دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

رشته:

ریاضی محض

گرایش توپولوژی

عنوان:

دستگاه‌ها و فضاهای همسایگی ضعیف

نگارنده:

آرش حیاتی

استاد راهنما:

دکتر فریبرز آذرپناه

استاد مشاور:

دکتر رستم محمدیان

آبان 1389

چکیده

نام خانوادگی: حیاتی **نام**: آرش
عنوان پایان‌نامه: دستگاه‌ها و فضاهای همسایگی ضعیف
استاد راهنما: دکتر فریبرز آذرپناه **استاد مشاور**: دکتر رستم محمدیان
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته**: ریاضی محض **گرایش**: توپولوژی **محل تحصیل**: دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده**: علوم ریاضی و کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی**: آبان 89 **تعداد صفحه**: 102
واژه‌های کلیدی: دستگاه همسایگی ضعیف، فضای همسایگی ضعیف، مجموعه‌های w_y-باز، $W_y(X)$، w-پیوستگی، w-بازی، $w(y,f)$-پیوستگی، $w(y,f)$-بازی، w^*-پیوستگی، w^*-بازی، تقریباً P-فضای تعمیم یافته، تقریباً P-نقطه، $(GT)^{\circ}$، m-نقطه.
چکیده: ابتدا دستگاه همسایگی ضعیف را بر اساس نظریه‌ی دستگاه‌های همسایگی تعمیم یافته تعریف می‌نماییم. به کمک دستگاه همسایگی ضعیف، یک فضای همسایگی ضعیف تولید می‌کنیم. مجموعه‌های w_y-باز یک فضای همسایگی ضعیف را تعریف و مجموعه‌ی تمام این عناصر را $W_y(X)$ می‌نامیم. ثابت می‌کنیم $W_y(X)$ یک توپولوژی است. اگر (X,y) و (Y,f) دو فضای همسایگی ضعیف و $f: X \to Y$ یک تابع باشد، تعریف و بررسی خاصیت‌های w-پیوستگی، w-بازی، $w(y,f)$-پیوستگی، $w(y,f)$-بازی، w^*-پیوستگی، w^*-بازی f و نیز ارتباط این پیوستگی‌ها و بازی‌ها، هدف بعدی این نوشتار می‌باشد. در پایان با بازگشت به فضاهای همسایگی تعمیم یافته، تقریباً P-فضای تعمیم یافته، تقریباً P-نقطه، $(GT)^{\circ}$ و m-نقطه را معرفی می‌نماییم و برخی ویژگی‌های آنان را بیان می‌کنیم. مقایسه‌ی این خاصیت‌ها پایان‌بخش این پایان‌نامه می‌باشد.

فهرست

پیش گفتار

در سال 1997 میلادی، سزار[1] به کمک تعریف توپولوژی، مفهومی را به نام ((توپولوژی تعمیم یافته)) ارائه داد. در توپولوژی تعمیم یافته، شرط باز بودن مجموعه‌ی مرجع یا X و همچنین باز بودن اشتراک تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، از تعریف توپولوژی حذف شده است. به همین دلیل و از ابتدا، مجموعه‌ی X، ناتهی در نظر گرفته می‌شود. در اینجا با استفاده از توپولوژی تعمیم یافته و به کمک همسایگی‌های ضعیف، تعریفی به نام ((فضای همسایگی ضعیف)) ارائه می‌شود و ویژگی‌هایی از آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل یک با تعریف توپولوژی آغاز و برخی خاصیت‌های ابتدایی یک توپولوژی، فهرست‌وار ذکر می‌گردد. در انتهای فصل یک، توپولوژی تعمیم یافته تعریف و برخی ویژگی‌های آن، بیان خواهد شد. فصل دوم با تعریف دستگاه همسایگی ضعیف آغاز و با استفاده از آن، یک فضای همسایگی ضعیف تولید می‌گردد. در ادامه نوعی درون و بستار به کمک دستگاه همسایگی ضعیف تعریف و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. $w(y,f)$–پیوستگی و $w(y,f)$–بازی یک تابع و ارتباط این توابع با عملگرهای درون و بستار تعریف شده، از دیگر موارد مورد بحث ما خواهند بود. در انتها، یک نوع همسان‌ریختی با استفاده از $w(y,f)$–پیوستگی و $w(y,f)$–بازی بیان خواهد شد. در فصل سوم مجموعه‌های باز و بسته‌ی یک فضای همسایگی ضعیف، بستار و درون یک مجموعه در یک فضای همسایگی ضعیف، بر پایه‌ی بستار و درون در یک توپولوژی، تعریف می‌گردد. w–پیوستگی و w–بازی، خواص آن‌ها و

