دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

# رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها

کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (گراف)

**حامد فهیمی**

استاد راهنما

**دکتر بهناز عمومی**

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (گراف)حامد فهیمی

تحت عنوان

# رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها

در تاریخ   توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ — استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر بهناز عمومی

۲— استاد مشاور پایان‌نامه

۳— استاد داور ۱

()

۴— استاد داور ۲

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

# فهرست مطالب

## چکیده:

رنگ‌آمیزی یکی از زمینه‌های کاربردی و با اهمیت در نظریه‌ی گراف است که از جنبه‌های نظری و عملی به طور قابل توجهی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. ساده‌ترین نوع رنگ‌آمیزی در یک گراف، رنگ‌آمیزی رأسی است؛ یعنی یک تخصیص از رنگ‌ها به رأس‌های یک گراف به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.
انواع مختلفی از رنگ‌آمیزی برای یک گراف وجود دارد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به رنگ‌آمیزی رأسی، رنگ‌آمیزی یالی، رنگ‌آمیزی کلی و ... اشاره نمود. در این پایان‌نامه به رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها که نوع خاصی از رنگ‌آمیزی مشتمل بر در نظر گرفتن رأس‌ها و یال‌های یک گراف همراه با یک رابطه‌ی وقوع تعریف‌شده می‌باشد، خواهیم پرداخت. این مفهوم در سال ۱۹۹۳ توسط بروالدی و ماسی حین مطالعه بر رنگ‌آمیزی یالی قوی گراف‌ها ارایه شده و پس از آن طی سالیان متوالی به طور مستقل مورد مطالعه قرار گرفته است.
در این پایان‌نامه به معرفی این نوع از رنگ‌آمیزی و ارایه‌ی نتایج به دست‌آمده در این زمینه خواهیم پرداخت.


کلمات کلیدی: رنگ‌آمیزی وقوع، عدد رنگی وقوع، حدس‌های رنگ‌آمیزی وقوع، کران‌های عدد رنگی وقوع

# فصل ۱

# مقدمه

در این فصل ضمن اشاره به تاریخچه‌ی مختصری از موضوع مورد مطالعه، تعاریف و مقدمات لازم برای فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم و در پایان مروری بر مطالب فصل‌های پایان‌نامه خواهیم داشت.

## ۱—۱ تعاریف مورد نیاز

در این بخش به اختصار به ذکر مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز در این پایان‌نامه در نظریه‌ی گراف می‌پردازیم که غالبا از مراجع [۳] و [۳۴] آورده شده‌اند.

**گراف** $G$ عبارت است از یک سه‌تایی، شامل یک مجموعه‌ی $V(G)$ به نام **رأس‌ها**، یک مجموعه‌ی $E(G)$ به نام **یال‌ها** و یک **رابطه‌ی وقوع** که به هر عضو از $E(G)$ یک زوج نامرتب از $V(G)$ را که لزوماً متمایز نیستند، نظیر می‌کند. اگر رابطه‌ی وقوع به یال $e$، دو رأس $u$ و $v$ را نسبت دهد، گوییم رأس‌های $u$ و $v$ بر یال $e$ **واقع** شده‌اند و **رأس‌های انتهایی** $e$ هستند. منظور از یال $uv$ یالی با دو رأس انتهایی $u$ و $v$ است.

دو رأس $u$ و $v$ را **مجاور** یا **همسایه** گوییم هرگاه یال $e$ در $E(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $u$ و $v$ رأس‌های انتهایی آن باشند. در این حالت، یال $e$ را نیز یک یال مجاور یا واقع بر هر یک از رأس‌های $u$ و $v$ می‌نامیم. یال‌هایی که دارای رأس‌های انتهایی یکسان هستند را **یال‌های چندگانه** و یالی که دارای دو انتهای یکسان باشد را **طوقه** می‌نامیم. گراف $G$ را یک **گراف ساده** گوییم هرگاه یال چندگانه و طوقه

نداشته باشد. بنابراین در هر گراف ساده، رابطه‌ی وقوع یک به یک است.

از آنجا که در هر گراف ساده، هر یال به کمک نقاط انتهایی خود به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود، گراف ساده‌ی $G$ را می‌توان به شکل زوج مرتب $G=(V(G),E(G))$ در نظر گرفت که در آن $V(G)$ یک مجموعه‌ی ناتهی از رأس‌ها و $E(G)$ مجموعه‌ای از زوج‌های نامرتب (و متمایز) از اعضای $V(G)$ است. نمادهای $V(G)$ و $E(G)$، در صورتی که ابهام ایجاد نشود، به ترتیب می‌توانند با نمادهای $V$ و $E$ جایگزین شوند. در این حالت، گراف $G$ را به صورت $G=(V,E)$ نمایش می‌دهیم.

گراف $G$ را **متناهی** گوییم هرگاه $V(G)$ و $E(G)$ هر دو متناهی باشند. در غیراین‌صورت گراف $G$ را **نامتناهی** می‌نامیم. در این پایان‌نامه، همه‌جا گراف‌ها را ساده و متناهی در نظر خواهیم گرفت. تعداد رأس‌های گراف $G$ را **مرتبه‌ی** آن گراف گوییم و با $n(G)$ نشان می‌دهیم. منظور از **اندازه‌ی** گراف $G$، تعداد یال‌های گراف $G$ است، که با $m(G)$ نمایش می‌دهیم.

