إنه من سليمان وإنه بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بررسی برد عملگرها روی جبرهای فن نیومن

نگارش:

ریحانه محمدی نژاد پاشاکی

استاد راهنما: دکتر فرض الله میرزاپور

استاد مشاور: دکتر اسماعیل انصاری

شهریور ۱۳۸۷

دانشگاه زنجان

شماره: ۳۴۱۶۳/ع ۱۶
تاریخ: ۸۷/۶/۲۶

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی‌عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد
خانم **ریحانه محمدی نژاد پاشاکی** رشته: **ریاضی محض** گرایش: **آنالیز**
تحت عنوان:

" بررسی عملگرها روی جبرهای فن نیومن "

در تاریخ ۸۷/۶/۲۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه زنجان برگزارگردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می‌باشد:

قبول(با درجه : عالی امتیاز: ۱۹/۳) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی(۲۰-۱۸)
۲- بسیارخوب(۱۷/۹۹- ۱۶)
۳- خوب(۱۵/۹۹- ۱۴)
۴- قابل قبول(۱۳/۹۹- ۱۲)

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر فرض ا... میرزاپور	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر اسماعیل انصاری	استاد	
۳- استاد ممتحن داخلی	دکترحبیب امیری	استادیار	
۴- استاد ممتحن خارجی	دکتر جمال روئین	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای محمد ابراهیمی	استادیار	

دکتر محمدعلی اسم‌خانی
معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم
۸۷/۶/۲۶

دکتر نعمت الله ارشدی
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

دانشگاه زنجان
مدیریت تحصیلات تکمیلی

السلام علیک یا شمس الشموس یا انیس النفوس السلطان
یا ابا الحسن یا علی ابن موسی الرضا

تقدیم به:

ساحت مقدس ثامن الحجج
علی ابن موسی الرضا علیه السلام

قدر دانی و تشکر

سپاس خدای را که دیگر بار مرا در مسیر یادگیری دانش قرار داد.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر میرزاپور که همواره از نظر علمی و فکری راهنما و پشتوانه من بودند و زحمات بسیاری متحمل شدند سپاس گزارم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر دستجردی به خاطر راهنمایی ها و زحماتشان سپاس گزارم.

و در نهایت از پدر و مادر و خواهران بزرگوارم که زحمات زیادی را از ابتدای زندگی تا حال را متحمل شده اند تشکر می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه ثابت می‌کنیم که برای هر عملگر خطی کراندار $T : X \to X$ که X یک خارج قسمتی از جبر های فون نیومن است، نقطه طیفی T^* غیر تهی است. به ویژه و به عنوان یک کاربرد نتیجه می‌گیریم که چنین فضاهایی نمی‌توانند یک عملگر تراگذر توپولوژیکی را پشتیبانی کند.

فهرست مندرجات

مقدمه

ترسا برمودز[۱] و کالتون[۲]، در سال ۲۰۰۱ بر روی برد عملگرها روی جبر های فن نیومن تحقیقات علمی قابل توجهی را انجام داده و نیز پیش از آن ها در سال های ۱۹۹۰ و ۱۹۹۹ توسط کانوی[۳] در شاخه‌ی نظریه عملگرها مطالب بسیاری ارائه شد. پدرسن[۴] هم در سال ۱۹۷۹ در شاخه C^*- جبر ها مطالب بسیار خوبی به جامعه ریاضیات هدیه کرد.

در این پایان نامه هدف اصلی آن نشان دادن این موضوع است که اگر X یک خارج قسمتی غیر انعکاسی از جبر های فون نیومن باشد آنگاه برای هر عملگر T، فضای خارج قسمتی $X/R(\lambda - T)$ شامل یک کپی از l_∞ است و به ویژه جدا نشدنی است.

در فصل اول به تعاریف اولیه و قضایای پایه ای پرداخته شد. در این قسمت تعاریفی چون C^*- جبر و ایده آلها نیز بیان شد. در فصل دوم بیشتر از فصل اول به مبحث C^*- جبر ها پرداختیم و فشردگی ضعیف در دوگان C^*- جبرها بحث شد. برای پیش زمینه با فضای گروتندیک آشنا شدیم. در فصل سوم عملگرها روی جبرهای فن نیومن و جبرهای فن نیومن آبلی بررسی شد. در فصل آخر مثال ها و خاصیت های عنصری و انعکاسی و دوگان بیان شد.

