
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

قاب ها در فضاهای برداری و کاربرد آنها در رده بندی مجموعه های محدب فشرده

استاد راهنما:

دکتر محمد علی دهقان

استاد مشاور:

دکتر احمد صفاپور

دانشجو:

مریم فیروزی پاریزی

دی ماه ۱۳۹۰

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

خانم مریم فیروزی پاریزی

قاب‌ها در فضاهای برداری و کاربرد آن‌ها در رده‌بندی مجموعه‌های محدب فشرده

در تاریخ ۹۰/۱۰/۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی.. به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه ی علمی دانشیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان‌نامه آقای احمد صفاپور با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور داخل۱ گروه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور داخل۲ از گروه خانم دکتر آزاده علیجانی‌زمانی با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۵ – نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی آقای دکتر اسماعیل زهدی با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

تقدیر و تشکر

کار ما نیست، شناسایی « راز » گل سرخ،
کار ما شاید این است، که در « افسون » گل سرخ، شناور باشیم ...

خداوندا: سپاس بی کران تو را، که دیگر بار، بر بنده حقیرت منت نهادی، و یاریش کردی تا پله ای دیگر از نردبام بلند علم را، با موفقیت بپیماید.

و قدردانم، از زحمات استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد علی دهقان، که با مهربانی راهنمای من در این مسیر بودند و بدون راهنمایی و مساعدت ایشان، این مشکل میسر نمی نمود.

و با سپاس از جناب آقای دکتر احمد صفاپور، که همواره با نظرات ارزشمندشان، مرا در جهت بهتر نمودن کار، هدایت کردند.

همچنین تشکر می کنم، از جناب آقای دکتر افشین، و سرکار خانم دکتر علیجانی، که لطف فرموده و داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند، و اینجانب را با راهنمایی های سودمندشان، در جهت پر بار تر نمودن پایان نامه، یاری کردند.

و با سپاسی بی انتها، از همسر فداکار، و همسفر زندگیم، و همچنین دخترک شیرینم، که صبورانه، با من، در تحمل سختی ها ی این راه، همراه شدند. و می بوسم دستان پر عطوفت پدر و مادری را، که همواره بی دریغ، گره گشای مشکلاتم بوده اند، و کلام مهربانشان، به وجودم قدرت می بخشد.

تقدیم به

ساحت مقدس حضرت ولی عصر(عج)

و

غنچه زندگیم غزل

چکیده

به طور ساده یک قاب متناهی، یک دنباله مولد برای فضای هیلبرت با بعد متناهی است. تابعک های خطی که توسط بردارهای قابی دوگان به دست می آیند، وابسته به ضرب داخلی نمی باشند، لذا می توان مفاهیم نظریه قاب را به فضاهای برداری گسترش داد. با توسیع این مفاهیم به فضاهای برداری، تعاریف و مفاهیمی مشابه آنچه در نظریه قاب بیان شده، مانند عملگر ترکیب و آنالیزی مطرح می شود، و اینکه تابعک های خطی همانند بردارهای قابی دوگان، دارای کمترین نرم l^2- ای، در بین ضرایب مولد عناصر فضا هستند. یکی از مزیت های این توسیع این است که محاسبات روی عناصر فضا به سادگی انجام می شود. در این پژوهش ضمن معرفی قاب ها در فضاهای برداری، به کاربردی از آن ها اشاره شده است. برای مثال می توان زیر مجموعه های محدب و فشرده $\mathbb{R}^N$ را، توسط قاب ها و مجموعه های قابی با روشی قابل محاسبه تقریب زد که ما را به طرح رده بندی پایه ای قاب هدایت می کند.

واژه های کلیدی: رده بندی، قاب های متناهی، قانون تصمیم، فضاهای برداری، مجموعه های محدب.

