بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

شناسایی نگاشت های حافظ قسمت های مختلف طیف

توسط

عباس کرباسی

استاد راهنما

دکتر فرشته سعدی

شهریور ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای عباس کرباسی** رشته **ریاضی (محض)** تحت عنوان: «**شناسایی نگاشت‌های حافظ قسمت‌های مختلف طیف**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر فرشته سعدی	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر احمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر خارجی	دکتر منصور واعظ‌پور	دانشیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر معصومه نجفی	استادیار	
۵- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد موسوی	دانشیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاّع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«*کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد /رساله‌ٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ* ریاضی محض *است که در سال* ۱۳۸۷ *در دانشکدهٔ* علوم پایه *دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر* فرشته سعدی *، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* ______ *و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* ______ *از آن دفاع شده است.*»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازادِ نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب عباس کرباسی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: عباس کرباسی

تاریخ و امضا: Karbasi

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

Karbasi

تقدیم به

بهترین واژگان حیات

پدر و مادرم

قدردانی

بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد ارجمند، سرکار خانم دکتر فرشته سعدی که در تمام مراحل تدوین این پایان‌نامه و دورهٔ کارشناسی ارشد همواره با راهنمایی‌های ارزشمندشان یاریگر من بودند، ابراز می‌دارم. همچنین مراتب سپاس و قدردانی خود از اساتید گرانقدر آقایان دکتر منصور واعظ پور و دکتر احمد موسوی و خانم دکتر معصومه نجفی نیز به خاطر خواندن پایان‌نامه و نیز به دلیل حضور در جمع داوران سپاسگزارم. و در پایان از کسانی که در این راه مشوق من بوده‌اند از جمله دوستان عزیزم فواد نادری ، اصغر قاسمی ، عقیل قدمیاری ، قاسم سلطانی ، احمد فرمانی بقا، یاسین بهروزی ، صادق امیری ، سجاد صادقی و بقیهٔ دوستان صمیمانه تشکر می‌نمایم.

عباس کرباسی

شهریور ۱۳۸۷

چکیده

فرض کنید X یک فضای باناخ نامتناهی بعد و $B(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی X باشد. در این پایان نامه که مراجع اصلی آن [٦] و [٨] هستند، ابتدا نشان می دهیم اگر $\phi : B(X) \longrightarrow B(X)$ یک نگاشت جمعی باشد طوری که برای هر $x \in X$ و $T \in B(X)$، طیف موضعی T در x تحت ϕ حفظ شود آنگاه ϕ همانی است. همچنین گسترش هایی از این نتیجه برای حالتی که Y نیز یک فضای باناخ باشد و ϕ از $B(X)$ به $B(Y)$ تعریف شده باشد، بیان می شود.

سپس انواع مختلفی از طیف ها برای اعضای جبرهای عملگری استاندارد معرفی می شوند و نشان داده می شود که اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبر های عملگری استانداردی روی فضای باناخ X باشند، $\triangle^{\mathcal{A}}(T)$ نشان دهنده هر یک از این طیف ها برای عضو $T \in \mathcal{A}$ باشد و $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نگاشت پوشا (نه لزوماً جمعی) باشد طوری که برای هر $T, S \in \mathcal{A}$

$$\triangle^{\mathcal{A}}(T+S) = \triangle^{\mathcal{B}}(\phi(T)+\phi(S))$$

$$\triangle^{\mathcal{A}}(T+2S) = \triangle^{\mathcal{B}}(\phi(T)+2\phi(S))$$

آنگاه ϕ یک یکریختی یا پادیکریختی است.

واژه‌های کلیدی :ی‌یف موضعی ، خاصیت گسترش تک مقداری ، تابع ی‌یفی ، جبر عملگری استاندارد، یکریختی.