---

[۱] Teresa Bermudez
[۲] N. J. Kalton
[۳] J. B. conway
[۴] G. K. Pedersen

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مثالها

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری V روی E (میدان مختلط یا حقیقی) فضای برداری نرم‌دار نامیده می‌شود اگر یک تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد طوری که به ازای هر $v\ ,\ w \in V$ و $\alpha \in E$ داریم

(i) $\|v\| \geq 0$ و $\|v\| = 0$ است اگر و تنها اگر $v = 0$.

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

خاصیت سوم را نامساوی مثلثی می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ جبر A را روی E جبر نرم‌دار می‌نامیم اگر

(i) A فضای برداری نرم‌دار باشد.

(ii) $\forall a,\ b \in A \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری نرم‌داری که فضای متریک کامل باشد فضای باناخ نامیده می‌شود یعنی یک فضای برداری نرم‌دار V روی E فضای باناخ نامیده می‌شود اگر برای هر دنباله کوشی $v_n \in V$ یک عنصر $v \in V$ وجود داشته باشد طوری که وقتی $n \to \infty$ میل کند داریم

$$||v - v_n|| \to ۰$$

تعریف ۴.۱.۱ هر جبر نرم‌داری که یک فضای باناخ باشد جبر باناخ نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ اگر A یک فضای باناخ باشد یک تضامن یا خود پیچی [۱] نگاشت $a \to a^*$ از A به توی خودش است به طوری که برای هر $a \ , \ b \in A$ و هر اسکالر α خاصیت های زیر برقرار باشند

$(a^*)^* = a$ (i)

$(ab)^* = b^*a^*$ (ii)

$(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha}a^* + b^*$ (iii)

اگر A دارای یک تضامن و همچنین دارای همانی باشد آنگاه

$$۱^*a = (۱^*a)^{**} = (a^*۱)^* = a$$

پس $۱ = ۱^*$ همچنین برای هر مضرب همانی $\alpha^* = \bar{\alpha}$.

جبری که دارای همانی باشد جبر یکدار نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱ C^*- جبر A جبر باناخی است با تضامن به طوری که برای هر $a \in A$

$$||a^*a|| = ||a||^۲$$

[۱] involution

مثال ۷.۱.۱

الف) جبر عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت $B = B(H)$، C^*- جبری است که برای هر عملگر A، A^* الحاقی A می‌باشد. به [۱] گزاره ی $II.۲.۷$ رجوع شود.

ب) برای هر فضای هیلبرت H، $B_\circ = B_\circ(H)$ جبر عملگرهای فشرده روی فضای هیلبرت H یک C^*- جبر است.

ج) اگر X یک فضای فشرده باشد و $C(X)$ مجموعه تمام توابع پیوسته مختلط X، یک C^*- جبر است اگر برای هر تابع پیوسته f روی X داشته باشیم

$$f^*(x) \equiv \overline{f(x)}$$

از این پس منظور از $ball\ A$، گوی یکه است یعنی $\{x \in A \mid \|x\| \leq ۱\}$.

گزاره ۸.۱.۱ اگر $a \in A$ باشد

الف) $\|a^*\| = \|a\|$

ب) $\|aa^*\| = \|a\|^۲$

ج) $\|a\| = \sup\{\|ax\| \mid x \in ball\ A\} = \sup\{\|xa\| \mid x \in ball\ A\}$

برهان. قسمت الف) داریم

$$\|a\|^۲ = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$$

پس

$$\|a\| \leq \|a^*\|$$

از طرفی چون $a^{**} = a$ با جایگزینی a^* به جای a در این نامساوی عکس همین نامساوی بدست آمده و حکم برقرار می‌شود.

قسمت ب) حکم از ترکیب قسمت (الف) در همین گزاره و تعریف ۲.۱.۱ بدست می‌آید.

قسمت ج) α را اولین sup در حکم در نظر می‌گیریم. واضح است که $\|a\| \leq \alpha$ و هنگامی که $a = \circ$ است به تساوی تبدیل می‌شود. $x = a^*/\|a\|$ را برای $a \neq \circ$ تعریف می‌کنیم. با توجه به قسمت (a)، $\|x\| = ۱$ و همچنین $\|a\| \geq \alpha$. اثبات دومین sup هم به طور مشابه است.

