دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

تعویضگر عملگرهای ضربی تحلیلی

استاد راهنما

دکتر حسین امامعلی پور

استاد مشاور

دکتر محمدرضا جبارزاده

پژوهشگر

ناهده عبادی

۱۳۸۹

تقدیم به

مولایم علی (ع)

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و آن را وجه تمایز انسان با سایر مخلوقات قرار داد.

در آغاز وظیفه خود می دانم مراتب تشکر و قدردانی قلبی خود را از همه اساتید بزرگوارم که طی دوره تحصیل از دانش و فضل ایشان بهره مند گردیده ام، ابراز دارم.

از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حسین امامعلی پور که در طول انجام این پایان نامه با حسن اخلاق و صبورانه مرا یاری نمودند و تجربه و دانش خود را بی دریغ در اختیارم قرار دادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین سپاسگذارم از جناب آقای دکتر محمدرضا جبارزاده که مطالعه و مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند. از آقای دکتر رنجبر بخاطر قبول زحمت بازخوانی و داوری پایان نامه و آقای دکتر عبادیان بخاطر راهنماییهای ارزنده ایشان تشکر می نمایم.

از همه دوستان و همکلاسیهای عزیزم بخاطر همه لحظات و خاطرات خوشی که در طول دوران تحصیل در کنارشان داشتم، از صمیم قلب تشکر و قدردانی می کنم.

در نهایت درود و سپاس می فرستم به روان پاک پدر عزیزم که هر چه دارم از اوست و سپاس می گویم مادر مهربانم و همسرم را، که همواره مشوق و مایه دلگرمی من بوده اند.

نام خانوادگی: عبادی نام: ناهده

عنوان پایان‌نامه: تعویضگر عملگرهای ضربی تحلیلی

استاد راهنما: دکتر حسین امامعلی‌پور

استاد مشاور: دکتر محمدرضا جبارزاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۶۸

کلیدواژه‌ها: فضای باناخ توابع تحلیلی، تابع تک‌ارز، ضربگر، عملگر ضربی، تعویضگر

چکیده

در این پایان‌نامه تعویضگر عملگرهای ضربی را در دو بخش مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش اول B را فضای باناخ توابع پیوسته‌ی تعریف شده روی دیسک واحد باز، به انضمام شرایطی خاص روی این فضا و φ را تابع تک‌ارز تعریف شده روی $\overline{D}$ در نظر می‌گیریم و در بخش دوم این فضا را با شرایطی جدید شامل توابع تحلیلی تعریف شده روی حوزه‌ی کراندار G در صفحه مختلط در نظر گرفته و فرض می‌کنیم تابع φ متعلق به B، روی G تحلیلی و روی $\overline{G}$ پیوسته باشد. سپس فرض می‌کنیم M_φ عملگر ضرب به وسیله φ باشد و فرم عملگرهایی مانند T را مشخص می‌کنیم که به ازای آنها داشته باشیم $M_\varphi T = TM_\varphi$. ثابت می‌کنیم تحت شرایطی، وجود دارد $\psi : G \to G$، که به ازای آن $T = M_\psi$.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

در این فصل به بیان مقدمه و پیشینه‌ی موضوع می‌پردازیم. سپس تعاریف و مفاهیمی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت را ارائه می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه و پیشینه تحقیق

مفهوم یک مضرب اولین بار در آنالیز هارمونیک در ارتباط با تئوری جمع‌پذیری سریهای فوریه مطرح شد. از یک مضرب در مطالعه خواص تبدیل فوریه و بسطهای آن، تحقیق روی هومومرفیسم گروه جبرها، مطالعه سریهای فوریه مزدوج و سریهای فوریه حفره‌ای استفاده می‌شود. البته مضربها در موارد دیگری نیز به کار رفته‌اند که از آن جمله می‌توان به نظریه عمومی جبرهای باناخ، نظریه نمایش جبرهای باناخ و گروههای فشرده موضعی، مطالعه مدولهای باناخ، نظریه درونیابی فرایندهای تصادفی، معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز مسائل بررسی وجود میانگین‌های پایا اشاره کرد. در این پایان‌نامه، کاربردهای تئوری مضربها مطرح نمی‌گردد بلکه هدف محاسبه‌ی تعویضگرهای عملگرهای ضربی است.