**درجه‌ی** رأس $v$ در گراف $G$ برابر با تعداد یال‌های مجاور به رأس $v$ در گراف $G$ است و با نماد $d_G(v)$ نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی همسایه‌های رأس $v$ در گراف $G$ را **همسایگی باز** رأس $v$ می‌گوییم و آن را با $N_G(v)$ نشان می‌دهیم. منظور از **همسایگی بسته‌ی** رأس $v$، $N_G[v]$، مجموعه‌ی $N_G(v)\cup\{v\}$ است، به عبارت دیگر $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$.

در هر گراف، رأس درجه‌ی صفر را **رأس تنها** و رأس درجه‌ی یک را **رأس آویخته** می‌نامیم. درجه‌ی یک رأس با کمترین درجه در گراف $G$ را با $\delta(G)$ و درجه‌ی یک رأس با بیشترین درجه در $G$ را با $\Delta(G)$، یا به طور خلاصه، به ترتیب، با $\delta$ و $\Delta$ نمایش می‌دهیم. گرافی که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن با یکدیگر برابر باشد را **گراف منظم** می‌نامیم. اگر درجه‌ی همه‌ی رأس‌های گراف $G$ برابر با مقدار ثابت $r$ باشد، به $G$ یک گراف $r$**−منظم** می‌گوییم. در حالت خاص، به گراف‌های ۳−منظم، گراف‌های **مکعبی** نیز گفته می‌شود.

**مکمل** گراف $G$ که آن را با $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی تعریف می‌شود که مجموعه‌ی رئوس آن همان مجموعه رئوس $G$ می‌باشند و یال‌های آن رئوس دو به دو نامجاور در $G$ می‌باشند.

گراف $H$ را **زیرگراف** $G$ گوییم هرگاه $V(H)\subseteq V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$ و می‌نویسیم $H\subseteq G$. اگر $H\subsetneq G$، زیرگراف $H$ را یک **زیرگراف سره** از $G$ می‌نامیم و در غیراین‌صورت $H$ را یک **زیرگراف ناسره** از $G$ گوییم. همچنین اگر $H$ زیرگرافی از $G$ باشد که $V(H)=V(G)$، آن‌گاه $H$ را یک **زیرگراف فراگیر** از $G$ می‌نامیم. اگر $H$ زیرگرافی از $G$ باشد به طوری‌که رئوس انتهایی همه‌ی یال‌های $E(H)$ در $V(H)$ باشند، آن‌گاه به $H$ **زیرگراف القایی** گوییم و آن را با $\angle H$ نمایش می‌دهیم.

یک زیرگراف فراگیر $k$−منظم در گراف دلخواه $G$ را یک $k$**−عامل** می‌گوییم. گراف $G$ را $k$−عامل‌پذیر گوییم هرگاه از اجتماع یال‌مجزایی از $k$−عامل‌ها تشکیل شده باشد.

اگر $v \in V(G)$ و $|V(G)| \geq ۲$، آن‌گاه گراف $G - \{v\}$ و یا به طور خلاصه، $G - v$، گراف حاصل از حذف رأس $v$ و همه‌ی یال‌های مجاور به آن از گراف $G$ است. اگر $S \subsetneqq V(G)$، آن‌گاه گراف $G - S$، گراف حاصل از حذف رأس‌های مجموعه‌ی $S$ و همه‌ی یال‌های مجاور به آن‌ها از گراف $G$ است. در حالی که اگر $S \subseteq E(G)$، آن‌گاه گراف $G - S$ گرافی با مجموعه‌ی رأس‌های $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(G) - S$ است. در حالت کلی، اگر $H$ یک زیرگراف از $G$ باشد، آن‌گاه $G - H$ گرافی است که در آن $V(G - H) = V(G) - V(H)$ و $E(G - H) = E(G) - E(H)$. اگر یال مفروض $e$ را در گراف $G$ حذف کنیم و دو انتهای آن را تبدیل به یک رأس کنیم به طوری‌که روابط مجاورت رئوس تبدیل‌شده حفظ شود، آن‌گاه گراف حاصل را **انقباض** $G$ روی $e$ نامیده و آن را با $G/e$ نمایش می‌دهیم.

یک **تطابق** در گراف $G$، مجموعه‌ای از یال‌های دو به دو نامجاور در گراف تعریف می‌شود. تطابقی را که تشکیل یک زیرگراف القایی دهد **تطابق القایی** گوییم. یک **تطابق کامل**، تطابقی در $G$ تعریف می‌شود که همه‌ی رئوس گراف را در بر داشته باشد.

یک **برش رأسی** در گراف $G$، مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ تعریف می‌شود به طوری‌که $G - S$ ناهمبند شود. **همبندی** گراف $G$ مقدار کمینه‌ی اندازه‌ی برش‌های رأسی در $G$ تعریف می‌شود. گراف $G$ را $k$−**همبند** گوییم هرگاه همبندی آن حداقل برابر $k$ باشد. اگر $S = \{v\}$، آن‌گاه $v$ را یک **رأس برشی** گوییم.