فهرست مندرجات

مقدمه

مطالعه نگاشت های خطی روی جبر های عملگری که خاصیت های خاصی از عملگرها را حفظ می کنند در دهه اخیر بسیار مورد توجه ریاضی دان ها قرار گرفته است. بویژه نگاشت های خطی پوشا بین جبر های باناخ که حافظ طیف هستند بطور گسترده در ارتباط با یک مسئله باز موسوم به مسئله کاپالانسکی [۱] (که در رابطه با نگاشت های خطی حافظ وارون است) مطالعه شده است. در[۱۷] جعفریان [۲] و سرور[۳] نشان داده اند که نگاشت های خطی از $B(X)$ بروی $B(Y)$ (X و Y فضاهای باناخ نامتناهی بعد می باشند) که طیف را حفظ می کنند، یکریختی یا پادیکریختی می باشند. اپتیت [۴] در[۴] نشان داد که هر نگاشت خطی پوشا بین جبر های فون نیومن، یکریختی ژردن می باشد. شناسایی نگاشت های جمعی روی $B(X)$ که طیف را حفظ می کنند توسط اولمدیک [۵] و شمرل [۶] در [۲۱] آغاز شد. به جای نگاشت های خطی که طیف را حفظ می کنند می توانیم در مورد نگاشت های خطی (یا جمعی) که قسمت های مختلف طیف را حفظ می کنند، بحث کنیم. در[۲۳] شمرل نشان داد که نگاشت های پوشای خطی روی $B(X)$ که حافظ طیف نقطه ای هستند خود ریختی می باشند و وقتی X یک فضای هیلبرت باشد هر نگاشت خطی پوشا که طیف پوششی را حفظ می کند نیز یک خود ریختی است.

در این پایان نامه در فصل اول پیش نیاز ها معرفی می شوند. در فصل دوم که مبتنی بر مرجع [۸] است صورت کلی نگاشت های جمعی که طیف موضعی را حفظ می کنند مشخص شده است. به عبارت دقیق تر اگر X یک فضای باناخ و $\phi : B(X) \longrightarrow B(X)$ نگاشت جمعی باشد که برای هر

---

[۱] Kapalansky
[۲] Jafarian
[۳] Sourour
[۴] Aupetit
[۵] Olmadic
[۶] Semrl

$T \in B(X)$، $x \in X$، طیف موضعی T در x با طیف موضعی $\phi(T)$ در x برابر باشد آنگاه ϕ عملگر همانی است. البته نتایج مشابهی را برای حالتی که نگاشت های مورد بحث از B(X) به B(Y) باشند، نیز بیان می کنیم. در فصل سوم که مرجع اصلی آن [٦] است ابتدا طیف های مختلفی برای عملگری مانند $T \in B(X)$ معرفی می شوند . سپس برای جبر های عملگری استانداردی بر X مانند$\mathcal{A}$ و$\mathcal{B}$ صورت کلی نگاشت پوشایی مانند $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را که برای هر $T, S \in \mathcal{A}$ در روابط

$$\triangle^{\mathcal{A}}(T + S) = \triangle^{\mathcal{B}}(\phi(T) + \phi(S))$$

$$\triangle^{\mathcal{A}}(T + ۲S) = \triangle^{\mathcal{B}}(\phi(T) + ۲\phi(S))$$

صدق می کند، که در آن $\triangle$ هر کدام از انواع طیف های معرفی شده در این فصل هستند، مشخص می شود. در واقع نشان داده می شود ϕ به یکی از دو صورت زیر است:

۱) یک عملگر معکوس پذیر مانند $A \in B(X)$ وجود دارد به طوری که برای هر $T \in \mathcal{A}$، $\phi(T) = ATA^{-۱}$

۲)یک عملگر معکوس پذیر مانند $A \in B(X^*, X)$ وجود دارد به طوری که برای هر $T \in \mathcal{A}$ ، $\phi(T) = AT^*A^{-۱}$ بعلاوه در این حالت X انعکاسی است.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

۱.۱ فضاهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری به همراه توپولوژی τ باشد طوری که

a) زیر مجموعه های تک عضوی X بسته باشند.

b) عمل های فضای برداری نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

آنگاه (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک گوئیم.

فضای برداری توپولوژیک (X, τ) را موضعاً محدب گوئیم هرگاه دارای یک پایه موضعی مانند β باشد که اعضای آن همگی محدب اند.

تعریف ۲.۱.۱ فضای برداری توپولوژیک (X, τ) را یک F– فضا می نامیم هرگاه توپولوژی τ توسط یک متر پایای کامل تولید شده باشد.

