بسم الله الرحمن الرحیم

۱۲۶۲۱۰

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

روش‌های سازگار برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی سخت

استاد راهنما

دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

المیرا آشپززاده

۱۳۸۸/۹/۹ -

بهمن ۱۳۸۷

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

پروردگارا، زندگانی مرا در دنیا با بهترین نعمت‌هایت آراسته کن و در آخرت در بهترین غرفه‌های بهشت مسکنم ده، مرا در دنیا با بهترین بندگانت همراه و همنشین ساز و در آخرت از یاران برگزیده‌ترین بندگانت قرار ده. مرا یاری کن تا به فرا گرفتن بهترین علم‌ها مشغول گردم و آن را در بهترین طریقی که می‌پسندی به کار برم، توفیق انجام بهترین عبادات را به من عطا کن و بهترین نام‌هایت را ذکر شب و روز من قرار بده، چشمانم را به دیدن بهترین مخلوقات در زمین و آسمان منور گردان و یاریم کن تا شکرگزاریم برای تو بهترین سپاسی باشد که شکرگزاران درگاهت انجام داده‌اند. ای بهترین پرورش دهندگان...

تقدیم به:

پدربزرگ مهربانم

و

مادربزرگ دلسوزم

و

برادران عزیزم رضا و امیر

۱۳۸۸/۹/۹

تقدیر و تشکر

در طول دوران تحصیلاتم اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. در این میان اساتیدی نیز هستند که همچون ستاره‌ای تابناک در آسمان علم و دانش و انسانیت درخشیده‌اند و گوشه‌ای از تاریکی جهل مرا به نور علم خود مزین کرده‌اند. می‌دانم که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر غلامرضا حجتی را که از نظر علمی همواره پشتیبان من بوده‌اند، جبران نماید. همچنین، می‌دانم که تا پایان عمر خود نخواهم توانست ذره‌ای از محبتهای ایشان را جبران کنم. تنها کاری که می‌توانم در حال حاضر انجام دهم آن است که به استاد گرامی بگویم سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات جناب آقای دکتر حسین خیری که استاد مشاور من بوده‌اند و همینطور داور جلسه دفاعیه خود، جناب آقای دکتر محمد یعقوب رحیمی تشکر می‌کنم. از زحمات خانواده عزیزم به خصوص برادرانم که حمایتشان را در تمام دوران تحصیلی از من دریغ نکرده‌اند تشکر می‌کنم. در پایان از زحمات همه دوستانم بخصوص دوست عزیزم خانم زیبا عباسی که مرا در تهیه و تنظیم این پروژه یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم.

نام خانوادگی دانشجو: آشپززاده نام: المیرا

عنوان: روش‌های سازگار برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی سخت

استاد راهنما : دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور: دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۱۵۴

کلید واژه‌ها: Stiff ordinary differential equations; Linearly implicit and implicit numerical methods; Adaptive step size

چکیده

در این پایان نامه روش‌های سازگار را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی سخت مورد بحث قرار داده و به بررسی دو نوع روش مرتبه دوم برای حل دستگاههای سخت به فرم خودگردان می‌پردازیم. سپس یک الگوریتم برای انتخاب طول گام سازگار بیان می‌کنیم. این روند انتخاب طول گام به منظور کنترل رفتار جواب عددی می‌باشد. برای این الگوریتم یک تابع مانیتور بصورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$\eta_n = \frac{||y_{n+1} - y_n||}{||y_n|| + \epsilon_M}$$

در الگوریتم بیان شده طول گام تا جایی اصلاح می‌شود تا تابع مانیتور بین کرانهای مشخص شده توسط کاربر قرار گیرد. اجرای این روند، این ویژگی را به الگوریتم می‌دهد که برای مسائل سخت، با دقت نسبتاً خوبی قابل بکارگیری باشد. در آخر نحوه اجرای این الگوریتم روی چند مساله سخت نشان داده می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه

زبان طبیعت فیزیک و زبان فیزیک معادلات دیفرانسیل است. از اینرو حل عددی معادلات دیفرانسیل یکی از مباحث مورد علاقه محققین بوده و تاکنون روشهای بسیار موثر و کارائی معرفی شده‌اند. اما حل عددی دستگاههای معادلات دیفرانسیل سخت [1] روش‌های خاص خود را می‌طلبند. بسیاری از مسائل کاربردی بخصوص در مهندسی شیمی، نظریه کنترل، مدارهای الکتریکی و... منجر به مسائل مقدار اولیه سخت می‌شوند. حل اینگونه مسائل توجه بسیاری از متخصصین آنالیز عددی را به خود جلب کرده است.

