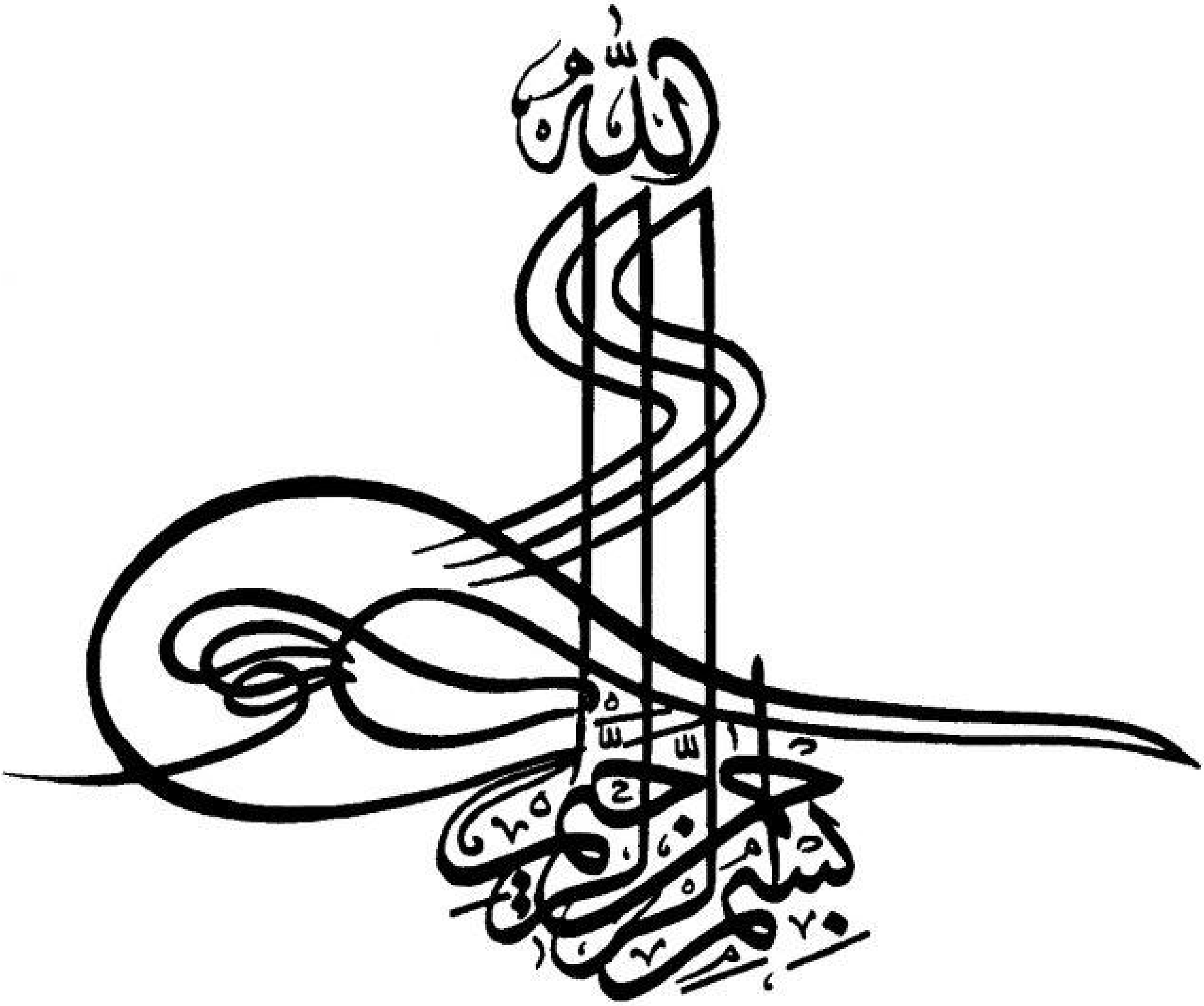

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب معصومه حسن‌زاده نودهی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۸۹۲۲٤۱۳۱۲۱ که در تاریخ ۹۲/۰٦/۲۷ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "مدولهای قویاً گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست- اولین، دومین و سومین قضیه تغییر حلقه پایه برای بعدهای گرنشتاین" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