تعریف ۳.۱.۱ یک F–فضا مانند (X, τ) را یک فضای فرشه نامیم هرگاه موضعاً محدب نیز باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. در این صورت X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X با متریک حاصل از نرمش کامل باشد. به عبارت دیگر X فضای باناخ است هر گاه هر دنباله کشی در $(X, \|.\|)$ همگرا باشد.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه۱–۲۰[۲۲]) فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و Y یک زیرفضای متناهی بعد آن باشد، در این صورت Y بسته است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی بین دو فضای نرم دار X و Y باشد. نرم T با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\}$$

اگر $\|T\|$ متناهی باشد T یک عملگر خطی کراندار نامیده می شود.

مجموعه تمام عملگر های خطی و کراندار از فضای نرم دار X به‌فضای نرم دار Y را با $B(X, Y)$ نمایش می دهیم. ثابت می شود که هرگاه Y فضای باناخ باشد، $B(X, Y)$ همراه با نرم عملگر خطی کراندار ، باناخ است. بنابراین هرگاه $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد ، $B(X) = B(X, X)$ فضای باناخ است.

تعریف ۶.۱.۱ برای فضای نرم دار X ، فضای باناخ $B(X, \mathbb{C})$ را دوگان X نامیم و با X^* نشان می دهیم.

برای فضای نرمدار X گاهی اوقات اثر $f \in X^*$ را بر عضو $x \in X$ با $\langle x, f \rangle$ نمایش می دهیم. توپولوژی ضعیف روی فضای نرمدار X توپولوژی القا شده توسط X^* است و همچنین توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* توپولوژی القا شده توسط X (به عنوان زیر فضایی از X^{**}) روی X^* است.

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه۴–۱۰ [۲۲]) فرض کنید X و Y فضاهای نرم دار باشند، برای هر $T \in B(X, Y)$ یک عملگر منحصر به فرد مانند $T^* \in B(Y^*, X^*)$ وجود دارد به طوری که برای هر

$x \in X$ و $y^* \in Y^*$ ، $\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle$ و $\|T\| = \|T^*\|$.

عملگر T^* به دست آمده از قضیه قبل را عملگر الحاقی وابسته به T می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ، M یک زیر فضای X و N یک زیر فضای X^* باشد. در این صورت پوچ سازهای $M^\perp$ و $^\perp N$ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : < x, x^* > = \circ \quad \text{برای هر } x \in M\}$$

$$^\perp N = \{x \in X : < x, x^* > = \circ \quad \text{برای هر } x^* \in N\}$$

قضیه ۳.۱.۱ (قضیه ۴—۷[۲۲]). فرض کنید X یک فضای باناخ، M یک زیر فضای X و N یک زیر فضای X^* باشد. آنگاه

a) $^\perp(M^\perp)$ برابر بستار M در X است.

b) $(^\perp N)^\perp$ برابر بستار N نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره X^* است.

قضیه ۴.۱.۱ (قضیه ۳—۵[۲۲]) فرض کنید M یک زیر فضای فضای باناخ X باشد و $x_\circ \in X$. اگر $x_\circ$ در بستار M قرار نداشته باشد آنگاه عضوی مانند $\Lambda \in X^*$ طوری وجود دارد که $\Lambda(x_\circ) = ۱$ و برای هر $x \in M$، $\Lambda(x) = \circ$

قضیه ۵.۱.۱ (قضیه۲—۱۱ [۲۲]) (نگاشت باز) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X, Y)$ عملگری پوشا باشد. در این صورت T باز است.

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ جبر مختلط A را یک جبر باناخ گوئیم هرگاه A همراه با نرمی مانند $\|.\|$ یک فضای باناخ بوده و نامساوی $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ برای هر $x, y \in A$ برقرار باشد. اگر A شامل عضوی مانند e

باشد به طوری که برای هر $x \in A$، $xe = ex = x$، A را یک جبر یکدار گوئیم. در جبر باناخ A با یکه e می توان فرض کرد $\|e\| = 1$. همچنین اگر برای هر $x, y \in A$، $xy = yx$ آنگاه A یک جبر باناخ تعویض پذیر نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد یک برگشت یک نگاشت $a \mapsto a^*$ از A به A است طوری که برای هر $a, b \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

۱) $(a^*)^* = a$

۲) $(ab)^* = b^* a^*$

۳) $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$

تعریف ۳.۲.۱ یک جبر باناخ مانند A همراه با یک برگشت مانند $*$ را که برای هر $a \in A$ ، $\|a\|^2 = \|aa^*\|$ یک C^* − جبر می نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ C^* جبر A را یک جبر فون نیومن نامیم هرگاه فضای باناخی مانند E موجود باشد طوری که $A \cong E^*$ (به عنوان فضای باناخ).

