بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

ماتریس فاصله

توسط:

فاطمه مهدی‌نسب

استاد راهنما:

دکتر علی‌محمد نظری

استاد مشاور:

دکتر بهنام سپهریان

دانشگاه اراک

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا ماتریس فاصله را معرفی نموده، سپس رابطه‌اش با مجموعه‌ای از ماتریس‌های نیمه معین مثبت را بیان کرده و برخی ویژگی‌های هندسی آن را شرح می‌دهیم. در ادامه انواع خاص این ماتریس‌ها، اعم از کروی و چندکروی را که دارای ظاهری بلوکی هستند، همراه با ویژگی‌هایشان معرفی می‌نماییم و آخرین فصل را نیز به بررسی چندجمله‌ای مشخصه و حل مبسوط مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های فاصله اختصاص می‌دهیم و دست آوردهای خود، که شکاف‌های موجود در راه‌حل‌های پیشین را پر می‌کند ارائه می‌نماییم.

کلمات کلیدی: ماتریس فاصله، ماتریس نیمه معین مثبت، ماتریس فاصله کروی، ساختار بلوکی، چندجمله‌ای مشخصه، مسئله مقدار ویژه معکوس

پیش‌گفتار

بحث فاصله‌ی نقاط در فضای اقلیدسی بحث مهمی است که توسط ریاضی‌دانان در دوره‌های مختلف بسیار به آن پرداخته شده است و کاربردهای وسیعی دارد. از جمله کارهای مهم در این زمینه کتاب بلومنتال [۱] در سال ۱۹۷۰ است. اما قبل از آن در مقالاتی از جمله هاوس هولدر[۲] (۱۹۳۸) و گاور (۱۹۶۸) به آن پرداخته شده و نیز در سال ۱۹۳۵ اسچونبرگ [۳]، شرایط لازم و کافی را برای آن‌که تعدادی نقطه در فضای اقلیدسی بتوانند رئوس یک شکل محدب باشند، ارائه و بدین‌وسیله نقش مهمی در توسعه‌ی بحث ماتریس‌های فاصله ایفا نمود.
در سال ۱۹۸۱، گاور[۴] نخستین بار ماتریس‌های فاصله را معرفی نمود و فاصله‌های بین نقاط را به عنوان درایه‌های ماتریسی به همین نام بیان کرد و بررسی‌هایی در مورد ویژگی‌های هندسی آن‌ها انجام داد. وی هم‌چنین کارهای اسچونبرگ را گسترش داد و مقالات مهمی در زمینه‌ی ماتریس‌های فاصله منتشر نمود. اما با توجه به کاربردهایی که برای ماتریس فاصله وجود دارد، این بحث توسط افراد دیگری مانند هایدن [۵] و تارازاگا[۶] ادامه و توسعه یافت.
از جمله کاربردهای ماتریس فاصله در علم آمار است، به این صورت که می‌توان n داده آماری را به عنوان نقاطی در فضای n بعدی تصور کرده و با تحلیل ماتریس فاصله مربوطه، اطلاعاتی در مورد جامعه موردنظر به دست آورد. به‌علاوه این ماتریس‌ها در علوم شیمی، زیست و ژنتیک نیز کاربردهایی دارند.

---

[۱] Blumenthal
[۲] Householder
[۳] Schoenberg
[۴] Gower
[۵] Hayden
[۶] Tarazaga

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

مطالبی را که در این پایان‌نامه نیاز داریم، به اختصار در این فصل ارائه می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه اعداد حقیقی را با R و مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ حقیقی را با $M_{m\times n}$ نشان می‌دهیم. هم چنین ماتریس A را به شکل کلی $A = [a_{ij}]$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ فضای اقلیدسی n بعدی، که با R^n نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی تمام بردارهای n بعدی است.