به طور مشابه یک **برش یالی** در گراف $G$، مجموعه‌ی $S' \subseteq E(G)$ تعریف می‌شود به طوری‌که $G - S'$ ناهمبند شود. مقدار کمینه‌ی اندازه‌ی برش‌های یالی در $G$ را **همبندی یالی** $G$ گوییم. گراف $G$ را $k'$−**یال همبند** گوییم هرگاه همبندی یالی آن حداقل برابر $k'$ باشد. اگر $S' = \{e\}$، آن‌گاه $e$ را یک یال برشی در $G$ گوییم.

گراف $G$ را **گراف کامل** گوییم هرگاه هر دو رأس مجزا در آن مجاور باشند. گراف کامل $n$−رأسی را با $K_n$ نمایش می‌دهیم. گراف $G$ را **دوبخشی** گوییم هرگاه بتوان $V(G)$ را به دو زیرمجموعه‌ی ناتهی $X$ و $Y$ افراز کرد به طوری که هر یال یک انتها در $X$ و یک انتها در $Y$ داشته باشد. به دو مجموعه‌ی $X$ و $Y$ **بخش‌های** گراف $G$ می‌گوییم. در حالت کلی، یک گراف $p$−**بخشی** مثل $G$، با $p \geq ۱$، گرافی است که بتوان مجموعه‌ی رأس‌های آن را به $p$ مجموعه‌ی مجزا، که به آن‌ها بخش‌های گراف $G$ می‌گوییم، افراز کرد به طوری که رأس‌های انتهایی هر یال از $G$، در دو بخش متمایز قرار گیرند.

اگر در گراف $p$−بخشی $G$، با بخش‌های $V_۱, V_۲, \cdots, V_p$، هر رأس در هر بخش با همه‌ی رئوس بخش‌های دیگر مجاور باشد، در این‌صورت به $G$ یک **گراف $p$−بخشی کامل** می‌گوییم. اگر برای هر $i$، $۱ \leq i \leq p$، $|V_i| = n_i$، چنین گرافی را با $K_{n_۱, n_۲, \ldots, n_p}$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص، منظور از $K_{r,s}$ **گراف دوبخشی کامل** با بخش‌های $X$ و $Y$ است به طوری که $|X| = r$ و $|Y| = s$. گراف $K_{۱,s}$ را **ستاره** می‌نامیم و رأس با درجه‌ی $s$ در آن را **رأس مرکزی** می‌گوییم.

یک **گشت** در گراف $G$ عبارت است از دنباله‌ی متناهی $W: v_0e_1v_1\dots e_kv_k$، به طوری که برای هر $i$، $e_i = v_{i-1}v_i$. رأس $v_0$ را **ابتدا** و رأس $v_k$ را **انتهای** گشت می‌نامیم. اگر گراف $G$ ساده باشد، آن‌گاه یک گشت را می‌توان تنها با دنباله‌ی رأس‌ها نمایش داد. تعداد یال‌های یک گشت را **طول گشت** می‌نامیم.

اگر در گشت $W$، $v_0 = v_k$، آن‌گاه $W$ را یک **گشت بسته** گوییم. گشت بسته‌ای را که همه‌ی یال‌ها در آن متمایز از هم باشند **گذر** می‌نامیم. گذری را که شامل همه‌ی یال‌های یک گراف باشد، یک **گذر اویلری** می‌نامیم. یک **تور** در گراف همبند $G$، گشت بسته‌ای تعریف می‌شود که هر یال در $G$ را حداقل یک مرتبه طی کند. یک گذر اویلری بسته را یک **تور اویلری** می‌نامیم. گراف $G$ را **اویلری** گوییم هرگاه شامل یک تور اویلری باشد.

در صورتی که همه‌ی یال‌ها و رأس‌های ظاهر شده در گشت متمایز باشند آن را یک **مسیر** می‌نامیم. مسیر بسته را یک **دور** گوییم. مسیر شامل $n$ رأس را با $P_n$ و دور شامل $n$ رأس را با $C_n$ نشان می‌دهیم. به گراف $C_3$ **مثلث** نیز گفته می‌شود. یک دور فراگیر در گراف $G$ را **دور هامیلتونی** و گراف شامل یک دور هامیلتونی را **گراف هامیلتونی** می‌نامیم. مرتبه‌ی کوتاه‌ترین دور گراف $G$ را با $g(G)$ (و در صورتی که موجب ابهام نشود با $g$) نمایش می‌دهیم و به آن **کمر** گراف $G$ می‌گوییم.

گرافی را که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود دارد **همبند** و در غیراین‌صورت **ناهمبند** گوییم. همچنین هر زیرگراف همبند ماکزیمال از یک گراف را یک **مؤلفه‌ی** آن گراف می‌نامیم. در گراف همبند $G$ طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس $u$ و $v$ را **فاصله‌ی** بین آن دو رأس می‌گوییم و آن را با $d_G(u,v)$ نشان می‌دهیم. **قطر** گراف $G$ برابر با $\max\{d_G(u,v) \ : \ u,v \in V(G)\}$ است و با $diam(G)$ نشان داده می‌شود.