مثال ۱.۲.۱ الف) فرض کنید $C(K)$ فضای باناخ همه توابع مختلط پیوسته روی فضای هاسدورف فشرده و ناتهی K باشد. به راحتی دیده می شود که $C(K)$ به همراه ضرب توابع و $\|.\|_\infty$ (سوپریمم نرم روی K) یک جبر باناخ تعویض پذیر بوده و تابع ثابت یک ، عضو یکه این جبر می باشد. بعلاوه $C(\mathbb{R})$ با عمل مزدوج گیری به عنوان برگشت یک C^*− جبر است.

ب) هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد ، $B(H)$ یعنی فضای تمام عملگر های خطی کراندار روی H، به همراه نرم عملگری و عمل ترکیب توابع به عنوان ضرب ونگاشت الحاق به عنوان برگشت یک C^* − جبر می باشد که نگاشت همانی I ، عضو یکه آن است .

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند، نگاشت $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ راهمریختی جبری نامیم هرگاه φ اعمال روی $\mathcal{A}$ (جمع، ضرب اسکالر، و ضرب) را حفظ کند.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند، نگاشت $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را پاد همریختی جبری نامیم هرگاه φ اعمال جمع و ضرب اسکالر را حفظ کند و همچنین برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند، همریختی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ رایکریختی جبری نامیم هرگاه φ دوسویی باشد. هم ریختی جبری $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را یک خود ریختی جبری نامیم هرگاه ϕ دوسویی باشد.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را که برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $\varphi(xy + yx) = \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)$ یک همریختی ژردن می نامیم.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد و $x \in \mathcal{A}$. طیف x در $\mathcal{A}$ که با $\sigma(x)$ نمایش داده می شود عبارت است از مجموعه همه اعداد مختلط λ بطوریکه $x - \lambda e$ در $\mathcal{A}$ وارون پذیر نباشد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه ۱۰–۱۳[۲۲]) اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x \in \mathcal{A}$ آنگاه $\sigma(x)$ مجموعه ای فشرده و ناتهی است.

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه ۶–۴[۲۵]) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد آنگاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ ، Ω زیر مجموعه بازی از صفحه اعداد مختلط و $H(\Omega)$ جبر همه توابع تحلیلی مختلط در Ω

$$A_\Omega := \{x \in A : \sigma(x) \subseteq \Omega\}$$

حال $\widetilde{H}(A_\Omega)$ مجموعه تمام توابع A مقدار مانند $\widetilde{f}$ که برای یک $f \in H(\Omega)$ به صورت

$$\widetilde{f}(x) := \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-۱} d\lambda$$

که در آن Γ مرز در بر گیرنده $\sigma(x)$ در Ω است تعریف می کنیم.

خواننده می تواند برای مطالعه بیشتر در مورد این تعریف و مفهوم انتگرال بکار رفته در آن به [۲۲] مراجعه کند.

قضیه ۳.۲.۱ (قضیه ۱۰—۲۸ [۲۲])(قضیه نگاشت طیفی) با مفروضات بالا فرض کنید $x \in A_\Omega$ باشد و $f \in H(\Omega)$ آنگاه

$$\sigma(\widetilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$$

فرض کنید X یک فضای باناخ و $T \in B(X)$ عملگری دلخواه باشد. بنا به تعریف ۹.۲.۱ طیف عملگر T در جبر باناخ $B(X)$ برابر است با $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :$ وارون پذیرنباشد $T - \lambda I\}$. از این پس هسته و برد یک عملگر دلخواه مانند $T : X \longrightarrow Y$ را که در آن X و Y فضا های نرمدار هستند، با $Ker(T)$ و $range(T)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱ برای عملگر $T \in B(X)$ که در آن X یک فضای باناخ است، طیف نقطه‌ای و پوشایی T به ترتیب با مجموعه های زیر تعریف می شوند