تعریف ۳.۱.۱ بردار b در R^n ترکیب خطی بردارهای $a_۱, a_۲, \cdots, a_k$ در R^n گفته می‌شود، اگر $b = \sum\limits_{j=۱}^{k} \lambda_j a_j$ که در آن $\lambda_۱, \cdots, \lambda_k$ اعداد حقیقی هستند. اگر علاوه بر آن، $\sum\limits_{j=۱}^{k} \lambda_j = ۱$، در این صورت b را ترکیب آفین و چنانچه هر دو شرط $\sum\limits_{j=۱}^{k} \lambda_j = ۱$ و $\lambda_j \geq ۰$ به ازای $j = ۱, \cdots, k$ همزمان برقرار باشند، آن را ترکیب محدب $a_۱, a_۲, \cdots, a_k$ می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱ زیرفضای S_A از R^n زیرفضای آفین نامیده می‌شود، اگر برای هر $a_۱ \in S_A$ و $a_۲ \in S_A$، ترکیب آفین آن‌ها نیز در S_A باشد.

تعریف ۵.۱.۱ اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$، نقاطی در فضای R^n باشند، بعد فضای آفین تولید شده توسط آن‌ها عبارتست از بعد کوچکترین فضای (فضای با کمترین بعد) شامل همه‌ی آن نقاط.

تعریف ۶.۱.۱ مجموعه بردارهای $a_1, a_2, \cdots, a_k$ با بعد n مستقل خطی گفته می‌شوند، اگر $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$ نتیجه دهد $\lambda_j = 0$ به ازای $j = 1, \cdots, k$.

تعریف ۷.۱.۱ مجموعه X در R^n محدب گفته می‌شود اگر به ازای هر دو نقطه‌ی مفروض x_1 و x_2 در X، و هر $\lambda \in [0, 1]$، داشته باشیم $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$. اگر برای مجموعه محدب C، به ازای هر $x \in C$ و $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda x \in C$، آن‌گاه مجموعه C، مخروط محدب نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱ پوسته محدب یک مجموعه از نقاط مثل X، به مجموعه‌ی همه ترکیبات محدب نقاط موجود در X گفته می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ یک سیمپلکس n بعدی یا $n-$ سیمپلکس، پوسته‌ی محدب یک مجموعه $n + 1$ نقطه‌ای ناهم‌صفحه در R^n است، یعنی نقاطی که تمام آن‌ها در یک ابرصفحه در R^n قرار نمی‌گیرند. بنابراین به ازای $n = 1$ این پوسته یک قطعه خط، به ازای $n = 2$ یک مثلث و برای $n = 3$ یک چهارضلعی است.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، برد و فضای پوچ آن را به ترتیب با $R(A)$ و $N(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$R(A) = \{b \in R^m : b = Ax, x \in R^n\};$$

$$N(A) = \{x \in R^n : Ax = 0\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر S زیرفضایی از R^m باشد، آن‌گاه $S^\perp$، مکمل متعامد S نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S^\perp = \left\{ y \in R^m : y^T x = \circ, \forall x \in S \right\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای

$$p_n(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}),$$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ صفرهای چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A، مقادیر ویژه این ماتریس نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۴.۱.۱ λ مقدار ویژه ماتریس A است اگر و تنها اگر بردار ناصفر x وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow (A - \lambda I)x = \circ.$$

در رابطه فوق x بردار ویژه راست (بردار ویژه) از ماتریس A مربوط به مقدار ویژه λ است و در رابطه

$$y^T A = \lambda y,$$

y بردار ویژه چپ از A مربوط به مقدار ویژه λ نامیده می‌شود. مرسوم است که بردار ویژه راست A را تنها بردار ویژه می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ جمع مقادیر ویژه ماتریس A از مرتبه n، اثر A نامیده می‌شود و به‌صورت

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{trace}(A),$$

نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۶.۱.۱ مجموعه همه مقادیر ویژه ماتریس A، طیف A نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۱.۱ کمیت $\rho(A)$ که به‌صورت

$$\rho(A) = \max_{i} |\lambda_i|, \ i = ۱, ۲, \ldots, n,$$

تعریف می‌شود شعاع طیفی ماتریس A نامیده می‌شود، که در رابطه فوق $\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس A از مرتبه n هستند.