٤) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

٦) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام‌خانوادگی دانشجو: معصومه حسن‌زاده نودهی

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

مدولهای قویاً گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست- اولین، دومین و سومین قضیه تغییر حلقه پایه برای بعدهای گرنشتاین

استاد راهنما:

دکتر احمد خوجالی بارنجی

استاد مشاور:

دکتر ناصر زمانی

پژوهشگر:

معصومه حسن‌زاده نودهی

شهریور۱۳۹۲

نام خانوادگی: حسن‌زاده نودهی نام: معصومه

عنوان پایان‌نامه: مدولهای قویاً گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست- اولین، دومین و سومین قضیه تغییر حلقه پایه برای بعدهای گرنشتاین

استاد راهنما: دکتر احمد خوجالی بارنجی
اساتید مشاور: دکتر ناصر زمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: جبر
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع:۹۲/۰۶/۲۷ تعداد صفحات: ۸۵

چکیده
در این پایان نامه به مطالعه رده خاصی از مدولهای گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست می پردازیم که با استفاده از آن به رده بندی جدیدی از مدولهای گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست دست می یابیم. سپس، با استفاده از نتایج بدست آمده قضایای تغییر پایه برای بعدهای گرنشتاین را اثبات می نماییم. تمامی این موارد توسیع قضایایی است که برای $G-dim$ مدولهای با تولید متناهی ثابت شده است.

کلیدواژه‌ها: مدولهای گرنشتاین پروژکتیو، مدولهای گرنشتاین انژکتیو و مدولهای گرنشتاین یکدست

Surname: Hasanzade Nodehi Name: Masoome

Title: Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules- First, second, and third change of rings theorems for Gorenstein homological dimenations

---

Supervisor: Ahmad Khojali Baranji

Advisor: Naser Zamani

Graduate Degree: M.Sc.

Major: Pure Mathematics Specialty: Algebra

University: Mohaghegh Ardabili Faculty: Mathematics Sciences

Date: September 2013 Number of Pages: 85

Abstract

In basic homological algebra, the projective, injective and flat dimensions of modules play an important and fundamental role. In this thesis, the closely related Gorenstein projective, Gorenstein injective and Gorenstein flat dimensions are studied. There is a variety of nice results about Gorenstein dimensions over special commutative noetherian rings; very often local Cohen–Macaulay rings with a dualizing module. These results are done by Avramov, Christensen, Enochs, Foxby, Jenda, Martsinkovsky and Xu among others. The aim of this thesis is to generalize these results, and to give homological descriptions of the Gorenstein dimensions over arbitrary associative rings.

Keywords: Gorenstein projective modules, Gorenstein injective modules, and Gorenstein flat module

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

مدولهای قویاً گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست- اولین، دومین و سومین قضیه تغییر حلقه پایه برای بعدهای گرنشتاین

پژوهشگر:

معصومه حسن‌زاده نودهی

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ....

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضا
احمد خوجالی بارنجی	استاد راهنما و رئیس کمیته داوران	استادیار	....
ناصر زمانی	استاد مشاور	دانشیار	....
حسین عبدل‌زاده	داور	استادیار	....

شهریور ۱۳۹۲

University of Mohaghegh Ardabili
Faculty of Mathematical Sciences
Department of Mathematics and Applications

Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of M.Sc. in Pure Mathematics

Title:

Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules- First, second, and third change of rings theorems for Gorenstein homological dimenations

By:

Masoome Hasanzade Nodehi

Evaluated and approved by thesis committee as ....

Name & Famliy	Degree	Responsibility	Signature
Ahmad Khojali Baranji	Assist. Prof	Supervisor & Chairman	....
Naser Zamani	Assoc. Prof	Advisor	....
Hoseyn Abdolzade	Assist. Prof	Referee	....

September 2013

تقدیم به

تمام کسانی که از آنان آموختم...