گراف بدون دور را **جنگل** و جنگل همبند را **درخت** می‌گوییم. درخت $T$ همراه با رأس دلخواه $r \in T$ به عنوان **ریشه** را یک **درخت ریشه‌دار** می‌نامیم. یک **جنگل ستاره** جنگلی است که همه‌ی مؤلفه‌های همبندی آن ستاره‌اند. جنگل ستاره‌ی جهت‌دار گرافی است که مؤلفه‌های همبندی آن ستاره‌های جهت‌دارند به طوری که جهت هر یال از مرکز ستاره به سمت خارج می‌باشد.

زیرمجموعه‌ی ناتهی $S$ ازرئوس گراف $G$ را یک **مجموعه‌ی مستقل** گوییم هرگاه بین هیچ دو رأس دلخواه $S$ یالی وجود نداشته باشد. **عدد استقلال** گراف $G$ که آن را با نماد $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم، برابر با اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل در گراف $G$ است.

یک **پوشش** در یک گراف، مجموعه‌ای از رئوس در گراف است به طوری‌که هر یال گراف، انتهایی در این مجموعه داشته باشند. کم‌ترین تعداد رئوس در یک پوشش گراف را **عدد پوششی** گراف می‌نامیم و آن را با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

زیرمجموعه‌ی $F \subseteq V(G)$ را یک **مجموعه‌ی احاطه‌گر** گوییم هرگاه هر رأس در $G - F$ دارای حداقل یک همسایه در $F$ باشد. مقدار کمینه‌ی اندازه‌های مجموعه‌های احاطه‌گر در $G$ را **عدد احاطه‌گر** $G$

می‌نامیم.

برای هر $k \in \mathbb{N}$، **توان** $k$—ام گراف $G$ که آن را با نماد $G^k$ نمایش می‌دهیم، گرافی با مجموعه‌ی رأس‌های $V(G^k) = V(G)$ است، به طوری که دو رأس در $G^k$ مجاورند اگر و تنها اگر فاصله‌ی آن دو رأس در گراف $G$ حداکثر برابر با $k$ باشد.

گراف‌های $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ را **مجزا** گوییم هرگاه $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. **اجتماع مجزای** یک خانواده‌ی متناهی از گراف‌های دو به دو مجزا مثل $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^{k}$، گرافی است با مجموعه رئوس $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ و مجموعه یال‌های $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$.

**پیوند** دو گراف $G_1$ و $G_2$ را که با نماد $G_1 + G_2$ نمایش می‌دهیم گرافی با مجموعه‌ی رئوس و یال‌های به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(G_1+G_2) = V(G_1)\cup V(G_2)\ ,\ E(G_1+G_2) = E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{xy : x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$$

**حاصل‌ضرب دکارتی** گراف‌های دلخواه $G_1, G_2, \ldots, G_d$ گرافی است که در آن

$$V = \{\tilde{v}\ :\ \tilde{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d),\ v_i \in V(G_i),\ 1 \le i \le d\}$$

و $\tilde{v}\tilde{w} \in E$ اگر و تنها اگر برای یک $i$، $1 \le i \le d$، $v_i w_i \in E(G_i)$ و برای هر $j$، $j \neq i$، $v_j = w_j$.

هر گراف را می‌توان به شکل نموداری در صفحه نمایش داد به طوری که هر رأس توسط یک نقطه (رأس‌های متمایز توسط نقاط مجزا) و هر یال به صورت خطی نشان داده می‌شود که دو رأس انتهایی خود را به یکدیگر متصل می‌کند. در نمودار یک گراف ممکن است دو یال یکدیگر را در نقاطی از صفحه قطع کنند که لزوماً رأس گراف نسیتند. نمایش یک گراف به این‌صورت کمک می‌کند که تصویری شهودی از آن پیدا کنیم.

گراف $G$ **مسطح** است هرگاه یک نمایش بدون تقاطع داشته باشد و به چنین نمایشی یک **نشاندن مسطح** $G$ در صفحه می‌گوییم. **وجه‌های** گراف مسطح $G$، ناحیه‌های ماکزیمال در صفحه هستند که شامل هیچ نقطه‌ای از تصویر گراف $G$ نیستند. هر گراف مسطح متناهی، یک وجه بی‌کران دارد که به آن **وجه بیرونی** می‌گوییم. در گراف مسطح همبند $G$، مرز هر وجه یک گشت بسته است. اگر گراف مسطح $G$ ناهمبند باشد، کران وجه بیرونی اجتماع چند گشت بسته است. گراف $G$ را **مسطح بیرونی** می‌نامیم هرگاه دارای نمایش مسطحی در صفحه باشد که در آن هر رأس، روی مرز وجه بیرونی قرار گرفته است.

**زیرتقسیم** یال $uv$ در گراف $G$، عبارت است از عمل جایگزین کردن یال $uv$ با مسیر $uwv$، که در آن $w$ یک رأس جدید است. گراف $H$ یک **مینور** از گراف $G$ است هرگاه بتوان $H$ را با دنباله‌ای از حذف‌ها و انقباض‌های برخی از یال‌های $G$، به دست آورد.