تعریف ۱۸.۱.۱ ماتریسی را همانی گوییم، که مربعی باشد و تمام عناصر قطری آن یک و عناصر غیرقطری آن صفر باشند. ماتریس همانی را با I نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ ماتریس A را متقارن می‌نامیم، هرگاه $A = A^T$.

تعریف ۲۰.۱.۱ ماتریس A را نامنفی گوییم، هرگاه تمام درایه‌های ماتریس A نامنفی باشند.

تعریف ۲۱.۱.۱ ماتریس A را قطری گوییم، هرگاه تمام عناصر غیر قطری آن صفر باشد. هم‌چنین اگر $a_۱, \cdots, a_n$ عناصر قطری ماتریس A باشند، می‌توانیم آن را با $\mathrm{diag}(a_۱, \cdots, a_n)$ نمایش دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ اگر A یک ماتریس دلخواه باشد، منظور از $\mathrm{diag}(A)$ برداری است که شامل درایه‌های قطری A است.

تعریف ۲۳.۱.۱ ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}$ را معکوس‌پذیر (نامنفرد) گوییم، اگر ماتریسی مانند $B \in M_{n\times n}$ موجود باشد به‌طوری‌که $AB = BA = I_n$. در غیر این صورت آن را منفرد می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱ دو ماتریس A و B متشابه هستند، هرگاه ماتریس نامنفرد X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X^{-۱}AX = B$.

تعریف ۲۵.۱.۱ ماتریس A را قطری شدنی گوییم، هرگاه ماتریسی چون P یافت شود به قسمی که $P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱ ماتریس متقارن A را معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر بردار ناصفر x، داشته باشیم $x^TAx > 0$. اگر $x^TAx \geq 0$، آن‌گاه A را نیمه معین مثبت یا معین نامنفی و اگر $x^TAx < 0$، آن را معین منفی می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۱.۱ ماتریس مربعی A را متعامد گوییم، هرگاه $A^T = A^{-1}$.

تعریف ۲۸.۱.۱ حداکثر تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی ماتریس A را رتبه آن ماتریس نامیده و با $\text{rank}(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱ اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، آن‌گاه A را با رتبه سطری کامل گوییم، اگر سطرهای آن مستقل خطی باشند. هم‌چنین آن را با رتبه ستونی کامل گوییم اگر ستون‌های آن مستقل خطی باشند. ماتریس A رتبه کامل گفته می‌شود، اگر هم رتبه سطری و هم رتبه ستونی کامل داشته باشد. ماتریسی که رتبه کامل نباشد، رتبه ناقص نامیده می‌شود.

تعریف ۳۰.۱.۱ تعداد بردارهای یک پایه در یک فضای برداری را بعد آن فضا می‌نامیم.

تعریف ۳۱.۱.۱ نرم $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ را نرم فروبینیوسی[1] ماتریس A می‌نامیم.

تعریف ۳۲.۱.۱ اگر A یک ماتریس مربعی، D ماتریس قطری متشکل از مقادیر ویژه آن و V ماتریسی باشد که ستون‌های آن بردارهای ویژه A باشند، آن‌گاه $A = VDV^{-1}$، تجزیه طیفی ماتریس A نامیده می‌شود.

---

[1] Frobenius Norm

تعریف ۳۳.۱.۱ اگر S زیرفضایی از R^n باشد، آن‌گاه ماتریس $P \in M_{n\times n}$ که ویژگی‌های زیر را داشته باشد، تصویر متعامد روی S گفته می شود

۱) $R(P) = S$،

۲) $P^T = P$،

۳) $P^2 = P$.