در سال ۱۹۵۰ که کرتیس [2] و هیرشفلدر [3] مشکلات حل عددی مسائل مقدار اولیه سخت را بیان کردند، روش‌های متعددی جهت برخورد با این مسائل ارائه گردیده است. مشکل اصلی این مسائل، ناحیه پایداری روش‌های بکار گرفته شده می‌باشد که در آن‌ها طول گام را علاوه بر در نظر گرفتن دقت، می‌بایستی برای پایداری مسائل نیز کنترل کرد. روش‌های صریح برای حل عددی مسائل مقدار اولیه، محدودیت‌های زیادی در قبال ناحیه پایداری دارند که نهایتاً باعث می‌شوند چنین روش‌هایی مفید واقع نشوند.

قضیه معروف دالکوئیست [4] که بیان می‌کند: «مرتبه یک روش چندگامی خطی A- پایدار حداکثر ۲ می‌باشد و روش الزاماً ضمنی است.»، مسیر تحقیقات را برای ارائه روش‌هایی با ناحیه پایداری وسیعتر و مرتبه بالاتر مشخص می‌کند.

روش‌های چندگامی خطی BDF [5] از جمله اولین روش‌های عددی برای مسائل سخت

Stiff [1]

Curtiss [2]

Hirschfelder [3]

Dahlquist [4]

Backward Differentiation Formula [5]

می‌باشند که در سال ۱۹۵۲ معرفی شدند که بعلت ویژگی‌های خاص خود بسیار مورد توجه قرار گرفتند و تا کنون تعمیم‌هایی از این روش ارائه گردیده است. تحقیقات برای ارائه روش‌هایی از مرتبه بالاتر و گریز از قضیه دالکوئیست در جهات زیر ادامه پیدا کرد:

- استفاده از نقاط جلوتر، وارد کردن پارامترهایی در الگوریتم برای ایجاد روش‌های سازگار
- استفاده از مشتقات بالاتر جواب در روش

در این پایان نامه ضمن مطالعه روش‌های معروف برای حل عددی دستگاههای سخت، یک الگوریتم برای انتخاب طول گام سازگار برای حل اینگونه معادلات معرفی شده که بخش اصلی پایان نامه است.

این پایان‌نامه در چهار فصل گردآوری شده است. عمده مطالب فصل ۱ از [۱۰] و [۱۱] و [۱۲] و [۱۴] و [۱۵] و [۱۸] و [۱۹] و [۲۶] جمع آوری شده است که در آن مفاهیم مقدماتی مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و روش‌های حل عدی دستگاههای سخت را بیان می‌کنیم. در فصل ۲ که از [۱۰] و [۱۱] و [۱۶] جمع آوری شده است به بررسی و مطالعه خواص پایداری دو نوع روش مرتبه دوم می‌پردازیم و یک الگوریتم برای انتخاب طول گام سازگار که برای حل دستگاههای سخت مفید هستند، ارائه می‌دهیم و در ادامه یک تابع مانیتور برای اجرای الگوریتم معرفی می‌کنیم. گاهی تشخیص اینکه دستگاه معادلات دیفرانسیل، بویژه دستگاه غیرخطی، سخت است، کار مشکلی می‌باشد. مزیت الگوریتم بیان شده این است که در آن تابع مانیتور مشخص می‌کند در چه بازه‌ای دستگاه سخت است تا با طول گام کوچکتری حرکت کنیم و در بازه‌ای که دستگاه غیر سخت است می‌توان طول گام را بزرگتر در نظر گرفت. در فصل ۳ در نرم‌افزاری به زبان MATLAB، برنامه‌هایی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی سخت با روند الگوریتم انتخاب طول گام سازگار به روش‌های روزنبراک[6] مرتبه دوم و روش BDF با طول گام

[6] Rosenbrock

متغیر مرتبه دوم نوشته‌ایم و آنها را روی چند مساله سخت اجرا کردیم و نحوه عملکرد تابع مانیتور با کران‌های تولرانس متفاوت را برای این روش‌ها جهت حل این مسائل، توسط نمودارهایی نشان داده‌ایم. در فصل ۴ نتایج و پیشنهادات بیان شده است.