**گراف جهت‌دار** $D$ عبارت است از یک سه‌تایی شامل یک مجموعه‌ی $V(D)$ به نام رأس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(D)$ به نام **کمان‌ها** یا **یال‌های جهت‌دار** و یک نگاشت وقوع است که به هر عضو از $E(D)$ یک زوج مرتب از اعضای $V(D)$ را نظیر می‌کند. اگر نگاشت وقوع، زوج $(u,v)$ را به یال جهت‌دار $e \in E(D)$ نسبت دهد، آن‌گاه رأس $u$ را **دم** و رأس $v$ را **سر** $e$ می‌نامیم و ارتباط $u$ و $v$ را با $u \to v$ نیز نمایش می‌دهیم.

گراف‌های جهت‌دار را نیز می‌توان به صورت نمودار در صفحه نمایش داد. برای این کار، به ازای هر رأس یک نقطه (تصویر نقاط متمایز، متمایز است) و به ازای هر کمان، یک پیکان بین دو انتهای آن، که جهت آن از دم به سر کمان است، قرار می‌دهیم. متناظر با هر گراف جهت‌دار $D$، با حذف جهت یال‌ها یک گراف به دست می‌آید که به آن **گراف زمینه** می‌گوییم. برعکس، از هر گراف $G$، با انتخاب یک جهت دلخواه برای هر یال آن، یک گراف جهت‌دار به دست می‌آید، که یک **جهت‌گذاری** برای $D$ نامیده می‌شود.

**درجه‌ی خروجی** رأس $v \in V(D)$ برابر با تعداد کمان‌ها یا یال‌های جهت‌داری است که $v$ دم آن‌ها است و آن را با $d_D^+(v)$ یا در صورتی که ایجاد ابهام نکند با $d^+(v)$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب **درجه‌ی ورودی** رأس $v \in V(D)$ برابر با تعداد یال‌های جهت‌داری است که $v$ سر آن‌ها است و آن را با $d_D^-(v)$ و یا در صورت عدم ایجاد ابهام با $d^-(v)$ نشان می‌دهیم. درجه‌ی خروجی یک رأس با ماکزیمم درجه‌ی خروجی را با $\Delta^+(D)$ یا (در صورتی که ایجاد ابهام نکند) با $\Delta^+$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی $N_D^+(u) = \{v \ : \ u \to v\}$ را **همسایگی خروجی** $u$ و هر عضو آن را یک **همسایه‌ی خروجی** $u$ می‌نامیم. همچنین، به مجموعه‌ی $N_D^-(u) = \{v \ : \ v \to u\}$، **همسایگی ورودی** $u$ و به هر عضو از آن یک **همسایه‌ی ورودی** $u$ می‌گوییم.

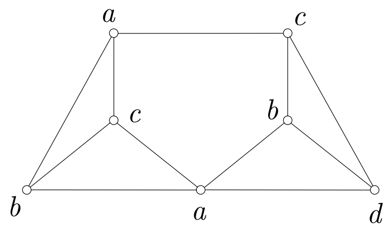
برای دو تابع $f$ و $g$ می‌نویسیم $f = O(g)$، هرگاه برای مقادیر به اندازه‌ی کافی بزرگ متغیرهای این دو تابع، ثابت مثبت $c$ وجود داشته باشد به طوری که $f \leq cg$. اگر $g = O(f)$ آن‌گاه می‌نویسیم $f = \Omega(g)$. هرگاه با افزایش مقدار متغیر دو تابع $f$ و $g$، نسبت $f/g$ به سمت صفر میل کند، می‌نویسیم $f = o(g)$.

## ۱ـ۲ تاریخچه و مفاهیم اولیه

رنگ‌آمیزی گراف‌ها یکی از مباحث جذاب و کاربردی در نظریه‌ی گراف است. انواع مختلف رنگ‌آمیزی برای گراف‌ها تعریف شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به رنگ‌آمیزی رأسی، رنگ‌آمیزی یالی، رنگ‌آمیزی کلی، رنگ‌آمیزی فاصله‌ای، رنگ‌آمیزی ستاره‌ای و ... اشاره نمود. رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها یکی از انواع رنگ‌آمیزی تعریف‌شده است که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در این بخش ضمن تعریف پیش‌نیازهای لازم در مورد رنگ‌آمیزی گراف‌ها و رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها به ارایه‌ی تاریخچه‌ی مختصری از تحقیقات انجام گرفته در رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۱** [۳۴] یک **رنگ‌آمیزی رأسی** در گراف مفروض $G$ عبارت است از نگاشت $c: V(G) \longrightarrow C$ که در آن $C$ مجموعه‌ای از رنگ‌های متفاوت است. در رنگ‌آمیزی $c$ برای گراف $G$، به ازای $v \in V(G)$، $c(v)$ را رنگ (یا برچسب) رأس $v$ گوییم. رنگ‌آمیزی $c$ را یک **رنگ‌آمیزی معتبر** می‌نامیم، هرگاه هر دو رأس مجاور در $G$ رنگ‌های متفاوتی دریافت کنند. یک $k$ـ**رنگ‌آمیزی** برای گراف $G$، یک رنگ‌آمیزی معتبر رأسی است که در آن از $k$ رنگ استفاده شده باشد. گراف $G$ را $k$ـ**رنگ‌پذیر** گوییم هرگاه $G$ دارای یک $k$ـرنگ‌آمیزی معتبر باشد. کمترین تعداد رنگ‌هایی که لازم است تا گراف $G$ یک $k$ـرنگ‌آمیزی معتبر داشته باشد را **عدد رنگی** گراف $G$ می‌نامیم و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه رنگ‌آمیزی یالی گراف $G$، نگاشتی به صورت $c: E(G) \longrightarrow C$ تعریف می‌شود و این رنگ‌آمیزی را معتبر گوییم هرگاه یال‌های مجاور رنگ‌های متفاوت دریافت نمایند.