در سال ۱۹۷۱ شیلدز و والن [۱۴] در مقاله‌ای شرایطی برای تعویضگرهای یک تبدیل خطی کراندار T روی فضای هیلبرت مشخص را مورد مطالعه قرار داده و تعویضگرهای M_φ و در حالت خاص M_z را بررسی نمودند. به‌وسیله یک تغییر جزئی در روش آنها، ریچتر [۱۰] تعویضگر M_z را روی فضاهای باناخ از توابع به‌دست آورد. پس از آن محققین دیگری به مطالعه در این زمینه پرداختند. تعویضگرهای عملگر توپلیتز روی فضای هیلبرت مشخص از توابع، به وسیله ریاضیدان‌های بسیاری از جمله تامسون [۱۵] و [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. اکسلر و سوسکویس [۱] در سال ۱۹۹۱ تعویضگر M_{z^n} را روی فضای برگمن $L_a^2(D)$ پیشنهاد کردند. صدیقی و واعظ‌پور [۱۳] تعویضگرهای عملگرهای ضربی را روی فضای هیلبرت، تحت شرایط خاص از توابع تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۰۰ اکسلر و همکاران [۲] نشان دادند که اگر دو عملگر توپلیتز روی فضای برگمن جابجا شوند و یکی از آنها تحلیلی و غیرثابت باشد، دیگری تحلیلی است. در سال ۲۰۰۰ خانی رباطی [۶] طی مقاله‌ای که مقدمه‌ی مقاله‌ی مشترک ایشان با واعظ‌پور است، شرایطی را بررسی کردند که تحت آن شرایط مجموعه‌ی تعویضگرهای M_{z^2} روی فضای باناخ از توابع تحلیلی محاسبه می‌شود. در این مقاله فضای باناخ B از توابع مختلط و تحلیلی روی دیسک واحد باز D در نظر گرفته شده که دارای شرایطی خاص است. همچنین در این مقاله تعویضگر M_{z^n} روی فضای هیلبرت مشخص از توابع مورد مطالعه قرار گرفته است.

در ادامه‌ی مقاله‌ی فوق، واعظ‌پور به همراه خانی رباطی مقاله‌هایی را در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۳ منتشر کردند که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می‌گیرند [۷] و [۸] .

ساختار پایان‌نامه‌ی حاضر به این شکل است که ابتدا در ادامه‌ی این فصل تعاریف، قضایا

و مفاهیم اولیه‌ی موردنیاز در فصلهای دیگر بیان می‌شود. سپس در فصل دوم به بحث در مورد تعویضگر عملگرهای ضربی از توابع تک‌ارز می‌پردازیم. نهایتا در فصل سوم تحت شرایط معینی تعویضگر عملگرهای ضربی تحلیلی را محاسبه می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری روی میدان $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ باشد، گوییم

$$\langle . \rangle : X \times X \to F$$

یک ضرب داخلی روی X است، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ و هر α متعلق به F خواص زیر برقرار باشد:

(۱) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(۲) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(۳) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(۴) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(۵) $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

بنابر (۴) می‌توان، نرم بردار $x \in X$ را ریشه‌ی دوم نامنفی $< x, x >$ تعریف کرد. لذا

$$\| x \|^2 = < x, x >.$$

تعریف ۲.۲.۱. تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را یك نرم می‌نامیم اگر به ازای هر $x, y \in X$ و هر α متعلق به F، در سه خاصیت زیر صدق نماید:

(۱) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$

(۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

(۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۳. فضای هیلبرت H یک فضای ضرب داخلی است که با متر تعریف شده توسط نرم حاصل از ضرب داخلی‌اش تام باشد، یعنی هر دنباله کشی در H، همگرا به عضوی در H باشد.

تعریف ۱.۲.۴. یک فضای خطی نرم‌دار را فضای باناخ گوییم، هرگاه با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش تام باشد.
به وضوح هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ و هر فضای باناخ یک فضای متری است.

تعریف ۱.۲.۵. فضای H^p
فرض می‌کنیم T دایره واحد در صفحه مختلط باشد. به ازای تابع پیوسته f با دامنه‌ی U تعریف می‌کنیم $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ و قرار می‌دهیم:

$$\|f_r\|p = \{\int_T |f_r|^p d\sigma\}^{\frac{۱}{p}} \quad , (۰ < p < \infty)$$

که σ اندازه لبگ روی T بوده و $\sigma(T) = ۱$.
همچنین داریم:

$$\| f_r \|_\infty = \sup_\theta |f(re^{i\theta})|$$

و

$$\| f_r \|_۰ = exp \int_T log^+ |f_r| d\sigma$$

که در آن به ازای هر عدد حقیقی t، تعریف می‌کنیم:

$$\log^+ t = \begin{cases} \log t & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

اگر $H(U)$ مجموعه‌ی توابع تحلیلی روی U، f متعلق به $H(U)$ و $0 \leqslant P \leqslant \infty$ باشد، قرار می‌دهیم:

$$\|f\|_p = sup\{\|f_r\|_p : 0 \leqslant r < 1\}$$

اگر $0 < p \leqslant \infty$، H^p را کلاس همه $f \in H(U)$ هایی تعریف می‌کنیم که $\|f\|_p < \infty$.