همچنین اگر $V = (v_1, \cdots, v_k)$، که $\{v_1, \cdots, v_k\}$ پایه‌های متعامد فضای S باشند، آن‌گاه $P_S = VV^T$، تصویر متعامد یکتا روی S است. به‌علاوه $I - P_S$ تصویر متعامد بر فضای $S^\perp$ است.

تعریف ۳۴.۱.۱ **معکوس تعمیم یافته مور–پنرز**[۲] ماتریس $A \in M_{m\times n}$، ماتریسی است مانند $A^+ \in M_{n\times m}$ که در شرایط زیر صدق می‌کند

۱) $AA^+A = A$.

۲) $A^+AA^+ = A^+$.

۳) $(AA^+)^T = AA^+$.

۴) $(A^+A)^T = A^+A$.

معکوس مور–پنرز، با شراط فوق وجود دارد و یکتاست. اما اگر ماتریسی فقط در شرایط اول و دوم صدق کند، آن‌گاه معکوس تعمیم یافته نامیده می‌شود، که همواره وجود دارد ولی یکتا نیست.

تعریف ۳۵.۱.۱ اگر A و B دو ماتریس باشند که $A \in M_{m\times n}$ و $B \in M_{p\times q}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب کرونیکر[۳] آن‌ها ماتریسی بلوکی از مرتبه $mp \times nq$ است، که با $A \otimes B$ نمایش داده شده و به صورت زیر به دست می آید

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

---

[۲] Moore-Penrose pseudoinverse

[۳] Kroneker

قضیه ۳۶.۱.۱ [٦]، ماتریس $A \in M_{n\times n}$ نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس $X \in M_{n\times k}$ وجود داشته باشد به طوری که $A = XX^T$.

قضیه ۳۷.۱.۱ ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه یکسان دارند.

برهان. قضیه ۸.۲.۳ از[۱۰] را ببینید.

قضیه ۳۸.۱.۱ **(قضیه پرن-فروبینیوس** [۴]**)** اگر A ماتریسی نامنفی باشد، آن‌گاه

(a) $\rho(A) > 0$.

(b) $\rho(A)$ یکی از مقادیر ویژه ماتریس نامنفی A است.

(c) به ازای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A که $\lambda \neq \rho(A)$ داریم؛ $|\lambda| < \rho(A)$.

(d) اگر x و y به‌ترتیب بردارهای ویژه راست و چپ ماتریس نامنفی A مطابق با مقدار ویژه پرن باشند آن‌گاه تمام درایه‌های بردارهای x و y نامنفی‌اند.

توجه کنیم که قضیه فوق در [۲۱] بیان شده است.

قضیه ۳۹.۱.۱ **نامساوی کشی- شوارتز**[۵] بیان می‌کند که اگر x و y دو بردار در فضای اقلیدسی R^n باشند، آن‌گاه

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

که منظور از $\langle .,. \rangle$ ضرب داخلی بردارهاست.

قضیه ۴۰.۱.۱ **فرمول شرمن - مریسن** [٦][۱۰]: اگر u و v، دو بردار در R^n و A ماتریسی نامنفرد باشد، آن‌گاه

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}uv^TA^{-1}),$$

که در آن $\alpha = 1/(1-v^TA^{-1}u)$، اگر $v^TA^{-1}u \neq 1$.

---

[۴] Perron-Ferbenuse's theorem

[۵] Cauchy-Schwarz

[٦] Sherman-Morrison

قضیه ۴۱.۱.۱ فرمول سیلوستر [۷] برای دترمینان: اگر A ماتریسی معکوس پذیر، r برداری سطری و c برداری ستونی باشد، آن‌گاه

$$\det(A + cr) = \det(A)(1 + rA^{-1}c).$$

قضیه ۴۲.۱.۱ قضیه سیلوستر (قانون اینرسی سیلوستر): اگر $A, B \in M_{n\times n}$ ماتریس‌هایی متقارن باشند ، آن‌گاه ماتریس نامنفرد S وجود دارد که $A = SBS^T$ اگر و تنها اگر A, B اینرسی یکسان داشته باشند، یعنی در مورد تعداد مقادیر ویژه مثبت، منفی و صفر با یکدیگر یکسان باشند.