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{یک به یک نیست } T - \lambda I\}$$

$$\sigma_{su}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{پوشا نیست } T - \lambda I\}$$

با استفاده از قضیه نگاشت باز رابطه زیر را برای هر $T \in B(X)$ داریم:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{su}(T)$$

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید K یک زیر مجموعهٔ فشرده ای از صفحه اعداد مختلط باشد. پوش محدب چند جمله‌ای K را که با $\widehat{K}$ نمایش می دهیم عبارتست از تمام نقاطی مانند $\lambda \in \mathbb{C}$ طوری که

برای هر چند جمله ای مانند p در صفحه مختلط $\|p\|_K \geq |p(\lambda)|$ که در آن $\|p\|_K$ نرم سوپریمم p روی K است.

مجموعهٔ فشرده K را محدب چند جمله‌ای نامیم هرگاه $\widehat{K} = K$.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید X و Y فضا های باناخ باشند و U گوی واحد باز X باشد. عملگر $T \in B(X, Y)$ ، یک عملگر فشرده نامیده می شود ، اگر بستار $T(U)$ در Y فشرده باشد.

به عنوان مثال برای فضاهای باناخ X و Y هر عملگر $T \in B(X, Y)$ که $dim(range(T)) < \infty$ فشرده است.

قضیه ۴.۲.۱ (قضیه ۴–۲۵ [۲۲]) فرض کنید X یک فضای باناخ ، $T \in B(X)$ یک عملگر فشرده باشد و $\lambda \neq 0$

الف) اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned}
\alpha &= dim(Ker(T - \lambda I)) \\
\beta &= dim(X / range(T - \lambda I)) \\
\alpha^* &= dim(Ker(T^* - \lambda I)) \\
\beta^* &= dim(X^* / range(T^* - \lambda I))
\end{aligned}$$

آنگاه هر چهار مقدار فوق با هم برابر و همگی متناهی هستند.

ب) اگر $\lambda \in \sigma(T)$ آنگاه λ یک مقدار ویژه برای T و T^* است.

ج) مجموعه فشرده $\sigma(T)$ حداکثر شمارا است.

۳.۱ عملگر های با رتبه متناهی

در سراسر این پایان نامه منظور ما از $\mathcal{F}(X)$، برای فضای باناخ X، مجموعه تمام عملگرهای با رتبه متناهی فضای $B(X)$، $\mathcal{F}_1(X)$ مجموعه تمام عملگرهای با رتبه یک فضای $B(X)$ و $\mathcal{F}_2(X)$ مجموعه همه عملگرهای با رتبه حداکثر دو از $B(X)$ می باشد.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای باناخ و X^* دوگان X باشد. برای $x \in X$ و $f \in X^*$ عملگر $x \otimes f$ روی X بصورت زیر تعریف می شود

$$(x \otimes f)(y) = f(y)x \qquad (y \in X)$$

بدیهی است که عملگر فوق دارای رتبه یک می باشد.

لم ۱.۳.۱ اگر X یک فضای باناخ و $A \in B(X)$ یک عملگر با رتبه n باشد آنگاه A را می توان بصورت ترکیب خطی n عملگر بصورت $x \otimes f$ نوشت که در آن $x \in X$ و $f \in X^*$.

برهان. از آنجا که $dim(range(A)) = n$ اعضای مستقل خطی $y_1, y_2, \cdots, y_n \in range(A)$ وجود دارند طوری که $range(A) = span\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. از طرفی برای هر $y \in A(X)$، اسکالرهای منحصر بفرد $\alpha_1(y), \cdots, \alpha_n(y) \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) y_i$. با توجه به اینکه $range(A)$ متناهی بعد است هر α_i یک تابعک خطی پیوسته روی $range(A)$ می باشد. فرض کنیم برای هر i، تابعک خطی f_i با ضابطه $f_i(y) = \alpha_i(Ay)$، $y \in X$، تعریف شده باشد. بدیهی است $f_i \in X^*$، $1 \leq i \leq n$. حال با توجه به رابطه $Ay = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) y_i$، $y \in X$ ، نتیجه می شود $A = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes f_i$.■

در گزاره زیر دسته ای از خواص عملگر های با رتبه یک آورده شده است که به سادگی قابل بررسی هستند. از این پس فرض خواهیم کرد X یک فضای باناخ است.