**مثال ۲.۱** در شکل زیر یک ۴ـرنگ‌آمیزی رأسی از گرافی دلخواه به تصویر کشیده شده است.




شکل ۱ـ۱: یک رنگ‌آمیزی رأسی معتبر

در این پایان‌نامه منظور از رنگ‌آمیزی در همه‌جا یک رنگ‌آمیزی معتبر می‌باشد.

مفهوم رنگ‌آمیزی وقوع یک گراف اولین بار توسط بروالدی و ماسی در سال ۱۹۹۳ در کنار مطالعه بر رنگ‌آمیزی یالی قوی گراف‌ها مطرح شد. مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I(G) = \{(v,e) \in V(G) \times E(G) : \text{رأس } v \text{ بر یال } e \text{ واقع است}\}$$

این مجموعه را به عنوان مجموعه‌ی وقوع یک گراف می‌شناسیم و هر عضو در این مجموعه یک وقوع گفته می‌شود. رنگ‌آمیزی وقوع گراف معادل با ارایه‌ی یک رنگ‌آمیزی معتبر بر اعضای مجموعه‌ی وقوع گراف است. در [۸]، پس از تعریف اولیه‌ی این مفهوم، ابتدا یک کران پایین برای عدد رنگی وقوع ارایه شده است. سپس رنگ‌آمیزی وقوع گراف کامل، درخت‌ها و گراف‌های کامل دوبخشی مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه کران بالایی برای عدد رنگی وقوع یک گراف ارایه شده است. همچنین در این مقاله به طور کلی حدس زده شده است که هر گراف دلخواه قابل رنگ‌آمیزی وقوع با استفاده از $\Delta + ۲$ رنگ می‌باشد. این حدس به ICC معروف است. طرح ICC مقدمه‌ای برای گسترش مفهوم رنگ‌آمیزی وقوع و بررسی رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های مختلف در راستای اثبات یا رد این حدس بود.

در [۱۳]، گویدولی با استفاده از ارتباطی که بین رنگ‌آمیزی وقوع یک گراف با مفهوم درختانه‌ی ستاره‌ای جهت‌دار گراف برقرار کرد، توانست با ارایه‌ی مثال نقضی ICC را در حالت کلی نقض کند. او همچنین کران بالای به دست‌آمده در [۸] را بهبود بخشید.

در [۹]، رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های شناخته‌شده‌ای از قبیل مسیرها، دورها و چرخ‌ها مورد مطالعه قرار گرفت.

در [۲۹]، رنگ‌آمیزی وقوع گراف هالین با درجه ماکزیمم حداقل ۵ و همچنین رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های مسطح بیرونی با درجه ماکزیمم حداقل ۴ مورد مطالعه قرار گرفت. البته برخی نتایج این مقاله دارای اشکالاتی بود که چند سال بعد در [۲۵] تصحیح شد.

با وجود نقض ICC در [۱۳]، تلاش برای اثبات ICC از دیدگاه مقدار درجه ماکزیمم گراف در [۲۴] مورد توجه قرار گرفت. در این مقاله، ICC برای گراف‌های ۳−منظم هامیلتونی و برخی گراف‌های ۳−منظم دیگر ثابت شد. در پایان این مقاله حدس زده شد که به طور کلی ICC برای هر گراف ۳−منظمی برقرار است. در [۳۲]، ICC برای گراف‌های مکعبی که دارای یک مسیر هامیلتونی هستند و همچنین گراف‌های مکعبی بدون یال برشی با کمر خیلی بزرگ به اثبات رسید. همچنین مشخصه‌سازی‌ای برای گراف‌های منظم $(\Delta + ۱)$−رنگ‌پذیر ارایه شد.

در [۳۳] رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های کامل چندبخشی و نیز سه خانواده‌ی نامتناهی از گراف‌ها مورد توجه قرار گرفت.

در [۱۶]، رنگ‌آمیزی وقوع شبکه‌های مربعی، شبکه‌های شش‌ضلعی و شبکه‌های لانه‌زنبوری مورد مطالعه قرار گرفت و ICC برای این دسته از گراف‌ها هم به اثبات رسید.

در [۱۵]، کرانی برای رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های $k$−تباهنده به دست آمد. این کران برای گراف‌های مسطح با دو واحد کاهش ثابت شد. همچنین در این مقاله ICC برای گراف‌های $K_۴$−مینورآزاد به اثبات

رسید.

در [۱۴]، کران بالا برای عدد رنگی وقوع گراف‌های ۳−تباهنده با یک واحد کاهش به اثبات رسید. همچنین با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی روی کمیت ماکزیمم درجه میانگین و کمر گراف، ICC برای گراف‌های دیگری به اثبات رسید.