این پایان نامه بر اساس مقاله‌های [۱۴] و [۱٦] جمع آوری شده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و پیشینه پژوهش

۱.۱ مساله مقدار اولیه

مساله مقدار اولیه

$$y' = f(x,y), \quad y : [x_0, b] \to \mathbb{R}^m, \quad f : [x_0, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \qquad (۱.۱)$$

$$y(x_0) = y_0$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید مساله جواب منحصر به فردی دارد. روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه به شکل (۱.۱)، الگوریتم هایی هستند که مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در نقاط مشخصی از بازه $[x_0, b]$ بنام گره، بدست می آورند. هر نقطه گرهی از روی x_0 با رابطه زیر بدست می آید:

$$x_n = x_0 + nh \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$x_N = b,$$

که در آن h طول گام نامیده می‌شود.

روش معروف اویلر[1] از اولین روش‌های حل عددی مسائل مقدار اولیه می‌باشد که آن را می‌توان اساس روش‌های دیگر دانست. برای حل عددی (۱.۱) به روش اویلر مقادیر تقریبی $y_0, y_1, y_2, \ldots$ از $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \ldots$ با رابطه زیر بدست می آیند:

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$y_0 = y(x_0).$$

در فرمول این روش، ملاحظه می‌شود که:

Euler[1]

- y_n تنها به y_{n-1} وابسته است و مقادیر $y_{n-2}, y_{n-3}, \ldots$ در محاسبه‌ی y_n نقشی ندارند.
- در هر گام تابع f تنها یکبار محاسبه می‌شود.
- فقط تابع f استفاده می‌شود نه مشتقات آن، بعبارتی جمله‌ای شامل $y''(x), y'''(x), \ldots$ وجود ندارد.

تعمیم‌های مهم روش اویلر در جهات زیر صورت گرفته‌است:

۱) استفاده از روابطی که در آنها y_n به مقادیر $(k \geqslant 2)$ $y_{n-2}, \ldots, y_{n-k}$ نیز وابسته باشد.

بعنوان مثال $y_n = y_{n-2} + 2hf(x_{n-1}, y_{n-1})$، این روش‌ها به روش‌های چندگامی خطی معروف هستند.

۲) استفاده از روابطی که در آنها تابع f بیش از یکبار محاسبه می‌شود. یک مثال ساده از این روش‌ها بصورت زیر است:

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1} + \frac{1}{2}hf(x_{n-1}, y_{n-1}))$$

این روش‌ها به روش‌های رانگ—کوتا[2] معروف هستند.

۳) استفاده از روابطی که در آن‌ها علاوه بر $y'(x)$، از عبارات $y''(x), y'''(x), \ldots$ نیز استفاده می‌شود. روش سری تیلر از جمله این روش‌ها می‌باشد.

بنابراین در رده‌بندی اولیه روش‌ها، دو دسته روش را می‌توان در نظر گرفت: روش‌های تک گامی و روش‌های چند گامی.

در روش‌های تک گامی مقدار تقریبی در هر گره با استفاده از مقدار در گره قبلی بدست می آید. در حالیکه در یک روش چندگامی، مثلاً k- گامی، مقدار تقریبی با استفاده از مقادیر در k گره قبلی تعیین می‌شود.

---
[2] Runge-Kutta

از آنجائیکه روش‌های مورد بحث ما روش‌های چند گامی هستند، توجه خود را معطوف این دسته روش‌ها کرده و مفاهیم اولیه آنها را ارائه می‌کنیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در n نقطه $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ محاسبه نموده‌ایم

$$y_i \simeq y(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

یک روش k- گامی برای حل معادله‌ی دیفرانسیل (۱.۱) در حالت کلی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\phi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, y'_n, y'_{n+1}, \ldots, y'_{n+k}),$$

که در آن h طول گام و α_i مقادیر ثابت و معلوم می‌باشند. اگر ϕ مستقل از y'_{n+k} باشد، روش را صریح و در غیر این صورت روش را ضمنی می‌نامیم. تعداد $k-1$ مقدار $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$ مورد نیاز برای شروع یک روش k- گامی را می‌توان با استفاده از یک روش تک گامی بدست آورد.

۱.۱.۱ روش‌های چندگامی خطی

شکل کلی این روش‌هابصورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \qquad (۲.۱)$$

که در آن ضرایب α_i وβ_i اعداد حقیقی ثابتی هستند، $\alpha_k = 1$ و ضرایب α_0 و β_0 همزمان صفر نیستند. $(\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0)$

اگر $\beta_k = 0$ روش صریح نامیده می‌شود، بعبارتی y_{n+k} تنها در سمت چپ معادله ظاهر می‌شود و می‌توان آن را با استفاده از مقادیر سمت راست مستقیماً بدست آورد. اگر $\beta_k \neq 0$ روش

را ضمنی می‌گوییم در اینصورت y_{n+k} در هر دو طرف معادله ظاهرشده و مستقیماً قابل محاسبه نمی‌باشد.