لازم به ذکر است هر گاه $1 \leqslant p \leqslant \infty$، H^P یک فضای باناخ است [۵].

تعریف ۶.۲.۱. فرض می‌کنیم تابع مختلط f در مجموعه‌ی باز $\Omega \subset \mathbb{C}$ تعریف شده باشد. اگر $f'(z_0)$ به ازای هر $z_0 \in \Omega$ موجود باشد، می‌گوییم تابع f در Ω تحلیلی است.
رده‌ی تمام توابع تحلیلی در Ω را با $H(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. گوییم دنباله‌ی $\{f_j\}$ از توابع در Ω، به طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشرده‌ی Ω همگرا به f است، اگر به ازای هر $K \subset \Omega$ی فشرده و $\epsilon > 0$ عددی مانند $N = N(K, \epsilon)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر z در K و $j > N$،

$$|f_j(z) - f(z)| < \epsilon.$$

قضیه ۸.۲.۱. *فرض می‌کنیم به ازای* $j = 1, 2, 3, ...$، $f_j \in H(\Omega)$ *و* $f_j \to f$ *به طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشرده‌ی* Ω. *در این صورت* $f \in H(\Omega)$ *و* $f'_j \to f'$ *به طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشرده‌ی* Ω.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۱] رجوع شود. □

قضیه ۱.۲.۹. *فرض می‌کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$، و*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = ۰\}$$

در این صورت $Z(f) = \Omega$ یا $Z(f)$ نقطه‌ی حدی در Ω ندارد. در حالت دوم به هر $a \in Z(f)$ عدد صحیح مثبت منحصر بفردی مانند $m = m(a)$ چنان نظیر است که

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega)$$

که در آن $g \in H(\Omega)$ و $g(a) \neq ۰$. به علاوه، $Z(f)$ حداکثر شمارش‌پذیر است.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۱] رجوع شود. □

نتیجه ۱.۲.۱۰. *هرگاه f و g توابع هلوریخت در ناحیه‌ی Ω بوده و به ازای هر z در مجموعه‌ای که یک نقطه‌ی حدی در Ω دارد $f(z) = g(z)$، آنگاه به ازای هر $z \in \Omega$، $f(z) = g(z)$.*

به عبارت دیگر، یک تابع هلوریخت در ناحیه‌ای مانند Ω به وسیله‌ی مقادیرش بر هر مجموعه که یک نقطه‌ی حدی در Ω دارد معین است.

برهان. تعریف می‌کنیم $h = f - g$. در این صورت از آنجا که $f, g \in H(\Omega)$، بنابراین $h \in H(\Omega)$. از طرفی بنا به فرض $Z(h)$ یک نقطه حدی در Ω دارد و در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱.۲.۹، $Z(h) = \Omega$. پس به ازای هر z متعلق به Ω داریم:

$$f(z) = g(z).$$

□

قضیه ۱۱.۲.۱. *(اصل مدول ماکزیمم). فرض می‌کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$. در این صورت*

$$| f(a) | \leq \max_{\theta} | f(a+re^{i\theta}) | .$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f در Ω ثابت باشد.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۱] رجوع شود. □

تعریف ۱۲.۲.۱. فضای برگمن

فرض می‌کنیم Ω زیر مجموعه‌ای باز در صفحه‌ی اعداد مختلط و $1 \leqslant p < \infty$ باشد. در این صورت فضای برگمن $L_a^p(\Omega)$ عبارت است از فضای خطی کلیه‌ی توابع تحلیلی $f : \Omega \to \mathbb{C}$، به قسمی که $\int_{\Omega} |f|^p dA < \infty$. A اندازه دو بعدی مساحت (نرمالیزه شده) بوده و $\|f\|_p$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f|^p dA)^{\frac{1}{p}}.$$

در حالت خاص $p = \infty$، فضای برگمن $L_a^p(\Omega)$ عبارت است از مجموعه‌ی کلیه‌ی توابع تحلیلی کراندار $f : \Omega \to \mathbb{C}$ که نسبت به نرم

$$\|f\|_{\infty} = sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$$

یک فضای باناخ است. این فضا اغلب به صورت $H^{\infty}(\Omega)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض می‌کنیم X و Y فضاهای متریک باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را لیپ شیتس گوییم هرگاه ثابت $a \geq 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $p, q \in X$،

$$\rho(f(p), f(q)) \leq a.\rho(p, q).$$

کمترین مقدار چنین a هایی شماره‌ی لیپ شیتس f نامیده شده و با $L(f)$ نشان داده می‌شود. اگر $0 < \alpha < 1$ بوده، $f : X^\alpha \to Y$ و $L(f) < \infty$ باشد، f را نگاشت لیپ شیتس از مرتبه‌ی α می‌نامیم.