پیش گفتار

برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، نظریه جدیدی به نام قاب توسط دافین [1] و شیفر[2]مطرح شد [۹]. پس از مدتی طولانی از ظهور نظریه قاب، بسیاری از متخصصین رشته های مختلف علوم و مهندسی، به اهمیت و کاربرد قاب ها پی بردند و مطالعات وسیعی روی این نظریه انجام شد، که از جمله مهمترین آن ها می توان به نظریه موجک دوبشی، میر و گراسمان[۸] اشاره کرد. در ادامه این توسعه، به انواع قاب ها و نقش مهم آن ها در ریاضیات و کاربردهای مهم آنها در فضاهای مختلف پرداخته شد که از جمله آنها فضاهای برداری با بعد متناهی است که در این پژوهش به آن می پردازیم.

پس از معرفی قاب $(f_j)_{j\in J}$ به عنوان دنباله تولید کننده برای یک فضای هیلبرت با بعد متناهی، قاب دوگان $(\tilde{f}_j)_{j\in J}$ معرفی شد که در رابطه زیر صدق می کند [۵, ۱۷] :

$$f=\sum_{j\in J}\langle f,\tilde{f}_j\rangle f_j=\sum_{j\in J}\langle f,f_j\rangle \tilde{f}_j,\quad \forall f\in H.$$

ضرایب $(\langle f,\tilde{f}_j\rangle)_{j\in J}$ در بین همه ضرایبی که f را تولید می کنند، دارای کمترین نرم l^2- ای هستند. چنین بسط هایی که بسطهای متعامد و دو متعامدی را تعمیم می دهند کاربردهای زیادی در موجک ها و آنالیز سیگنال ها دارند[۳, ۱۱].

هنگامی که یک مجموعه یا دنباله مولد برای فضای برداری وجود دارد، می توان محاسبات را به روشی مناسب و به طور مستقیم روی آن انجام داد. این روش، ما را از به دست آوردن یک پایه توسط فرآیند گرام اشمیت [3] بی نیاز می کند. لذا استفاده از بردارهای مولد به جای پایه ها می تواند دو مزیت داشته باشد. اول اینکه پایه به دست آمده توسط فرآیند گرام اشمیت، ممکن است هندسه ذاتی فضا را از بین ببرد و دوم اینکه در فضاهایی که مشخص کردن بعد فضا مشکل است، مانند فضاهای شانه ای چندگانه [4]، مجموعه های مولد، فواید طبیعی فراتر از پایه ها دارند.

یکی از کاربردهای جالب قاب ها در فضاهای با بعد متناهی، رده بندی مجموعه هاست که در این پژوهش به آن پرداخته شده است.

---

[1] Duffin

[2] Schaeffer

[3] Gram Schmidt

[4] Multivariate spline spaces

به طور کلی سیستم رده بندی، به مفهوم برجسته کردن یک ویژگی یا مشخصه است . هدف ما در این پایان نامه ارائه چهارچوب قوی و مناسبی است، که در آن پدیده رده بندی شناخته شود. به این منظور، بر روی یک سیستم رده ای تک عضوی تمرکز شده است که نمایان کننده مشخصه، یک عملگر آنالیزی قابی و رده بندی کننده، یک تابع مشخصه می باشد. چنین سیستمهایی به طور گسترده می توانند به دو دسته تقسیم شوند: دسته اول، سیستم هایی هستند که در آن ها قاب ها از قبل انتخاب می شوند[۱]، و دسته دوم، که در آن قابی انتخاب می شود که از لحاظ مترفضا بهینه باشد [۱۰]. در هر دو مورد می توان ضرایب قابی را به عنوان مشخصه در نظر گرفت، علاوه بر این می توان مشخصه های پیچیده تری از قبیل انرژی های موضعی یا اندازه های آماری روی ضرایب قاب ها را انتخاب کرد که چنین مشخصه های غیر خطی در این تحقیق بحث نخواهند شد. و اما ساختار کلی این پایان نامه بدین شرح است :

پایان نامه به دو قسمت تقسیم شده است. در قسمت اول، به معرفی قاب ها در فضاهای برداری پرداخته و در قسمت دوم، به کاربردی از قاب ها در فضاهای برداری اشاره شده است.