اگر C و A را دو C^*– جبر در نظر بگیریم

نگاشت $\rho : A \to C$، $*$– همریختی نامیده می‌شود اگر ρ یک $*$– همریختی جبری بوده و برای هر $a \in A$

$$\rho(a^*) = \rho(a)^*$$

یک $*$– یکریختی است اگر بین این C^*– جبرها همریختی یک به یک برقرار باشد. □

گزاره ۹.۱.۱ اگر A یک C^*– جبر بدون همانی باشد آنگاه یک C^*– جبر با همانی $A_۱$ حاوی A وجود دارد که A یک ایده آل و $A_۱/A$ با بعد یک است. اگر $\rho : A \to C$، $*$– همریختی باشد آنگاه $\rho_۱ : A_۱ \to C_۱$ یک $*$– همریختی با تعریف زیر است

$$\rho_۱(a + \alpha) = \rho(a) + \alpha$$

برهان. به [۲] رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر A یک C^*– جبر و $a \in A$ باشد آنگاه

الف) a هرمیتی است اگر $a = a^*$

ب) a نرمال است اگر $a^*a = aa^*$

ج) وقتی که A دارای همانی باشد، a را یکانی می‌نامیم اگر $a^*a = aa^* = ۱$.

گزاره ۱۱.۱.۱ اگر $a \in A$ باشد روابط زیر را داریم

الف) اگر a وارون پذیر باشد آنگاه a^* وارون پذیر است و $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

ب) $a = x + iy$ است وقتی که x , y عناصر هرمیتی A باشند.

ج) اگر u عنصر یکانی A باشد آنگاه $\|u\| = 1$.

د) اگر a هرمیتی باشد آنگاه $\|a\| = r(a)$، $r(a)$ شعاع طیفی a است.

و) اگر B یک C^*− جبر دیگری و $\rho : A \to B$، یک *− همریختی باشد آنگاه برای هر $a \in A$ داریم

$$\|\rho(a)\| \leq \|a\|$$

نتیجه ۱۲.۱.۱ اگر B و A را C^*− جبر و $\rho : A \to B$، یک *− یکریختی باشد آنگاه ρ یک ایزومتری است.

اگر A یک C^*− جبر باشد، $Re\ A$ مجموعه تمام عناصر هرمیتی A می‌باشد، در اصل $Re\ A$ یک فضای باناخ حقیقی است.

گزاره ۱۳.۱.۱ اگر $h : A \to C$ یک همریختی جبری باشد آنگاه روابط زیر را داریم

الف) اگر $a \in Re\ A$، $h(a) \in R$.

ب) برای هر عنصر دلخواه a از A، $h(a^*) = \overline{h(a)}$.

ج) برای هر $a \in A$، $h(a^*a) \geq 0$.

د) اگر A یکدار و u در A یکانی باشد آنگاه $|h(u)| = 1$.

برهان. به [۱] و [۲] رجوع شود. □

نتیجه ۱۴.۱.۱ هر همریختی جبری از یک C^*− جبر به توی اعداد حقیقی یک *− همریختی است.

فرض کنیم A C^*- جبر آبلی و $a \in A$ باشد. می دانیم که طیف a برابر

$$\sigma(a) = \{h(a) \mid \text{از } A \text{ به } C \text{ هومورفیسمی } h\}$$

برای A آبلی و $a \in Re\ A$، $\sigma(a) \subseteq R$. حال فرض کنیم A آبلی نباشد اما $a \in Re\ A$. فرض کنیم C، C^*- جبر یکدار تولید شده به وسیله a باشد بنابراین C آبلی است. بنابراین $\sigma_C(a)$ طیف a چنانکه یک عنصر از جبر C باشد یک زیر مجموعه از R است. بر طبق مرجع [۱]، $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_C(a)$ و $\partial\sigma_C(a) \subseteq \partial\sigma_A(a)$. اما چون $\sigma_C(a) \subseteq R$ برابر مرزش است پس برای هر $a \in Re\ A$

$$\sigma_A(a) = \sigma_C(a) \subseteq R$$

نتیجه ۱۵.۱.۱ اگر $a \in Re\ A$ آنگاه $\sigma(a) \subseteq R$.