اگر X فضای متریک با متر ρ باشد X^α یک فضای متری، با متر ρ^α می‌باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض می‌کنیم X و Y دو فضای برداری روی میدان K باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را خطی گوییم، هرگاه به ازای هر x, y در X و به ازای هر α در F،

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

فضای تمام تبدیلات خطی از X به Y را با $L(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض می‌کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ یك نگاشت خطی باشد. گوییم T کراندار است اگر عدد $k > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|Tx\| \leq k\|x\|.$$

قضیه ۱۶.۲.۱. *فرض می‌کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار، $B(X, Y)$ گردایه تمام تبدیلات خطی کراندار از X به توی Y و X^* دوگان X باشد. در این صورت به هر T متعلق به $B(X, Y)$ یك T^* منحصر به فرد در $B(Y^*, X^*)$ نظیر است که به ازای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$ در رابطه‌ی*

$$\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^* y^* \rangle$$

صدق می‌کند. همچنین داریم $\|T\| = \|T^*\|$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۲] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض می‌کنیم X فضای باناخ، M زیر فضای X و N زیر فضای X^* باشد. پوچ‌سازهای این زیر فضاها را با $M^\perp$ و $^\perp N$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : \ \forall x \in M \ , \ < x, x^* >= 0\}$$

$$^\perp N = \{x \in X : \ \forall x^* \in N \ , \ < x, x^* >= 0\}$$

قضیه ۱.۲.۱۸. *فرض می‌کنیم* X *و* Y *فضاهای باناخ بوده و* T *متعلق به* $B(X,Y)$ *باشد. در این صورت داریم:*

$$N(T^*) = R(T)^\perp \qquad , \qquad N(T) = {}^\perp R(T^*)$$

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۲] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض می‌کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار بوده و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. T را فشرده گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی کراندار $M \subseteq X$، $\overline{T(M)}$ فشرده باشد.

لم ۱.۲.۲۰. *فرض می‌کنیم* X *و* Y *فضاهای نرم‌دار باشند. در این صورت،*

(۱) *هر عملگر فشرده‌ی* $T : X \to Y$ *کراندار است.*

(۲) *اگر* $dimX = \infty$*، آنگاه* $I : X \to X$ *فشرده نیست.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۹] رجوع شود. $\square$

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. گردایه‌ی Σ از زیرمجموعه‌های X را یک σ - جبر در مجموعه‌ی X می‌نامیم هرگاه:

(i) $X \in \Sigma$

(ii) اگر $A \in \Sigma$، آنگاه $A^c \in \Sigma$

(iii) اگر $A_n \in \Sigma$، $(n = ۱, ۲, \ldots,)$، آنگاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

اگر Σ یک σ - جبر روی مجموعه‌ی X باشد، X را فضای اندازه‌پذیر و اعضای Σ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گوییم.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض می‌کنیم (X, Σ) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. تابع مجموعه‌ای $\mu : \Sigma \to [۰, \infty]$ را یک اندازه‌ی مثبت بر σ - جبر Σ می‌نامیم هرگاه:

(i) μ به طور شمارا جمع‌پذیر باشد. یعنی برای هر گردایه‌ی $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ که $A_i \in \Sigma$، داشته باشیم:

$$\mu(\cup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=۱}^{\infty} \mu(A_i).$$

(ii) مجموعه‌ای مانند $A \in \Sigma$ موجود باشد که $\mu(A) < \infty$.

با شرایط فوق (X, Σ, μ) را فضای اندازه و این فضا را σ - متناهی می‌نامیم، هرگاه بتوان X را به صورت $X = \cup_{i=۱}^{\infty} E_i$ نوشت که در آن $E_i \in \Sigma$ و $\mu(E_i) < \infty$، $(i = ۱, ۲, \ldots)$.