---

[1] Császár

همسان‌ریختی نوع اول که به کمک این توابع تعریف می‌شود، پایان بخش این فصل خواهد بود. در فصل چهارم نوع جدیدی از درون و بستار یک مجموعه و نیز قوی‌ترین نوع پیوستگی و بازی یک تابع و همچنین نوع قوی همسان‌ریختی تعریف و مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در فصل پایانی با بازگشت به توپولوژی تعمیم یافته، ویژگی‌های تازه‌ای از این توپولوژی، به کمک تعاریف گفته شده و مثال‌های بیان شده، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در سراسر نوشتار، در هر فصل، تمام قضایا، گزاره‌ها، نتایج، تبصره‌ها و مثال‌ها، شماره‌ی متوالی دارند و نحوه‌ی ارجاع به این شکل است که اگر به طور مثال نوشته باشیم قضیه‌ی m، منظور قضیه‌ی شماره m از همان فصل است. اما اگر نوشته باشیم قضیه‌ی m-n، منظور قضیه‌ی شماره m از فصل n است. این قرارداد تنها در گراف‌های انتهای فصل چهار نقض می‌شود. اگر X یک مجموعه باشد، هر سه نماد $\exp(X)$، 2^X و $\mathrm{P}(X)$، به معنی مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های X می‌باشند و هیچ کدام مزیتی نسبت به دیگری ندارند. ¡، ¤، $¤^c$، ¢ و ¥ به ترتیب نماد مجموعه‌های اعداد حقیقی، گویا، گنگ، صحیح و طبیعی می‌باشند. مجموعه‌ی اعداد حسابی یا $¥ \mathbf{U} \{0\}$ را با $¥_0$ نمایش می‌دهیم. $A \subseteq B$ به این معنی است که مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B می‌باشد. نماد $\subseteq$ مانع برقراری تساوی $A = B$ نیست. اما اگر A زیر مجموعه‌ی سره‌ی B باشد ($A \subseteq B$ و $A \neq B$)، می‌نویسیم $A \subset B$. نماد + به معنی پایان اثبات یک قضیه، گزاره، تبصره یا مثال می‌باشد. وجود خط مورب یا / بر هریک از علائم ریاضی به معنی عدم برقراری آن رابطه می‌باشد. نماد $\vee$ به معنی ((یا)) و نماد $\wedge$ به معنی ((و)) به کار رفته است.

در پایان از جناب آقای دکتر فریبرز آذرپناه به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان بی‌نهایت سپاسگزارم.

آرش حیاتی

آبان 1389

فصل اول

توپولوژی و توپولوژی تعمیم یافته

1-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه باشد. $t \subseteq P(X)$ را یک توپولوژی[1] روی X می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

T1- X و $\emptyset$ متعلق به t باشند.

T2- اشتراک هر دو عنصر t، متعلق به t باشد.

T3- اجتماع هر تعداد از عناصر t، متعلق به t باشد.

به مجموعه X همراه با توپولوژی t که روی آن تعریف شده است، یک فضای توپولوژیک[2] می‌گوییم و آن را با (X,t) نمایش می‌دهیم. هرگاه ابهامی در مورد t وجود نداشته باشد، به جای زوج مرتب (X,t) از نماد X به تنهایی برای نشان دادن فضای توپولوژیک استفاده می‌کنیم.