سپاسگذاری

به نام او که آرامش دل‌هاست

در ابتدا شاکرم **خداوند** منّان را که لطف بی‌انتهایش همیشه شامل حال این بنده کمترین بوده و همواره مرا در تمام لحظات زندگی یاری نموده است. پس از آن برخود واجب می‌دانم که از خانواده عزیزم، مخصوصاً **پدر و مادر** مهربانم که اولین آموزگارنم در کلاس زندگی بوده و بی‌دریغ به من عشق و ایثار آموختند، کمال تشکر داشته باشم. سپس از استاد فرزانه‌ام جناب آقای دکتر **احمد خوجالی بارنجی** که راهنمایی بنده در این پایان‌نامه را بر عهد داشتند و نه تنها از گنجینه علم و دانش بلکه از بیکران معرفت و انسانیت خود به من آموختند کمال قدردانی را دارم.

معصومه حسن‌زاده نودهی

تابستان ۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان نامه بر اساس مقاله‌های

Bennis, D. and Mahdou, N., (۲۰۰۷) *Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modu les., J. Pure Appl. Algebra* ۲۱۰.

و

Bennis, D. and Mahdou, N., (۲۰۱۰) *First, second, and third change of rings theorems for Go renstein homological dimenisions. J. Pure Appl. Algebra* ۳۸.

تهیه و تنظیم شده است. در سال‌های ۶۹ − ۱۹۶۷، اسلاندر [1] و بریجر [2] با فرض نوتری بودن حلقه R، برای $R-$ مدول‌های با تولید متناهی، بعد گرنشتاین، که با نماد $G-dim(.)$ نشان داده می شود، را معرفی کردند. آنها نشان دادند که برای $R-$ مدول M همواره نامساوی $G-dim(M) \leqslant pd(M)$ برقرار بو□ه و تساوی برقرار است هرگاه بعد پروژکتیو M متناهی باشد. فلذا ملاحظه می‌شود که بعد گرنشتاین تظریفی از بعد پروژکتیو است. چندین دهه بعد ایناکس، جندا، تریسیاس و شو [3] ایده‌های اسلاندر و بریجر را توسعه دادند و بعدهای همولوژیک سه‌گانه‌ی جدیدی را معرفی کردند -آنها را بعدهای گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست نامیدند- که زمینه‌ی تحقیقاتی گسترده‌ای توسط بنیانگذاران این مبحث و همچنین توسط آوراموف [4] فاکسبی، کریستنسن و هلم، [5] فرانکلید، [6] مارتسینکوفسکی [7] و ... شده است. آنها ثابت کردند که این بعدها تظریفی از بعدهای همولوژیک کلاسیک یعنی بعدهای پروژکتیو، انژکتیو و یکدست می‌باشند. اخیراً در (بنیس و مهدو [8]، ٢٠٠٦) رده‌ی جدیدی از این مدول‌ها که در زیر بدان اشاره می شود را مطرح کردند.

تعریف ۱.۰.۰. ۱. $R-$ مدول M را گرنشتاین پرژکتیو [9] می‌نامیم هرگاه یک رشته دقیق از $R-$ مدول‌های

[1] Auslander
[2] Bridger
[3] Enochs & Jenda & Torrecillas & Xu
[4] Avramov
[5] Foxby& Christensen & Holm
[6] Franklid
[7] Martsinkovsky
[8] Bennis & Mahdu
[9] Gorenstein projective

پروژکتیو به صورت

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

وجود داشته باشد، به طوری که $M \cong Im(P_0 \longrightarrow P^0)$ و $Hom_R(\mathbf{P}, Q)$ بازای هر مدول پروژکتیو Q دقیق باشد.

۲. $R-$ مدول M را گرنشتاین انژکتیو [1] می‌نامیم هرگاه یک رشته دقیق از $R-$ مدول‌های انژکتیو به صورت

$$\mathbf{E} = \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

وجود داشته باشد، به طوری که $M \cong Im(E_0 \longrightarrow E^0)$ و $Hom_R(I, \mathbf{E})$ بازای هر مدول انژکتیو I دقیق باشد.