تعریف ۲۳.۲.۱. فضای L^p

فرض می‌کنیم X فضای اندازه‌ی دلخواه با اندازه‌ی مثبت μ باشد. اگر $0 < p < \infty$ و f تابع اندازه‌پذیر مختلط روی X باشد، تعریف می‌کنیم:

$$||f||_p = \{\int_X \mid f \mid^p d\mu\}^{1/p}$$

$L^p(\mu)$ را فضای همه‌ی f هایی در نظر می‌گیریم که $||f||_p < \infty$ و $||f||_p$ را L^p - نرم f می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض می‌کنیم (X, Σ, μ) فضای اندازه‌ی σ - متناهی و $L(X)$ فضای خطی توابع Σ - اندازه‌پذیر روی X باشد. اگر $u \in L(X)$ دلخواه باشد، آنگاه u یک عملگر خطی مانند M_u از $L^p(X)$ به توی $L(X)$ به صورت زیر القا می‌کند:

$$(M_u f)(x) = u(x)f(x).$$

در این صورت M_u را عملگر ضربی از $L^p(X)$ به توی $L(X)$ می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض می‌کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار روی میدان K بوده و

$$A : D(A) \subseteq X \to Y$$

عملگر خطی باشد. مجموعه‌ی

$$G(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

را گراف A نامند.

تعریف ۲۶.۲.۱. عملگر A را بسته گوییم، هرگاه گراف A در $X \times Y$ بسته باشد. بدین معنی که به ازای هر دنباله‌ی $\{x_n\} \subseteq D(A)$، اگر $x_n \longrightarrow x$ و $Ax_n \longrightarrow y$، آنگاه $y = Ax$.

قضیه ۱.۲.۲۷. (قضیه‌ی گراف بسته) *اگر X و Y فضاهای باناخ روی میدان K باشند و $A : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی بسته باشد، آنگاه عملگر A پیوسته است.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۸] رجوع کنید. $\square$

فصل ۲

تعویضگر عملگرهای ضربی از توابع تک ارز

در این فصل ابتدا به معرفی فضای باناخ B می‌پردازیم که در شرایط خاصی صدق می‌کند. سپس با ارائه مثالهایی امکان وجود چنین فضایی را نشان می‌دهیم. همچنین برخی تعاریف و مقدماتی را که در ادامه‌ی پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت بیان نموده و در انتها به محاسبه‌ی تعویضگر M_φ روی فضای مذکور می‌پردازیم.

۱.۲ فضای باناخ توابع پیوسته

فرض می‌کنیم B فضای باناخ از توابع پیوسته‌ی تعریف شده روی دیسک واحد باز باشد به طوری که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $1 \in B$, $zB \subset B$.

(۲) *برای هر* $\lambda \in D$ *، تابعک ارزیاب* $e_\lambda : B \to C$ *با ضابطه* $f \to f(\lambda)$ *کراندار است.*

(۳) برای هر $\lambda \in D$، $dimker\,(M_z - \lambda)^\star = 1$.

(۴) اگر $f \in B$ و f دارای توسیع تحلیلی در یک همسایگی از $\lambda \in D$ باشد، آنگاه $\frac{f - f(\lambda)}{z - \lambda}$ در B خواهد بود. همچنین برای هر $\lambda \in D$، زیر فضایی از B شامل توابعی که دارای توسیع تحلیلی در یک همسایگی λ هستند، در B چگال است.

(۵) برای هر $f \in B$ ، تابع $\hat{f}$ با ضابطه $\hat{f}(\lambda) = f(-\lambda)$ متعلق به B است و $\| \hat{f} \| = \| f \|$.

(۶) اگر $f \in B$ و به ازای هر $\lambda \in D$، $| f(\lambda) | > c > 0$، آنگاه $\frac{1}{f}$ ضربگری از B است.

لم ۱.۱.۲. فرض می‌کنیم Ω زیرمجموعه‌ی باز و همبند از صفحه‌ی مختلط و $B \neq \{0\}$ فضای باناخ با شرایط زیر باشد:

(۱) B زیرفضای برداری از فضای همه‌ی توابع تحلیلی روی Ω است.

(۲) به ازای هر $\lambda \in \Omega$ ، تابعک ارزیاب e_λ پیوسته است.

(۳) اگر f تابعی در B باشد آنگاه، $zf \in B$.

در این صورت تساوی $ran(M_z - \lambda) = kere_\lambda$ با هر دسته‌ی سه‌تایی زیر معادل است:

الف:

(۱) برای هر $\lambda \in \Omega$ ، وجود دارد $g \in B$ که $g(\lambda) \neq 0$.

(۲) به ازای هر $\lambda \in \Omega$ ، $(M_z - \lambda)$ از پایین کراندار است.

(۳) وجود دارد $\lambda_0 \in \Omega$ به طوری که اگر $f \in B$ و $f(\lambda_0) = 0$ ، آنگاه وجود دارد $g \in B$ به طوری که $(z - \lambda_0)g = f$.