2-1 **تعریف**: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$؛ آن‌گاه $x \in X$ نقطه درونی[3] A است، هرگاه $G \in t$ موجود باشد که $x \in G \subseteq A$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط درونی A را با $\mathrm{Int}_X A$ یا A° نمایش می‌دهیم و آن را درون A می‌نامیم. به عبارت دیگر،

$$\mathrm{Int}_X A = \mathbf{U}\{G \subseteq X \,|\, (G \in t) \wedge (G \subseteq A)\}.$$

---

[1] topology

[2] topological space

[3] interior point

1-3 **تعریف**: هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$؛ بستار[1] A را با $Cl_X A$ یا $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Cl_X A = \bigcap \{K \subseteq X \mid A \subseteq K \wedge X - K \in t\}.$$

1-4 **قضیه**: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq B \subseteq X$؛ عبارت‌های زیر برقرارند:

(الف) $\mathrm{Int}_X A \subseteq \mathrm{Int}_X B$.

(ب) $Cl_X A \subseteq Cl_X B$.

اثبات: به [13] رجوع شود. +

1-5 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه دلخواه باشد. تابع $f: 2^X \to 2^X$ را یک عملگر درون[2] می‌خوانیم، اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:

C1- برای هر $A \in 2^X$ داشته باشیم $f(A) \subseteq A$.

C2- برای هر $B \in 2^X$ و A داشته باشیم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

C3- $f(X) = X$.

C4- برای هر $A \in 2^X$ داشته باشیم $f(f(A)) = f(A)$.

اکنون با استفاده از تابع عملگر درون می‌توان یک توپولوژی روی X ساخت، به این صورت که A باز است، اگر و تنها اگر $f(A) = A$. به عبارتی دیگر $t = \{A \subseteq X \mid f(A) = A\}$ یک توپولوژی روی X است که در آن برای هر $B \subseteq X$ داریم $\mathrm{Int}_X B = f(B)$.

1-6 **تعریف**: اگر X یک فضای توپولوژیک و $x \in X$ دلخواه باشد؛ $U \subseteq X$ را یک همسایگی[3] برای x می‌گوییم، هرگاه $x \in \mathrm{Int}_X U$. به عبارت دیگر $G \in t$

---

[1] closure

[2] interior operation

[3] neighborhood

یافت شود به طوری که $x \in G \subseteq U$. مجموعه‌ی تمام همسایگی‌های روی x را یک دستگاه همسایگی[1] روی x گوییم و آن را با u_x نمایش می‌دهیم.

7-1 **قضیه**: فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک و u_x یک دستگاه همسایگی روی x باشد. در این صورت u_x دارای خصوصیات زیر است:

N1- اگر $U \in u_x$، آن‌گاه $x \in U$.

N2- اگر $V \in u_x$ و U، آن‌گاه $U \cap V \in u_x$.

N3- اگر $U \in u_x$، آن‌گاه یک $V \in u_x$ وجود دارد، به طوری که به ازای هر $y \in V$، داشته باشیم $U \in u_y$.

N4- اگر $U \in u_x$ و $U \subseteq V$، آن‌گاه $V \in u_x$.

و در نهایت

N5- $G \subseteq X$ باز است، اگر و تنها اگر برای هر $x \in G$ ، $V \in u_x$ یافت شود که $V \subseteq G$.

اثبات: به [13] رجوع شود. +

8-1 **قضیه**: اگر X یک فضای توپولوژیک و به ازای هر $x \in X$، u_x یک دستگاه همسایگی روی x باشد، آن‌گاه

(الف) به ازای هر $A \subseteq X$، $\mathrm{Int}_X A = \{x \in A \mid \exists V \in u_x \ni V \subseteq A\}$.

(ب) به ازای هر $A \subseteq X$، $Cl_X A = \{x \in X \mid \forall V \in u_x : V \cap A \neq \varnothing\}$.

اثبات: به [13] رجوع شود. +

9-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم (X,t) و (Y,t') دو فضای توپولوژیک باشند. می‌گوییم تابع $f: X \to Y$ در $x \in X$ پیوسته[2] است، هرگاه برای هر $V \in u_{f(x)}$، $U \in u_x$ یافت شود به گونه‌ای که $f(U) \subseteq V$. تابع f را پیوسته گوییم، اگر و تنها اگر f در هر نقطه‌ی X پیوسته باشد.