---

[۷] Sylvester

فصل ۲

ماتریس فاصله و ویژگی‌های آن

۱.۲ مقدمه

در این فصل، ابتدا به معرفی ماتریس فاصله و ویژگی‌های اولیه آن می‌پردازیم، سپس بحث ماتریس‌های نیمه معین مثبتی را که به نحوی با ماتریس‌های فاصله در تناظر یک به یک هستند، مطرح می‌کنیم. در ادامه ساختار نقاطی که ماتریس فاصله را می‌سازند، موقعیت‌های هندسی خاص مبدأ مختصات نسبت به آن‌ها و نیز وضعیتی را که با این تغییر مبدأ به وجود می‌آید، مورد توجه قرار می‌دهیم. همچنین اطلاعات مفیدی که از دترمینان ماتریس فاصله در مورد شکل حاصل از نقاط سازنده‌ی آن ماتریس، به دست می‌آید، و در نهایت برد و فضای پوچ ماتریس‌های فاصله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۲ آشنایی با ماتریس فاصله

تعریف ۱.۲.۲ ماتریس $D = [d_{ij}] \in M_{n\times n}$، ماتریس فاصله‌ی اقلیدسی یا به اختصار EDM نامیده می شود، اگر n نقطه‌ی $x_1, \cdots, x_n$ در فضای اقلیدسی $R^r (r < n)$ وجود داشته باشند، به‌طوری که

$$d_{ij} = \|x_i - x_j\|^2,$$

که در آن $\|.\|$ نرم اقلیدسی است.

مثال ۲.۲.۲ نقاط $x_۱, x_۲, x_۳ \in R^۲$ با مختصات $x_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ ، $x_۲ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $x_۳ = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم، ماتریس $D \in M_{۳\times۳}$ به شکل زیر، که مطابق تعریف بالا ساخته شده، یک ماتریس فاصله است با نقاط تولید کننده‌ی $x_۱, x_۲, x_۳$، و فاصله‌ها طول اضلاع مثلث $x_۱x_۲x_۳$ هستند.

$$D = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۴ \\ ۵ & ۴ & ۰ \end{pmatrix}.$$

با توجه به تعریف فوق اگر D یک ماتریس فاصله باشد، ویژگی‌های زیر به راحتی نتیجه می‌شوند

۱. D ماتریس نامنفی است یعنی
$$d_{ij} = \|x_i - x_j\|^۲ \geq ۰,$$

۲. D متقارن‌است، به عبارت دیگر
$$d_{ij} = \|x_i - x_j\|^۲ = \|x_j - x_i\|^۲ = d_{ji},$$

۳. D دارای قطر اصلی صفر می‌باشد یعنی
$$d_{ii} = \|x_i - x_i\|^۲ = ۰.$$

بنابراین ماتریس فاصله‌ی D با تعداد $\binom{n}{۲} = n(n-۱)/۲$ کمیت d_{ij} مشخص می شود.

با توجه به این‌که درایه‌های ماتریس D فاصله‌های مجموعه ای از نقاط هستند، هرگونه انتقال و دوران مجموعه‌ی نقاط، تغییری در این ماتریس ایجاد نخواهد کرد.

n نقطه‌ی $x_۱, \cdots, x_n$ را در فضای R^r در نظر می گیریم، ماتریس مختصات این نقاط را با ماتریس $X \in M_{n\times r}$ تعریف می کنیم، به این ترتیب که سطر iام ماتریس X، مختصات نقطه‌ی x_i است.