تعریف ۱.۱ روش چندگامی خطی (۲.۱) را همگرا می‌گوییم هر گاه برای مساله مقدار اولیه (۱.۱)

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=x-x_0}} y_n = y(x_n),$$

به ازای هر $x \in [a,b]$ برقرار باشد و برای همه جواب‌های y_n از مساله مقدار اولیه (۱.۱) که $y_\mu = \eta_\mu(h)$، داشته باشیم $\lim_{h\to 0}\eta_\mu(h) = \eta,\ \ \eta = 0,1,2,...,k-1$.

عملگر تفاضلی L نظیر روش (۲.۱) را بصورت

$$L[y(x_n);h] = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i y(x_{n+i}) - h\sum_{i=0}^{k}\beta_i y'(x_{n+i}),$$

تعریف می‌کنیم با استفاده از بسط تیلر حول x_n می‌توان نوشت:

$$L[y(x_n);h] = c_0 y(x_n) + c_1 h y'(x_n) + c_2 h^2 y''(x_n) + \cdots + c_q h^q y^{(q)}(x_n) + \cdots \qquad (۳.۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
c_0 &= \sum_{i=0}^{k}\alpha_i,\\
c_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k) - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k),\\
&\vdots\\
c_q &= (\frac{1}{q!})(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + k^q\alpha_k) - (\frac{1}{(q-1)!})(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + k^{q-1}\beta_k), \qquad q = 2,3,\cdots.
\end{aligned}$$

تعریف ۲.۱ عملگر تفاضلی (۳.۱) و متناظر آن روش چندگامی خطی (۲.۱) را از مرتبه p گوییم هرگاه

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_p = 0, \qquad c_{p+1} \neq 0.$$

در این صورت برای هر $y(x) \in C^{p+2}$ و ثابت غیرصفر c_{p+1} می‌توان نوشت:

$$L[y(x); h] = c_{p+1} h^{p+1} y^{p+1}(x_{n+k}) + O(h^{p+2})$$

که c_{p+1} را ثابت خطا می‌نامند.

۲.۱.۱ سازگاری و صفر– پایداری

تعریف ۳.۱ روش چندگامی خطی (۲.۱) را سازگار گوییم هرگاه از مرتبه $p \geq 1$ باشد.
بنابراین روش (۲.۱) سازگار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i.$$

حال اگر اولین و دومین چندجمله‌ای مشخصه روش چندگامی خطی را به ترتیب بصورت زیر تعریف کنیم

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i, \qquad \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i,$$

در این صورت روش سازگار است اگر و تنها اگر

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1).$$

بنابراین در یک روش سازگار چندجمله‌ای مشخصه $\rho(\xi)$ همواره یک ریشه ۱+ دارد که این ریشه را ریشه اصلی می‌نامیم و آن را با ξ_1 نشان می‌دهیم و بقیه ریشه‌ها، $\xi_s, s = 2, 3, 4, \ldots, k$ را ریشه‌های فرعی می‌نامیم و زمانی ظاهر می‌شوند که تعداد گامهای روش بیشتر از ۱ باشند.

مساله مقدار اولیه $y(0) = 0$، $y' = 0$ را در نظر بگیرید که جواب آن $y(x) = 0$ می‌باشد با بکارگیری روش (۲.۱) روی این مساله، معادله تفاضلی $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = 0$ بدست می آید. فرض کنید ریشه‌های ξ_s از $\rho(\xi)$ حقیقی و متمایز باشند. لذا یک جواب برای y_n از معادله تفاضلی فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$y_n = h(d_1\xi_1^n + d_2\xi_2^n + \cdots + d_k\xi_k^n),$$

که در آن d_s ثابت‌های دلخواه هستند. اگر روش همگرا باشد باید برای $h \to 0$ و $n \to \infty$ و $nh = x$ ثابت داشته باشیم $y_n \to 0$.

با توجه به اینکه داریم

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=x}} h\xi_s^n = x \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_s^n}{n} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\xi_s| \leqslant 1,$$

بنابراین برای همگرایی روش نباید اندازه ریشه‌های $\rho(\xi)$ بیشتر از یک باشد.

حالتی را در نظر می‌گیریم که ξ_s یک ریشه حقیقی چندجمله‌ای مشخصه $\rho(\xi)$ با چندگانگی $m > 1$ باشد، لذا یک جواب برای y_n از معادله تفاضلی فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$y_n = h\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{k} d_t\xi_t^n + h(d_{s,1} + d_{s,2}n + d_{s,3}n(n-1) + \cdots + d_{s,m}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2))\xi_s^n$$