۳. $R-$ مدول M را گرنشتاین یکدست [2] می‌نامیم هرگاه یک رشته دقیق از $R-$ مدول‌های یکدست به صورت

$$\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots$$

وجود داشته باشد، به طوری که $M \cong Im(F_0 \longrightarrow F^0)$ و $\mathbf{F} \otimes_R I$ بازای هر مدول انژکتیو I دقیق باشد.

توسط تعریف رابطه‌ی شمول

{مدول‌های پروژکتیو} $\subseteq$ {مدول‌های گرنشتاین پروژکتیو}

را داریم. ایده اصلی این مقاله ساختن یک رده‌ی میانی از این مدول‌ها به نام مدول‌های قویاً گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست می‌باشد بطوریکه

{مدول‌های پروژکتیو} $\subseteq$ {مدول‌های قویاً گرنشتاین پروژکتیو}

$\subseteq$ {مدول‌های گرنشتاین پروژکتیو}.

[1] Gorenstein injective
[2] Gorenstein flat

این مدول‌ها با یکسان در نظر گرفتن همه‌ی مدول‌ها و همه‌ی هومومورفیسم‌ها در تحلیل‌های موجود در تعریف ۱.۰.۰ بدست می‌آیند. علاوه بر این، با مدول‌هایی از این نوع ما می‌توانیم خصوصیات جدیدی از مدول‌های گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و یکدست بدست آوریم. پیکربندی این پایان نامه از قرار زیر است. در فصل اول قضایا و تعاریف مورد نیاز در فصول آتی آورده شده است. در فصل دوم به بررسی بعدهای گرنشتاین پروژکتیو و انژکتیو پرداخته موارد ذیل اثبات می‌شوند.

لم ۱.۰.۰. فرض کنید $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ یک رشته دقیق کوتاه از R ‌-مدول‌ها و R ‌-همومرفیسم‌ها باشد. در اینصورت

۱. اگر $Gpd_R(L) = 0$ و $Gpd_R(M) > 0$، آنگاه $Gpd_R(K) = Gpd_R(M) - 1$.

۲. اگر $Gid_R(L) = 0$ و $Gid_R(K) > 0$، آنگاه $Gid_R(K) = Gid_R(M) + 1$.

سپس به مسئله‌ی رده بندی مدول‌های گرنشتاین پروژکتیو و انژکتیو بر حسب مدول‌های قویا گرنشتاین پروژکتیو و انژکتیو پرداخته و قضایای ذیل اثبات می‌شوند.

قضیه ۱.۰.۰. ۱. $R-$ مدول M گرنشتاین پروژکتیو است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک $R-$ مدول قویاً گرنشتاین پروژکتیو باشد.

۲. $R-$ مدول M گرنشتاین انژکتیو است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک $R-$ مدول قویاً گرنشتاین انژکتیو باشد.

سپس توجه خود را به مسئله‌ی ارتباط رده بندی مدول‌های قویاً گرنشتاین بر حسب فانکتور $Hom(-,-)$ معطوف کرده قضیه‌ی ذیل به اثبات می‌رسد.

قضیه ۲.۰.۰. برای $R-$ مدول M عبارات زیر معادلند.

۱. M قویاً گرنشتاین پروژکتیو است.

۲. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد، که در آن P مدول پروژکتیو است و برای هر مدول پروژکتیو Q، $Ext(M,Q)=0$.

۳. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد، که در آن P مدول پروژکتیو است و برای هر مدول با بعد پروژکتیو متناهی Q'، $Ext(M,Q')=0$.

٤. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد، که در آن P مدول پروژکتیو است و برای هر مدول پروژکتیو Q رشته

$$0 \longrightarrow Hom(M,Q) \longrightarrow Hom(P,Q) \longrightarrow Hom(M,Q) \longrightarrow 0,$$

دقیق است.