[1] neighborhood system

[2] continuous function

1-10 **قضیه**: فرض می‌کنیم (X,t) و (Y,t') دو فضای توپولوژیک و $f: X \to Y$ تابع باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) f پیوسته است.

(ب) به ازای هر مجموعه‌ی باز G در Y، $f^{-1}(G)$ در X باز است.

(پ) به ازای هر مجموعه‌ی بسته F در Y، $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

(ت) به ازای هر $A \subseteq X$، $f(Cl_X(A)) \subseteq Cl_Y f(A)$.

(ث) به ازای هر $B \subseteq Y$، $Cl_X f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(Cl_Y(B))$.

(ج) به ازای هر $B \subseteq Y$، $f^{-1}(\mathrm{Int}_Y(B)) \subseteq \mathrm{Int}_X(f^{-1}(B))$.

اثبات: به [1] و [13] رجوع شود. +

1-11 **تعریف**: اگر X و Y دو فضای توپولوژیک و $f: X \to Y$ تابع باشد، f را یک تابع باز[1] گوییم، اگر تصویر هر مجموعه باز در X، تحت f، در Y باز باشد. به همین ترتیب f را بسته[2] گوییم، اگر تصویر هر مجموعه‌ی بسته در X، تحت f، در Y بسته باشد.

1-12 **تعریف**: فرض می‌کنیم (X,t) و (Y,t') دو فضای توپولوژیک باشند. X و Y را همسان‌ریخت[3] می‌گوییم، هرگاه تابع یک به یک و پوشای $f: X \to Y$ وجود داشته باشد، به طوری که توابع $f: X \to Y$ و $f^{-1}: Y \to X$ پیوسته باشند. در این صورت می‌نویسیم $X \cong Y$ و تابع f را یک همسان‌ریختی[4] می‌نامیم. پیوسته بودن f^{-1}، معادل باز بودن f می‌باشد.

1-13 **تعریف**: فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $y: X \to \exp(\exp(X))$ به گونه‌ای باشد که برای هر $V \in y(x)$، $x \in V$. در این صورت هر $V \in y(x)$ را

[1] open function

[2] closed function

[3] homeomorphic

[4] homeomorphism

یک همسایگی تعمیم یافته[1] و ψ را یک دستگاه همسایگی تعمیم یافته[2] روی X یا به اختصار یک GNS روی X می‌گوییم.

14-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. خانواده‌ی g از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی تعمیم یافته[3] روی X گوییم؛ اگر $\emptyset \in g$ و از $G_i \in g$ به ازای هر $i \in I \neq \emptyset$، داشته باشیم $\bigcup_{i\in I} G_i \in g$. فضای توپولوژیک تعمیم یافته‌ی g روی X را با (X, g) نمایش می‌دهیم. در حقیقت یک توپولوژی تعمیم یافته روی X، خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X است که شامل تهی بوده و نسبت به اجتماع بسته باشد.

اگر g یک توپولوژی تعمیم یافته روی X باشد، اعضای g را مجموعه‌های g–باز[4] و متمم آن‌ها را مجموعه‌های g–بسته[5] می‌گوییم. اگر X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\psi : X \to \exp(\exp(X))$ یک دستگاه همسایگی تعمیم یافته روی X باشد، توپولوژی تعمیم یافته‌ی تولید شده توسط ψ بر X را با $g_\psi(X)$، یا به اختصار با g_ψ نمایش می‌دهیم. در این صورت داریم به ازای هر $G \subseteq X$، $G \in g_\psi$؛ اگر و تنها اگر برای هر $x \in G$، $V \in \psi(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $V \subseteq G$.

15-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\psi : X \to \exp(\exp(X))$ یک دستگاه همسایگی تعمیم یافته روی X باشد. (X, ψ)، یعنی مجموعه‌ی X به همراه دستگاه همسایگی تعمیم یافته‌ی ψ را یک فضای همسایگی تعمیم یافته[6] روی X می‌نامیم.