با توجه به توضیحات فوق، ماتریس مختصات متناظر با یک ماتریس فاصله یکتا نیست، مثلاً برای ماتریس فاصله‌ی مثال ۲.۲.۲، ماتریس‌های

$$X_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad X_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}, \quad X_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲}/۲ & \sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ & -\sqrt{۲}/۲ \end{pmatrix}$$

که $X_۲$ انتقال یافته‌ی $X_۱$ در امتداد محور z است و $X_۳$ دوران یافته‌ی $X_۱$ به میزان ۴۵ درجه است، هرسه ماتریس‌های مختصات متناظر با آن هستند.

تعریف ۳.۲.۲ فرض کنیم D ماتریس فاصله‌ای با تعریف ۱.۲.۲ باشد، از بین ماتریس‌های مختصات D، ماتریسی با کمترین رتبه را در نظر گرفته و رتبه‌ی آن را، بعد ماتریس فاصله‌ی D تعریف می‌کنیم. این تعریف معادل است با بعد فضای آفین تولید شده توسط نقاط $x_۱, \cdots, x_n$، که حداکثر $n - ۱$ خواهد بود. بعد ماتریس D با این تعریف را، بعد نشانده شده آن می‌نامیم و با $\mathrm{ed(D)}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴.۲.۲ ماتریس های $X_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ با رتبه ی ۱ و $X_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ با رتبه ی ۲ هر دو ماتریس‌های مختصات متناظر با ماتریس فاصله‌ی $D = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ هستند، که اولی مختصات نقاطی در R (خط اعداد حقیقی)، و دومی مختصات انتقال یافته‌ی همان نقاط را در صفحه نشان می‌دهد. با توجه به تعریف فوق، بعد نشانده شده‌ی D، برابر ۱ خواهد بود. هم‌چنین برای مثال ۲.۲.۲، بعد نشانده شده‌ی D برابر ۲ می‌باشد.

حال سؤال اساسی این است که آیا هر ماتریس متقارن و نامنفی با قطر اصلی صفر، یک ماتریس فاصله است؟ و یا این‌که در چه صورت ممکن است که تعداد $n(n - ۱)/۲$ کمیت داده شده‌ی d_{ij} فاصله‌های بین n نقطه باشند؟ و چگونه می توان مختصات این نقاط را به دست آورد؟
در این فصل، این سؤالات به تفصیل پاسخ داده خواهند شد.
با توجه به این‌که همه‌ی فاصله‌ها متریک هستند، در خاصیت نامساوی مثلثی صدق می کنند. به عبارتی برای هر i, j, k داریم

$$\sqrt{d_{ij}} \leqslant \sqrt{d_{ik}} + \sqrt{d_{kj}},$$

بنابراین هر ماتریس متقارن و نامنفی با قطر اصلی صفر ممکن است این شرط را برآورده نکند و درنتیجه ماتریس فاصله نباشد، مثلاً ماتریس $B = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۱۶ \\ ۴ & ۱۶ & ۰ \end{pmatrix}$ ، یک ماتریس فاصله

نیست به این دلیل که

$$۴ = \sqrt{b_{۲۳}} > \sqrt{b_{۲۱}} + \sqrt{b_{۱۳}} = ۱ + ۲.$$

با توجه با این‌که برقراری نامساوی مثلثی، شرط لازم و کافی برای وجود مثلثی با اضلاع داده شده است، در همین‌جا می‌توان نکته‌ی زیر را بیان نمود.

تذکر ۵.۲.۲ تعداد $n(n-۱)/۲$ کمیت مثبت داده شده‌ی d_{ij}، درایه‌های یک ماتریس فاصله هستند(قسمت بالا یا پایین قطر اصلی)، اگر و تنها اگر هر ۳ عضو از مجموعه‌ی این کمیت‌ها، در خاصیت نامساوی مثلثی صدق کنند.

لازم به ذکر است که برای ماتریس‌های با ابعاد بزرگ، باتوجه به زیاد بودن تعداد نامساوی‌ها، تذکر فوق برای بررسی فاصله بودن آن ماتریس‌ها چندان کاربردی نیست.
در بخش بعد، شرایط لازم و کافی را، برای آن‌که یک ماتریس متقارن و نامنفی با قطر اصلی صفر، ماتریس فاصله باشد، به دست می آوریم.