در [۲۲]، مایدانسکی رنگ‌آمیزی گراف‌های مکعبی را در حالت کلی مورد توجه قرار داد و ICC را برای هر گراف با ماکزیمم درجه‌ی ۳ ثابت کرد.

در [۱۹] ثابت شد که تعیین این‌که آیا یک گراف در حالت کلی $k$−رنگ‌پذیر است یا خیر، یک مسئله‌ی NP−کامل است.

در [۱۱] رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های ۱−درخت مورد توجه قرار گرفت و ICC برای این دسته از گراف‌ها به اثبات رسید.

در [۱۸] رنگ‌آمیزی وقوع توان $k$−ام مسیرها و توان دوم درخت‌ها مورد بررسی قرار گرفت و کران بالایی برای عدد رنگی وقوع گراف هالین به اثبات رسید.

از آن‌جا که برخی نتایج ارایه‌شده در مقالات مرتبط با رنگ‌آمیزی وقوع دارای اشکالاتی بود، در مقاله‌ی [۲۵] به این دسته از اشکالات رسیدگی شد و مورد اصلاح قرار گرفت. همچنین رنگ‌آمیزی گراف هالین مکعبی در این مقاله بررسی شد.

در [۳۱] رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌های مسطح بیرونی بررسی شد و ICC برای این گراف‌ها به اثبات رسید. به علاوه این کران در [۲۵] برای گراف‌های مسطح بیرونی با کمر $g \geq ۷$ با یک واحد کاهش بهبود یافت.

در [۲۶] عدد رنگی وقوع حاصل‌ضرب دکارتی دورها به طور دقیق محاسبه شد.

مفهوم گراف وقوع در [۳۶] تعریف شد و برخی خواص گراف وقوع و ارتباطات بین گراف وقوع و رنگ‌آمیزی وقوع یک گراف مورد توجه قرار گرفت. همچنین تا حدودی به رنگ‌آمیزی یالی برخی گراف‌های وقوع پرداخته شد.

در [۲۸] نیز گراف وقوع مورد توجه قرار گرفت و نتایجی راجع به عدد احاطه‌گر آن به دست آمد.

## ۱−۳ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

در این پایان‌نامه در شش فصل، به نتایج به دست‌آمده در رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها از معرفی این موضوع تا آخرین نتایج که مربوط به سال ۲۰۱۰ می‌باشد، خواهیم پرداخت.

در فصل دوم مفهوم مجموعه‌ی وقوع و رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها را به طور دقیق تعریف می‌نماییم و

به ارتباط بین رنگ‌آمیزی وقوع یک گراف با برخی مفاهیم شناخته‌شده‌ی دیگر در نظریه‌ی گراف اشاره می‌نماییم. سپس گراف وقوع را که ساختاری برگرفته از مجموعه‌ی وقوع یک گراف است معرفی کرده و به روشی برای ساخت گراف وقوع هر گراف اشاره خواهیم نمود. پس از آن برخی روابط میان رنگ‌آمیزی وقوع یک گراف و گراف وقوع آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد و در بخش پایانی فصل، به مطالعه‌ی جزیی‌تر برخی خواص گراف وقوع می‌پردازیم.

در فصل سوم، ابتدا کران پایین رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌ها را معرفی کرده و شرطی لازم و کافی برای گراف‌های منظمی که این کران را اختیار می‌نمایند ارایه می‌نماییم. همچنین شرطی لازم بر تعداد رئوس یک گراف منظم که این کران را اختیار نماید، خواهیم دید. در ادامه‌ی فصل کران پایین ارایه‌شده را برای گراف‌های متعددی از جمله شبکه‌ها، گراف هالین با $\Delta(G) \geq ۵$، گراف‌های مسطح بیرونی با $\Delta(G) \geq ۷$ اثبات خواهیم نمود. در انتهای فصل نیز کران پایین دیگری از عدد رنگی وقوع گراف‌ها بر مبنای عدد احاطه‌گر آن‌ها به دست می‌آوریم.

در فصل چهارم کران بالای رنگ‌آمیزی وقوع را به دو روش به دست می‌آوریم و به دو حدس مهم در رنگ‌آمیزی وقوع (که دومین این حدس‌ها به ICC معروف است) اشاره خواهیم نمود. سپس کران بالای به دست‌آمده را با استفاده از ارتباط رنگ‌آمیزی وقوع با مفهوم دیگری در نظریه‌ی گراف بهبود خواهیم بخشید. در ادامه با ارایه‌ی مثالی ثابت خواهیم کرد که ICC در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. با این‌وجود در ادامه‌ی فصل برقراری این حدس را برای گراف‌هایی از جمله گراف‌های کامل چندبخشی، گراف هالین ۳–منظم و ... ثابت خواهیم نمود.

در فصل پنجم، ICC را از دیدگاه مقدار درجه‌ی ماکزیمم یک گراف مورد بررسی قرار می‌دهیم و برقراری آن را در حالت کلی برای گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۳، ثابت خواهیم کرد. در بخش ۵ − ۳ نیز نتایج به دست‌آمده‌ی حاصل از این پایان‌نامه راجع به تحقیق برقراری حدس‌های رنگ‌آمیزی وقوع برای گراف‌های با ماکزیمم درجه‌ی ۴ را بیان می‌کنیم. این نتایج در مقاله‌ی [۱۲] جمع‌آوری و برای چاپ ارسال شده است.