---
[1] generalized neighborhood

[2] generalized neighborhood system

[3] generalized topology

[4] g-open sets

[5] g-closed sets

[6] generalized neighborhood space

16-1 **تعریف**: با فرض این‌که X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی، g و g' توپولوژی‌های تعمیم یافته‌ای به ترتیب روی X و Y باشند، تابع $f:(X,g)\to(Y,g')$ را (g,g')–پیوسته[1] می‌گوییم، اگر به ازای هر $G'\in g'$، داشته باشیم: $f^{-1}(G')\in g$.

17-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی، g و g' توپولوژی‌های تعمیم یافته‌ای به ترتیب روی X و Y باشند. تابع $f:(X,g)\to(Y,g')$ را (g,g')–باز[2] می‌گوییم، اگر به ازای هر $G\in g$ داشته باشیم: $f(G)\in g'$.

18-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی ، g و g' توپولوژی‌های تعمیم یافته‌ای به ترتیب روی X و Y باشند. تابع $f:(X,g)\to(Y,g')$ را یک همسان‌ریختی نوع اول بین (X,g) و (Y,g') می‌گوییم، اگر f ، یک به یک، پوشا، (g,g')–پیوسته و $f^{-1}:(Y,g')\to(X,g)$ یک تابع (g',g)–پیوسته باشد. در این صورت می‌گوییم X با Y همسان‌ریخت نوع اول است و می‌نویسیم $(X,g)\cong_1(Y,g')$. اگر ابهامی در مورد g و g' نباشد، از نماد $X\cong_1 Y$ استفاده می‌نماییم.

19-1 **تذکر**: اگر $f:(X,g)\to(Y,g')$ یک تناظر یک به یک بین دو فضای توپولوژیک تعمیم یافته‌ی (X,g) و (Y,g') باشد، (g',g)–پیوستگی تابع $f^{-1}:(Y,g')\to(X,g)$ ، معادل (g,g')–بازی f می‌باشد.

20-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی و $y:X\to\exp(\exp(X))$ و $f:Y\to\exp(\exp(Y))$ دستگاه‌های همسایگی تعمیم یافته‌ای به ترتیب روی X و Y باشند. تابع $f:X\to Y$ را (y,f)–پیوسته[3]

[1] (g,g')-continuous

[2] (g,g')-open

[3] (y,f)-continuous

می‌گوییم، اگر به ازای هر $x\in X$ و $V\in f(f(x))$، یک $U\in y(x)$ موجود باشد به طوری که $f(U)\subseteq V$.

1-21 **تعریف**: فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی، $y:X\to \exp(\exp(X))$ و $f:Y\to \exp(\exp(Y))$ به ترتیب دستگاه‌های همسایگی تعمیم یافته‌ای روی X و Y باشند. تابع $f:X\to Y$ را (y,f)-باز[1] گوییم، اگر به ازای هر $x\in X$ و $U\in y(x)$، یک $V\in f(f(x))$ موجود باشد به طوری که $V\subseteq f(U)$.

1-22 **تعریف**: فرض می‌کنیم (X,y) و (Y,f) فضاهای همسایگی تعمیم یافته‌ای به ترتیب روی X و Y باشند. تابع $f:(X,y)\to(Y,f)$ را یک همسان‌ریختی نوع دوم بین (X,y) و (Y,f) می‌گوییم، اگر f یک به یک، پوشا، (y,f)-پیوسته و $f^{-1}:(Y,f)\to(X,y)$، یک تابع (f,y)-پیوسته باشد. در این صورت می‌گوییم X با Y همسان‌ریخت نوع دوم است و می‌نویسیم $(X,y)\cong_2(Y,f)$. اگر ابهامی در مورد دستگاه‌های همسایگی تعمیم یافته‌ی y و f نباشد، از نماد $X\cong_2 Y$ استفاده می‌نماییم.

1-23 **تذکر**: اگر $f:(X,y)\to(Y,f)$ یک تناظر یک به یک بین دو فضای همسایگی تعمیم یافته‌ی (X,y) و (Y,f) باشد، (f,y)-پیوستگی تابع $f^{-1}:(Y,f)\to(X,y)$، معادل با (y,f)-باز بودن f می‌باشد.