۳.۲ رابطه‌ی ماتریس فاصله با ماتریس‌های نیمه معین مثبت

ابتدا مجموعه‌های S_n و Ω_n و Λ_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

S_n : مجموعه‌ی همه ماتریس‌های متقارن از مرتبه n،

Ω_n : مجموعه‌ی همه ماتریس‌های متقارن نیمه معین مثبت از مرتبه n،

و Λ_n : مجموعه‌ی همه ماتریس‌های فاصله مرتبه n.

S_n، Ω_n و Λ_n با تعاریف فوق، زیر مجموعه‌های محدبی از $R^{n\times n}$ هستند که مخروط محدب نامیده می‌شوند به این معنی که اگر برای مثال $A_۱, A_۲$ دو ماتریس فاصله (نیمه معین مثبت) باشند آن‌گاه به ازای هر $\lambda \geq ۰$ و $\mu \geq ۰$ ماتریس $\lambda A_۱ + \mu A_۲$ نیز فاصله (نیمه معین مثبت) خواهد بود.

n نقطه‌ی $x_۱, \cdots, x_n$ را در فضای R^r در نظر می گیریم. ماتریس مختصات این نقاط را با ماتریس $X \in M_{n\times r}$ تعریف می‌کنیم، دراین صورت $XX^T \in \Omega_n \subseteq S_n$ خواهد بود. حال تابع

K را روی S_n به صورت زیر معرفی می‌کنیم :

$$K(A) = ae^T + ea^T - ۲A, \qquad \forall A \in S_n \tag{۱.۲}$$

که در آن $a = \text{diag}(A)$ قطر اصلی A و $e = (۱, \cdots, ۱)^T \in R^n$ است. تابع فوق، ماتریس فاصله‌ی متناظر با نقاط $x_۱, \cdots, x_n$ را به ما می‌دهد و با استفاده از قانون کسینوس‌ها به ترتیب زیر حاصل می‌شود.

قانون کسینوس‌ها، در مثلث ABC با اضلاع a, b, c و زاویه γ مقابل c، عبارتست از

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma.$$

اگر n نقطه در فضای R^r داشته باشیم، برای هر سه نقطه از آن‌ها باید قانون فوق برقرار باشد. اگر $A = XX^T$، آن‌گاه

$$a = \text{diag(A)} = (\|x_۱\|^۲, \ldots, \|x_n\|^۲)^T,$$

و با توجه به این‌که e برداری با مؤلفه‌های ۱ است، ae^T ماتریسی با ستون‌های a و ea^T ماتریسی است با سطرهای a^T.

حال رأس‌های x_i, x_j را همراه با مبدأ در نظر می‌گیریم، ماتریس $ae^T + ea^T - ۲XX^T$ به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \|x_۱\|^۲ & \|x_۱\|^۲ & \cdots & \|x_۱\|^۲ \\ \|x_۲\|^۲ & \|x_۲\|^۲ & \cdots & \|x_۲\|^۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|x_n\|^۲ & \|x_n\|^۲ & \cdots & \|x_n\|^۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|x_۱\|^۲ & \|x_۲\|^۲ & \cdots & \|x_n\|^۲ \\ \|x_۱\|^۲ & \|x_۲\|^۲ & \cdots & \|x_n\|^۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|x_۱\|^۲ & \|x_۲\|^۲ & \cdots & \|x_n\|^۲ \end{pmatrix}$$
$$-۲\begin{pmatrix} {x_۱}^T \\ {x_۲}^T \\ \vdots \\ {x_n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

که $x_i \in R^n$ مختصات نقطه iام را نشان می‌دهد. بنابراین درایه‌ی (i,j)ام ماتریس فوق عبارتست از

$$\|x_i\|^۲ + \|x_j\|^۲ - ۲{x_i}^T x_j,$$