در فصل ششم، رنگ‌آمیزی وقوع گراف‌هایی از جمله گراف‌های $k$–تباهنده، گراف‌های $K_۴$–مینور آزاد و گراف‌های مسطح را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

# فصل ۲

# رنگ‌آمیزی وقوع و گراف وقوع

در این فصل ابتدا به تعریف دقیق مفهوم رنگ‌آمیزی وقوع در یک گراف می‌پردازیم. سپس ارتباطات این نوع از رنگ‌آمیزی را با سایر مفاهیم در نظریه‌ی گراف بررسی خواهیم نمود. همچنین به معرفی گراف وقوع خواهیم پرداخت و در پایان به برخی روابط میان رنگ‌آمیزی وقوع و گراف وقوع اشاره خواهیم نمود.

## ۲—۱ مجموعه‌ی وقوع و رنگ‌آمیزی وقوع

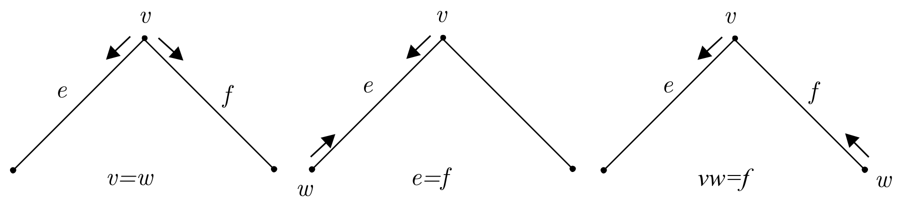
**تعریف ۱.۲** [۸] فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده و متناهی با $n$ رأس و $m$ یال است. مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I(G) = \{(v, e) \in V(G) \times E(G) : \text{رأس } v \text{ بر یال } e \text{ واقع است}\}$$

مجموعه‌ی $I(G)$ را **مجموعه‌ی وقوع** و هر زوج به شکل $(v, e)$ را یک **وقوع** گراف $G$ می‌نامیم. به این ترتیب هر یال در یک گراف ساده‌ی دلخواه دقیقاً دو وقوع را مشخص می‌کند.
در این پایان‌نامه غالباً هر وقوع $(v, e)$ را با علامت پیکان $\to$ که در آن جهت پیکان به سمت خارج از رأس $v$ اشاره دارد، خواهیم شناخت. به ازای یال دلخواه $e = uv$، جهت اشاره به وقوع $(u, uv)$ نماد $(u, v)$ را به کار می‌بریم. همچنین همواره مجموعه وقوع‌های به شکل $(u, uv)$ را با $A(v)$ و مجموعه وقوع های به

شکل $(v, vu)$ را با $I(v)$ نشان می‌دهیم.
با توجه به مفهوم کلی رنگ‌آمیزی، بدیهی است برای رنگ‌آمیزی وقوع‌های یک گراف دلخواه ابتدا بایستی مفهوم مجاورت وقوع‌ها را دانست تا بتوان با تخصیص رنگ‌های متفاوت به وقوع‌های مجاور در یک گراف به رنگ‌آمیزی سره‌ای از آن دست یافت. در این‌جا حالت‌های ممکن برای مجاورت دو وقوع را معرفی می‌نماییم.

**تعریف ۲.۲** [۸] دو وقوع $(v, e)$ و $(w, f)$ را مجاور گوییم هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
الف) $v = w$؛
ب) $e = f$؛
ج) یال $vw$ برابر با $e$ یا $f$ باشد.
هریک از سه حالت مجاورت درشکل ۲—۱ به تصویرکشیده شده‌اند.




شکل ۲—۱: حالت‌های مجاورت دو وقوع

اینک با شناخت وقوع‌های مجاور، به تعریف رنگ‌آمیزی وقوع در یک گراف می‌پردازیم.

**تعریف ۳.۲** [۸] فرض کنیم $S$ مجموعه‌ای از رنگ‌ها در گراف $G$ است. یک **رنگ‌آمیزی وقوع** گراف $G$ نگاشت $\sigma : I(G) \to S$ است به طوری که تحت این نگاشت وقوع‌های مجاور رنگ‌های متفاوت دریافت کنند. اگر $\sigma : I(G) \to S$ یک رنگ‌آمیزی وقوع از $G$ باشد به طوری‌که $|S| = k$، آن‌گاه $\sigma$ را یک $k$–وقوع رنگ‌آمیزی از $G$ و $G$ را $k$–**وقوع رنگ‌پذیر** گوییم. گوییم. **عدد رنگی وقوع** $G$ که آن را با $\chi_i(G)$ نمایش می‌دهیم کم‌ترین مقدار $k$ است که گراف $G$ دارای یک $k$–وقوع رنگ‌آمیزی باشد.
در ادامه در این پایان‌نامه هرگاه سخن از رنگ‌آمیزی به میان آید، منظور همان رنگ‌آمیزی وقوع گراف است.

**مثال ۴.۲** درشکل ۲ـ۲ یک رنگ‌آمیزی وقوع از گراف معروف به‌گراف پترسن به تصویر کشیده شده است.