قسمت اول شامل چهار فصل است :

در فصل اول قضایا و تعاریفی آورده شده که به طور مستقیم یا غیر مستقیم در طول پایان نامه از آنها استفاده شده است.

در فصل دوم به دوگان یک فضای برداری، معرفی ماتریس گرام [۱] و خواص آن پرداخته شده است.

در فصل سوم مفهوم وابستگی خطی و تصویر وابسته و قضایایی در این مورد بیان شده است.

فصل چهارم شامل دو بخش است، که در بخش اول به تابعکهای دوگان متعارف که مختصات خطی هم نامیده می شوند پرداخته شده و کاربردها و روابط این تابعک ها با ماتریس گرام و ماتریس تصویر وابسته بیان می شود. در بخش دوم ویژگی های مختصات خطی و یک سری روابط آن ها با گروه های تقارنی آورده شده است.

و قسمت دوم که شامل سه فصل است :

معرفی خطاهای رده بندی و قضایایی در مورد این خطاها در فصل پنجم بیان شده است. بحث اصلی رده بندی در فصل ششم مطرح می گردد. در بخش اول این فصل، به معرفی

---

[۱] Gramian

و ویژگی های مجموعه های قابی پرداخته و در بخش دوم، مجموعه های قابی چند وجهی محدب به عنوان یک حالت خاص از مجموعه های قابی معرفی می شوند.

و فصل هفتم که در واقع نتیجه کاربردی این پایان نامه است شامل دو بخش است. در بخش اول مجموعه های محدب فشرده را با مجموعه های قابی رده بندی کرده ایم، و در بخش دوم به خطاهایی که در هنگام رده بندی رخ می دهند پرداخته ایم. مرجع های اصلی در این پایان نامه، [۲] و[۱۶] و[۱۴] بوده اند.

فهرست مندرجات

بخش

قسمت اول

قاب ها در فضاهای برداری

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل، برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان نامه مورد نیاز می باشند را ذکر می کنیم. این قضایا و تعاریف برگرفته از کتابهای آنالیز حقیقی فولند، آنالیز تابعی رودین، نظریه و الگوریتمهای غیر خطی بازارا و کتاب قاب ها و پایه های کریستنسن می باشند. در طول پایان نامه، منظور از $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط، $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا، H یک فضای هیلبرت، X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$، و J و K، مجموعه های اندیس شمارایی هستند.

۱.۱ قضایا و تعاریفی از فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط X، یک تابع $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ است که دارای خواص زیر می باشد.

۱) به ازای هر $x \in X$، $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر $x,y \in X$، $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$.

۳) به ازای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$، $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$.

تعریف ۲.۱.۱. به فضای برداری که دارای ضرب داخلی باشد، فضای ضرب داخلی گوییم.

تذکر ۳.۱.۱. هر فضای ضرب داخلی را می توان با تعریف $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$ نرم دار کرد.

تعریف ۴.۱.۱. هر فضای ضرب داخلی که تحت متر تولید شده توسط ضرب داخلی، یعنی

$$d\Big(x,y\Big)= \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle},$$

کامل باشد را یک فضای هیلبرت [1] گوییم. کامل بودن به این معنی است که هر دنباله کوشی در آن فضا همگراست.

تعریف ۵.۱.۱. اگر $(x_j)_{j\in J}$ یک دنباله از عناصر در فضای هیلبرت H باشد، مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی x_j، را با $span(x_j)_{j\in J}$ نمایش می دهیم. به این معنی که،

$$span(x_j)_{j\in J} = \{\sum_{j\in J} c_j x_j : c_j \in \mathbb{C}\}.$$

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنید $(e_j)_{j\in J}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد، در این صورت شرایط زیر معادلند.