۵. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد، که در آن P مدول پروژکتیو است و برای هر مدول با بعد پروژکتیو متناهی Q' رشته

$$0 \longrightarrow Hom(M,Q') \longrightarrow Hom(P,Q') \longrightarrow Hom(M,Q') \longrightarrow 0,$$

دقیق است.

و متعاقباً رده بندی زیر برای مدول‌های قویاً گرنشتاین یکدست ارائه می‌گردد.

قضیه ۳.۰.۰. برای $R-$ مدول M عبارات زیر معادل اند.

۱. M قویاً گرنشتاین یکدست است.

۲. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد که در آن F یک $R-$ مدول یکدست است و برای هر مدول انژکتیو I، $Tor(M,I)=0$.

۳. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد که در آن F یک $R-$ مدول یکدست است و برای هر مدول با بعد انژکتیو متناهی I'، $Tor(M,I')=0$.

۴. یک رشته دقیق کوتاه به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد که در آن F یک $R-$ مدول یکدست است و بازای هر مدول انژکتیو I رشته

$$0 \longrightarrow M \otimes I \longrightarrow F \otimes I \longrightarrow M \otimes I \longrightarrow 0,$$

دقیق است.

۵. رشته دقیق کوتاهی به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ وجود دارد که در آن F یک $R-$ مدول یکدست است به طوری که برای هر مدول با بعد انژکتیو متناهی I' رشته

$$0 \longrightarrow M \otimes I' \longrightarrow F \otimes I' \longrightarrow M \otimes I' \longrightarrow 0$$

دقیق است.

بعد از آن رفتار بعدهای پروژکتیو، گرنشتاین پروژکتیو، انژکتیو و گرنشتاین انژکتیو را نسبت به فانکتورهای $\coprod(.)$ و $\prod(.)$ بررسی کرده و قضیه‌ی زیر اثبات می‌گردد.

قضیه ۴.۰.۰. فرض کنید $(A_i)_{i\in I}$ یک خانواده از $R-$ مدول‌ها باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند.

۱. $pd_R(\coprod_{i\in I} A_i) = \sup\{pd_R(A_i) \mid i \in I\}$.

۲. $id_R(\prod_{i\in I} A_i) = \sup\{id_R(A_i) \mid i \in I\}$.

۳. $Gpd_R(\coprod_{i\in I} A_i) = \sup\{Gpd_R(A_i) \mid i \in I\}$.

۴. $Gid_R(\prod_{i\in I} A_i) = \sup\{Gid_R(A_i) \mid i \in I\}$.

نهایتاً، در فصول ۳ و ۴ قضایای تغییر حلقه به شرح ذیل اثبات می‌شوند.

قضیه ۵.۰.۰. فرض کنید M یک $R-$ مدول غیر صفر و $x \in R$ یک عنصر $R-$ منظم و $M-$ منظم باشد. در این صورت

$$Gpd_{\frac{R}{Rx}}(\frac{M}{xM}) \leq Gpd_R(M).$$

قضیه ۶.۰.۰. فرض کنید $S \longrightarrow R$ یک هomomorفیسم حلقه، M یک $R-$ مدول غیر صفر و $pd_R(S) < \infty$. اگر برای هر $i > ۰$ داشته باشیم $Ext^i_R(S, M) = ۰$، آنگاه

$$.Gid_S(Hom_R(S, M)) \leq Gid_R(M)$$

قضیه ۷.۰.۰. فرض کنید M یک $R-$ مدول غیر صفر و $x \in R$ یک عنصر $R-$ منظم و $M-$ منظم باشد. در این صورت

$$Gid_{\frac{R}{Rx}}(\frac{M}{xM}) \leqslant Gid_R(M) - ۱,$$

بجز اینکه M یک $R-$ مدول گرنشتاین انژکتیو باشد.