قضیه ۱۶.۱.۱ اگر B و A دو C^*- جبر با عنصر همانی مشترک باشند به طوری که $B \subseteq A$، آنگاه برای هر $a \in B$

$$\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$$

۲.۱ عناصر مثبت در یک C^*- جبر

تعریف ۱.۲.۱ اگر A یک C^*- جبر باشد. یک عنصر $a \in A$ مثبت است اگر $a \in Re\ A$ و $\sigma(a) \subseteq R_+$ که R_+ مجموعه اعداد حقیقی نا منفی است. مجموعه تمام عناصر مثبت A را با A_+ نمایش می‌دهیم. گوییم عنصر a

منفی است اگر $-a \in A_+$ باشد. و به این صورت بیان می‌شود که $a \leq \circ$ و فرض می کنیم A_- مجموعه تمام عناصر منفی A باشد. به طور مثال تابع ϕ در $L^\infty(\mu)$ مثبت است اگر و تنها اگر $\phi(x) \geq \circ$. واضح است که همانی یک عنصر مثبت برای هر C^*− جبر است. همچنین $A_+ \cap A_- = \{\circ\}$. در حقیقت اگر $a \in A_+ \cap A_-$ آنگاه $\sigma(a) = \{\circ\}$. اما a هرمیتی است بنابراین $\|a\| = r(a) = \circ$.

گزاره ۲.۲.۱ اگر $a \in Re\ A$ آنگاه عناصر مثبت یکتای $v \in A$ و u وجود دارد به طوری که $a = u - v$ و $uv = vu = \circ$.

برهان. فرض کنیم $f(t) = \max(t, \circ)$ و $g(t) = -\min(t, \circ)$. بنابراین $f\ ,\ g \in C(R)_+$ و $f(t) - g(t) = t$. از محاسبات تابعی برای A استفاده کرده و فرض می‌کنیم $u = f(a)$ و $v = g(a)$ باشد. از قضیه نگاشت طیفی داریم $v \in A_+$ و u. همچنین $a = u - v$ و چون در $C(\sigma(a))$، $fg = \circ$ بر قرار است پس $uv = vu = \circ$. □

تعریف ۳.۲.۱ برای هر عنصر a در یک C^*− جبر مقدار مطلق آن را با $|a|$ نشان داده و تعریف می کنیم

$$|a| = (a^*a)^{1/2}$$

اگر a هرمیتی باشد آنگاه $|a| = a_+ + a_-$ است.

تعریف ۴.۲.۱ ایزومتری جزئی عملگر W روی یک فضای هیلبرت H است به طوری که برای هر بردار $h \in (\ker\ W)^\perp$ داریم

$$\|Wh\| = \|h\|$$

فضای $(\ker\ W)^\perp$ فضای اولیه W نامیده می‌شود و $ran\ W$ فضای نهایی W نامیده می‌شود.

۳.۱ همانی های تقریب

تعریف ۱.۳.۱ یک شناسه تقریب برای A یک تور در A است به طوری که

(i) برای هر i، $0 \leq e_i \leq 1$.

(ii) برای $i \leq j$، $e_i \leq e_j$.

(iii) برای هر $x \in A$، $\lim_i \|xe_i - x\| = 0$.

اگر تور یک دنباله باشد آنگاه یک شناسه تقریب متوالی نامیده می‌شود.

۴.۱ ایده آل ها در یک C^*- جبر

گزاره ۱.۴.۱ اگر I یک ایده‌آل چپ یا راست بسته A باشد و $a \in I$ با شرایط زیر باشد

$$a = a^* \quad , \quad f \in C(\sigma(a))$$

به طوری که $f(0) = 0$، آنگاه $f(a) \in I$. و همچنین برای هر عنصر هرمیتی a از I داریم

$$a_+ \ , \ a_- \ , \ |a| \ , \ |a|^{\frac{1}{2}} \in I$$

برهان. فرض کنیم I و $0 \in \sigma(a)$ را داشته باشیم، همچنین اگر $f(a) \in C(\sigma(a))$ و $f(0) = 0$ باشد آنگاه $\sigma(a) \subseteq R$ پس یک دنباله از چند جمله‌ایها P_n وجود دارد به طوری که

$$P_n(0) = 0$$

و همچنین به طور یکنواخت در $\sigma(a)$ داریم

$$P_n(t) \to f(t)$$

واضح است که برای هر $n \geq 1$، $P_n(a) \in I$. بنابراین

$$f(a) \in I$$

□

تعریف ۲.۴.۱ اگر A یک C^*- جبر باشد آنگاه یک زیر جبر موروثی از A یک C^*- زیر جبر B از A است به طوری که اگر $a \in B_+$ و $x \in A$ با شرط $0 \leq x \leq a$ باشد آنگاه $x \in B$.