۱) $(e_j)_{j\in J}$ پایه متعاد یکه برای H است.

۲) برای هر $x\in H$، $x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$.

۳) برای هر $x\in H$، $\|x\| = \sum_{j\in J}|\langle x, e_j\rangle|^۲$ (اتحاد پارسوال [2]).

۴) $H = \overline{span(e_j)_{j\in J}}$.

۵) اگر برای هر $x\in H$ و برای هر $j\in J$ داشته باشیم، $\langle x, e_j\rangle = ۰$، آن گاه $x = ۰$.

---

[1] Hilbert space

[2] Parsvals identity

تذکر ۷.۱.۱. مجموعه همه تبدیلات خطی و کران دار از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K را با نماد $\mathcal{B}(H,K)$ نمایش می دهیم و اگر فضای H و K با هم برابر باشند، آن را با $\mathcal{B}(H)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت با نرم های $\|.\|_H$ و $\|.\|_K$ و ضرب های داخلی $\langle .,. \rangle_H$ و $\langle .,. \rangle_K$ باشند. اگر S عملگری خطی از H به K باشد، نرم این عملگر به صورت زیر تعریف می شود،

$$\|S\| = sup\,\{\|S(x)\|_K : x \in H, \|x\|_H = ۱\,\}.$$

در این صورت $\|S\|$ را نرم عملگری S می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض می کنیم H و K، دو فضای هیلبرت و S، عملگری از H به K باشد. در این صورت،

۱) S را کران دار گوییم هرگاه $\|S\| < \infty$.

۲) اگر $S \in \mathcal{B}(H,K)$ آن گاه عملگر الحاقی S، عملگر یکتای $S^* : K \to H$ است، به طوری که $S^* \in \mathcal{B}(K,H)$، و به ازای هر $x \in H$ و $y \in K$، داشته باشیم $\langle Sx, y\rangle_K = \langle x, S^*y\rangle_H$. به علاوه $\|S^*\| = \|S\|$.

۳) گوییم عملگر S خود الحاق [1] است، اگر $S = S^*$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت، و T نگاشتی از H به K باشد، پوچساز و برد T که به ترتیب با N_T و R_T نشان داده می شوند، به صورت زیر تعریف می شوند،

$$N_T = \{x \in H : T(x) = ۰\} \;\;,\;\; R_T = \{y \in K : \exists x \in H; T(x) = y\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر M زیر مجموعه ای از فضای هیلبرت H باشد، آن گاه $M^{\perp}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$M^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = ۰ \;\; \forall y \in M\}.$$

[1] Self adjoint

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض می کنیم H و K دو فضای هیلبرت و $T \in \mathcal{B}(H,K)$ باشد. در این صورت عبارات زیر برقرارند.

۱) $N_T = R_{T^*}^{\perp}$.

۲) $N_{T^*} = R_T^{\perp}$.

۳) $\overline{R_T} = N_{T^*}^{\perp}$.

۴) $\overline{R_{T^*}} = N_T^{\perp}$.

تعریف ۱۳.۱.۱. در فضای هیلبرت H، عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ معکوس پذیر است، اگر عملگر $S \in \mathcal{B}(H)$ وجود داشته باشد، به طوری که $ST = TS = I$، در این حالت می نویسیم $S = T^{-۱}$.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید V زیر فضای بسته ای از فضای هیلبرت H باشد. تصویر متعامد H به روی V، عملگر $P : H \longrightarrow H$ است، به طوریکه برای هر $x \in H$،

$$P^*(x) = P(x)\ ,\ P^{۲}(x) = P(x).$$

در این صورت برای هر $x \in V$، $P(x) = x$.

قضیه ۱۵.۱.۱. (نامساوی کشی- شوارتز[۱]). فرض کنید H فضایی هیلبرت باشد و $x, y \in H$. آن گاه،

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

قضیه ۱۶.۱.۱. (قضیه نمایشی ریس [۲]). فرض می کنیم H فضای هیلبرت و $f \in \mathcal{B}(H)$، در این صورت عضو منحصر به فرد $y \in H$، وجود دارد به طوریکه برای هر $x \in H$،

$$f(x) = \langle x, y\rangle.$$

به علاوه $\|f\| = \|y\|$.

