lambda-\mu)T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)]\\
&=tr_{a_1a_2}[T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu)]=tr_{a_1a_2}[R_{a_1a_2}(\lambda-\mu)R^{-1}_{a_1a_2}(\lambda-\mu)T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)]\\
&=tr_{a_1a_2}[T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu)]=tr_{a_1a_2}[T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)]\\
&=tr_{a_1a_2}[T_{a_1}(\lambda)]tr_{a_1a_2}[T_{a_2}(\lambda)]=tr_{a_1a_2}[T_{a_2}(\mu)]tr_{a_1a_2}[T_{a_1}(\lambda)]\\
&\Rightarrow F(\lambda)F(\mu)=F(\mu)F(\lambda)
\end{aligned} \qquad (۲-۱۸)$$

که به رابطه جابجایی (۲-۱٦) منجر می شود. این معادله خود حل پذیری مدل را تضمین می کند چرا که این رابطه جابجایی خود به تشکیل یک جبر منجر می شود.

با بسط $F(\lambda)$ها نسبت به λ حول $\lambda=\frac{i}{2}$ خواهیم داشت:

1-Trace

$$
\begin{aligned}
&T_{Na}(\lambda)=[(\lambda-\frac{i}{2})1+iP_{N-1,a}][(\lambda-\frac{i}{2})1+iP_{N-2,a}]\cdots[(\lambda-\frac{i}{2})1+iP_{1a}]\\
&=(\lambda-\frac{i}{2})^N 1+i(\lambda-\frac{i}{2})^{N-1}(P_{Na}+P_{N-1,a}+\cdots+P_{1a})+\\
&\cdots+i^2(\lambda-\frac{i}{2})^{N-2}(P_{Na}P_{N-1,a}+\cdots+P_{Na}P_{1a}+\cdots+P_{2a}P_{1a})\\
&+i^N(P_{Na}P_{N-1,a}\cdots P_{1a})
\end{aligned}
\qquad (۲-۱۹)
$$

و برای یافتن مولد ها از رابطه (۱۹-۲) در فضای کمکی a رد می گیریم که به رابطه زیر منجر می شود:

$$
\begin{aligned}
&F(\lambda)=Tr_a(T_{Na}(\lambda))=(\lambda-\frac{i}{2})^N+i(\lambda-\frac{i}{2})^{N-1}(P_{N,N-1}+P_{N,N-2}+\cdots+P_{21})\\
&+i^2(\lambda-\frac{i}{2})^{N-2}(P_{N,N-1}P_{N-1,N-2}+\cdots+P_{32}P_{21})\\
&+\cdots+i^N(P_{N,N-1}P_{N-1,N-2}\cdots P_{32}P_{21})\\
&=(\lambda-\frac{i}{2})^N+i(\lambda-\frac{i}{2})^{N-1}(A_{N-1})\\
&+i^2(\lambda-\frac{i}{2})^{N-2}(A_{N-2})\\
&+\cdots+i^N(A_0)
\end{aligned}
\qquad (۲-۲۰)
$$

بعنوان مثال با جایگذاری $N=3$ در رابطه (۲۰-۲) اعضای جبر برای سه ذره بصورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&A_0=I\\
&A_1=P_{12}P_{23}\\
&A_2=P_{12}+P_{12}+P_{23}
\end{aligned}
\qquad (۲-۲۱)
$$

که در آن I ماتریس واحد است که عضو بدیهی هر جبری است. در نهایت می توان بطور خلاصه به رابطه زیر برای مولدها رسید:

$$
F(\lambda)=2\lambda^N+\sum_{l=0}^{N-2}Q_l\lambda^l \qquad (۲-۲۲)
$$

در فصل سوم برخی جبرهای حاصل از مدل اسپینی هایزنبرگ آورده شده اند.

هامیلتونین سیستم نیز بصورت زیر بر حسب این عملگرها نوشته می شود.

$$
H=\frac{J}{2}\left(i\frac{d}{d\lambda}\ln F(\lambda)\Big|_{\lambda=\frac{i}{2}}-NI^{\otimes N}\right) \qquad (۲-۲۳)
$$

از آنجا که $F(\lambda)$ها با هم جابجا شوند ضرایب بسط یعنی Q_iها نیز باید با هم جابجا شوند. ضرایب بسط $(N-1)$ عملگر هستند که باهم رابطه جابجائی دارند و به عبارت دیگر تشکیل جبر می دهند. از آنجا که هامیلتونین سیستم تحت بررسی نیز به این خانواده از عملگرها تعلق دارد لذا می توان با قطری کردن ماتریس مربوط به این عملگرها به طیف هامیلتونین سیستم دست یافت. برای توضیح بیشتر در این مورد به[۳۱] مراجعه شود.

۲-۲ رویکرد بت[1]

حدس بت: یکی از روش های حل مدل های انتگرال پذیر حدس بت است[۳۱]. بت نخستین بار این روش را برای حل یک مدل همگن هایزنبرگی به کار برد و چون هایزنبرگ و دیراک به چنین برهمکنشی بین ذرات پی بردند به مدل هایزنبرگی معروف شده است. این مدل برهمکنش بین ذرات در یک شبکه اسپینی را بررسی می کند. منظور از حل مدل به دست آوردن طیف انرژی سیستم یعنی ویژه مقادیر و ویژه حالات هامیلتونین سیستم می باشد. بت برای نخستین بار این روش را برای حل یک مدل همگن هایزنبرگی به کار برد. یعنی برای آرایه ای خطی از الکترون ها که بر هم کنش آنها ثابت و به صورت نزدیکترین همسایه است. این روش رهیافتی برای حل معادله ویژه مقداری هامیلتونین سیستم ارائه می دهد بدین صورت که با استفاده از نوتاسیون پیشنهادی برای ضرایب ظاهر شده در ویژه حالات سیستم در نهایت به معادله ای معروف به معادله بت می رسد که از حل آن طیف انرژی سیستم قابل دستیابی است.

همانطور که گفته شد روش بت یک روش دقیق برای محاسبه ویژه مقادیر و ویژه حالات دسته ای از سیستم های کوانتومی بس ذره ای است. گر چه در مورد سیستم های معین یعنی با تعداد

1-Bethe-Ansatz