قضیه ۸.۰.۰. فرض کنید M یک $R-$ مدول غیر صفر و $x = x_۱, \cdots, x_t$ یک $R-$ رشته‌ی منظم از اعضای پوچساز M باشد. در این صورت

$$.Gpd_R(M) = Gpd_{\frac{R}{(x)}}(M) + t.$$

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مدول‌های آزاد، پروژکتیو و انژکتیو

در این فصل بعضی مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، آورده می‌شوند. در سراسر این فصل تمام حلقه‌ها شرکت پذیر و یکدار هستند مگر آنکه خلاف آن تصریح شود. همچنین، جهت سادگی، اگر R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد، آنگاه حلقه‌ی خارج قسمت $\frac{R}{I}$ را با نماد $\overline{R}$ نشان می‌دهیم و تمامی عناصر منظم را هم زیر مجموعه‌ی مرکز حلقه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید F، $R-$ مدول باشد. مجموعه مولد X برای F را پایه برای F می‌نامیم هرگاه مستقل خطی باشد، یعنی بازای عناصر دلخواه $x_1, \cdots, x_n \in X$ و عناصر دلخواه $r_1, \cdots, r_n \in R$ از $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ بتوان نتیجه گرفت $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید F یک $R-$ مدول باشد. F را آزاد می‌نامیم هرگاه F پایه داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید F، $R-$ مدولی آزاد با پایه X باشد. در اینصورت

۱. اگر $j : X \hookrightarrow F$ تابع جزئیت باشد، آنگاه بازای هر $R-$ مدول مانند M و هر تابع مانند $f : X \to M$، $R-$ همریختی‌ای منحصربفرد مانند $\varphi : F \longrightarrow M$ موجود است که نمودار

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

را جابجایی می کند.

۲. بازای هر $R-$ مدول مانند M، هر تابع مانند $f : X \longrightarrow M$ را می‌توان به صورت منحصربفردی به $R-$ همریختی‌ای مانند $\varphi : F \longrightarrow M$ توسعه داد، یعنی $R-$ همریختی منحصربفردی مانند $\varphi : F \longrightarrow M$، موجود است که $\varphi |_X = f$.

برهان. به قضیه‌ی ۷.۱ از(یاسمی، ۱۳۸۸) مراجعه نمایید. $\square$

قضیه ۲.۱.۱. اگر F، $R-$ مدولی آزاد با پایه X باشد، آنگاه $F \cong_R \coprod_{x\in X} R$. برعکس، اگر $R-$ مدول F با $\coprod_{x\in X} R$، به عنوان $R-$ مدول یکریخت باشد، آنگاه آزاد است.

برهان. به قضیه‌ی ۷.۳ از(یاسمی، ۱۳۸۸) مراجعه نمایید. $\square$

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در اینصورت $R-$ مدول آزادی مانند F و اپی‌مورفیسم، $\varphi : F \longrightarrow M$، موجود است. علاوه بر این اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه می‌توان F را هم با تولید متناهی در نظر گرفت.

برهان. به گزاره‌ی ۲.۳٤ از(راتمن [۱]، ۱۹۷۹) مراجعه نمایید. $\square$

قضیه ٤.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت، $Hom_R(R, M) \cong_R M$.

برهان. به قضیه‌ی ٤.۹ از(یاسمی، ۱۳۸۸) مراجعه نمایید. $\square$

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول چپ و N یک $R-$ مدول راست باشد. در اینصورت

$$R \otimes_R M \cong M, \quad \text{و} \quad N \otimes_R R \cong_R N$$

که در آن $N \otimes_R R$ و $R \otimes_R M$ ، به ترتیب، با ضرب‌های

$$r(r_1 \otimes_R m) = rr_1 \otimes_R m, \quad \text{و} \quad (n \otimes_R r_1).r = n \otimes_R r_1 r$$

$R-$ مدول چپ و راست می‌باشند.

برهان. به قضیه‌ی ۵.۸ از(یاسمی، ۱۳۸۸) مراجعه نمایید. $\square$

فرض کنید P یک $R-$ مدول باشد. P را پروژکتیو می‌نامیم هرگاه در شرایط معادل زیر صدق کند.

۱. $Hom_R(P, -)$ یک فانکتور دقیق، از کاتگوری $R-$ مدول‌ها به کاتگوری گروه‌های آبلی، است.

[۱] Rotman