گزاره ۳.۴.۱ فرض کنیم A یک C^*- جبر باشد

الف) اگر L یک ایده آل چپ بسته A و $B = L \cap L^*$ باشد آنگاه B یک زیر جبر موروثی از A است.

ب) اگر B یک زیر جبر موروثی از A و $L = \{x \in A \mid x^*x \in B\}$ باشد آنگاه L یک ایده آل چپ بسته A است.

ج) اگر L یک ایده آل چپ بسته A و $B = L \cap L^*$ باشد آنگاه $L = \{x \in A \mid x^*x \in B\}$.

د) اگر B یک زیر جبر موروثی از A و $L = \{x \in A \mid x^*x \in B\}$ باشد آنگاه $B = L \cap L^*$.

برهان. به [۲] رجوع شود. □

گزاره ۴.۴.۱ اگر I یک ایده آل بسته A باشد آنگاه برای هر $a \in I$، $a^* \in I$ است.

لم ۵.۴.۱ اگر I یک ایده آل بسته A باشد و $a \in A$ آنگاه

$$\|a + I\| = \inf\{\|a - ax\| \mid x \in I_+ \ , \ \|x\| \leq 1\}$$

برهان. اگر اینفیمم را α بنامیم واضح است که $\|a+I\| \leq \alpha$ چون $aI \subseteq I$. فرض کنیم $\{e_i\}$ یک شناسه تقریب برای I باشد. چون $۰ \leq ۱ - e_i \leq ۱$، اگر $y \in I$ باشد آنگاه

$$\|(a+y)(۱-e_i)\| \leq \|a+y\|$$

بنابراین

$$\|a+y\| \geq \liminf_i \|(a+y)(۱-e_i)\|$$

$$= \liminf_i \|(a-ae_i)+(y-ye_i)\|$$

$$= \liminf_i \|(a-ae_i)\|$$

چون $\|y-ye_i\| \to ۰$ بنابراین $\|a+I\| \geq \alpha$. □

قضیه ۶.۴.۱ فرض کنیم A یک C^*− جبر و I یک ایده آل بسته A باشد. برای هر $a \in A$، تعریف می کنیم

$$(a+I)^* = a^* + I$$

با این تعریف و نرم خارج قسمتی A/I یک C^*− جبر است.

برهان. می دانیم که A/I یک جبر باناخ است. باید نشان دهیم که A/I دارای خاصیت C^*− همانی است. در نتیجه باید نشان دهیم که برای هر $a \in A$

$$\|a+I\|^۲ = \|a^*a+I\|$$

با توجه به گزاره ۴.۴.۱، برای هر $a \in A$

$$\|a^*+I\| = \|a+I\|$$

بنابراین

$$\|a^*a+I\| = \|(a^*+I)(a+I)\|$$

$$\leq \|a^*+I\|\|a+I\|$$

$$= \|a+I\|^{۲}$$

از طرف دیگر بنا بر لم ۵.۴.۱ داریم

$$\|a+I\|^{۲} = \inf\ \{\|a-ax\|^{۲} \mid x \in I_+ \quad , \quad \|x\| \leq ۱\}$$

$$= \inf\ \{\|a(۱-x)\|^{۲} \mid x \in I_+ \quad , \quad \|x\| \leq ۱\}$$

$$= \inf\ \{\|(۱-x)a^*a(۱-x)\| \mid x \in I_+ \quad , \quad \|x\| \leq ۱\}$$

$$\leq \inf\ \{\|a^*a(۱-x)\| \mid x \in I_+ \quad , \quad \|x\| \leq ۱\}\}$$

$$= \inf\ \{\|a^*a-a^*ax\| \mid x \in I_+ \quad , \quad \|x\| \leq ۱\}$$

$$= \|a^*a+I\|$$

□