لم ۱۷.۱.۱. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت، و $U : K \longrightarrow H$ عملگری کراندار با برد

[۱] Caushy-Shwartz inequality
[۲] Riesz represention theorem

R_U بسته باشد. در این صورت عملگر کرانداری مانند $U^\dagger : H \longrightarrow K$ وجود دارد به طوریکه،

$$UU^\dagger x = x, \quad \forall x \in R_U.$$

$U^\dagger$، را شبه معکوس [1] U، می نامیم.

قضیه ۱۸.۱.۱. فرض کنید K, H، دوفضای هیلبرت بوده و $U : K \longrightarrow H$ عملگری کراندار و پوشا باشد. فرض می کنیم $y \in H$ داده شده باشد. در این صورت معادله $Ux = y$ دارای جوابی با کمترین نرم به صورت $x = U^\dagger y$ می باشد.

۲.۱ قضایا و تعاریفی از نظریه اندازه و آنالیز

تعریف ۱.۲.۱. برای هر فضای برداری X روی میدان $\mathbb{F}$، تابع خطی $f : X \to \mathbb{F}$، را یک تابعک خطی می نامند.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه $E \subset \mathbb{R}^N$، را یک مجموعه محدب گوییم هر گاه ، برای هر $x, y \in E$ وهر $0 \leq \lambda \leq 1$ رابطه، $(1 - \lambda)x + \lambda y \in E$ برقرار باشد.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید S مجموعه ای ناتهی، بسته و محدب در $\mathbb{R}^N$ باشد و $y \notin S$. در این صورت نقطه منحصر به فردی مانند $x_0 \in S$، وجود دارد به طوریکه دارای کمترین فاصله از y است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید X مجموعه ای ناتهی و M، یک σ - جبر روی X باشد. اگر μ یک اندازه روی (X, M) باشد ، آنگاه (X, M, μ) را فضای اندازه گویند.

---
[1] Pseudo inverse

قضیه ۵.۲.۱. (پیوستگی اندازه لبگ[1]). فرض می کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد . اگر $(E_j)_{j\in J} \subset M$ و $E_۱ \supset E_۲ \supset, \cdots$ و حداقل یک n، وجود داشته باشد، به طوری که برای آن ، $\mu(E_n) < \infty$، آنگاه

$$\lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu(\cap_{j=۱}^{\infty} E_j).$$

قضیه ۶.۲.۱. (قضیه تسلطی لبگ). فرض کنید $(f_j)_{j\in J}$ دنباله ای در $L^۱$ باشد به طوریکه تقریبا همه جا به تابع f همگرا باشد، و تابع $g \in L^۱$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $j \in J$، $|f_j| \leq g$. در این صورت $f \in L^۱$ و $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه $E \subset \mathbb{R}^N$ را یک مجموعه فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن، زیر پوششی متناهی داشته باشد.

اکنون چند تعریف از نظریه قاب ها را بیان می کنیم .

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت، و $(f_j)_{j\in J}$ یک دنباله در H باشد. این دنباله یک قاب برای H نامیده می شود، اگر ثابت های $\circ < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $f \in H$،

$$A\|f\|^۲ \leq \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^۲ \leq B\|f\|^۲.$$

اعداد مثبت A وB به ترتیب کران پایین و بالای قاب نامیده می شوند.

تعریف ۹.۲.۱. دنباله $(f_j)_{j\in J}$، در فضای هیلبرت H را یک قاب چسبان گوییم، هر گاه در تعریف فوق $A = B$ باشد. اگر $A = B = ۱$ در این صورت این قاب را یک قاب چسبان یکه می نامیم.

---
[1] Lebesgue