1-24 **تعریف**: فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی و $y:X\to \exp(\exp(X))$ و $f:Y\to \exp(\exp(Y))$ به ترتیب دستگاه‌های همسایگی تعمیم یافته‌ای روی X و Y باشند. تابع $f:(X,y)\to(Y,f)$ را gn-پیوسته[2] می‌گوییم، اگر به ازای هر $x\in X$ و $U\in f(f(x))$، داشته باشیم $f^{-1}(U)\in y(x)$.

---
[1] (y,f)-open

[2] gn-continuous

25-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی، $y : X \to \exp(\exp(X))$ و $f : Y \to \exp(\exp(Y))$ به ترتیب دستگاه‌های همسایگی تعمیم یافته‌ای روی X و Y باشند؛ تابع $f : X \to Y$ را gn–باز[1] گوییم، اگر به ازای هر $x \in X$ و هر $U \in y(x)$، داشته باشیم $f(U) \in f(f(x))$.

26-1 **تعریف**: فرض می کنیم (X, y) و (Y, f) دو فضای همسایگی تعمیم یافته به ترتیب روی X و Y باشند. تابع $f : (X, y) \to (Y, f)$ را یک همسان‌ریختی نوع سوم می گوییم، اگر f، یک به یک، پوشا، gn–پیوسته و $f^{-1} : (Y, f) \to (X, y)$، gn–پیوسته باشد. در این صورت می گوییم X با Y همسان‌ریخت نوع سوم است و می‌نویسیم $(X, y) \cong_3 (Y, f)$. اگر ابهامی در مورد y و f نباشد، از نماد $X \cong_3 Y$ استفاده می‌نماییم.

27-1 **تذکر**: اگر $f : (X, y) \to (Y, f)$ یک تناظر یک به یک بین فضاهای همسایگی تعمیم یافته‌ی (X, y) و (Y, f) باشد، gn–پیوستگی تابع $f^{-1} : (Y, f) \to (X, y)$ معادل با gn–باز بودن f می‌باشد.

فرض می کنیم (X, y) یک فضای همسایگی تعمیم یافته روی X باشد و $Y \subseteq X$. $(Y, y|_Y)$ یک فضای همسایگی تعمیم یافته روی Y است که دستگاه همسایگی $y|_Y$ روی Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$y|_Y : Y \to \exp(\exp(Y))$$
$$\forall y \in Y: \quad y|_Y(y) = \{V \mathbf{I} Y : V \in y(y)\}.$$

بدیهی است که

$$g_{y|_Y}(Y) = \{G \mathbf{I} Y : G \in g_y(X)\}.$$

28-1 **تعریف**: اگر (X, y) یک فضای همسایگی تعمیم یافته روی X باشد و $Y \subseteq X$، آن‌گاه $(Y, y|_Y)$ را زیرفضای همسایگی تعمیم یافته‌ی (X, y) یا به اختصار Y را زیر فضای تعمیم یافته‌ی X می گوییم.

[1] gn-open

1-29 **تعریف**: اگر X یک مجموعه باشد، خانواده‌ی H از زیر مجموعه‌های X را یک m–خانواده[1] روی X گوییم، هرگاه $\bigcap H \neq \emptyset$.

1-30 **تعریف**: گیریم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $y : X \to \exp(\exp(X))$ یک دستگاه همسایگی تعمیم یافته و H یک m–خانواده روی X باشد. گوییم H به $x \in X$ همگراست، اگر H ظریف‌تر[2] از $y(x)$ باشد. به عبارت دیگر $H \to x$، اگر $y(x) \subseteq H$.

1-31 **تعریف**: خانواده‌ی C از زیرمجموعه‌های X را یک توده[3] روی X می‌گوییم، اگر به ازای هر $A, B \subseteq X$ که $B \subseteq A$ و $B \in C$، داشته باشیم $A \in C$. در حقیقت یک توده، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X است که نسبت به عناصر بالادست بسته است.

1-32 **تعریف**: با فرض این‌که X یک مجموعه و H یک توده روی X باشد، H را یک p–توده[4] روی X می‌خوانیم، اگر برای هر A و B متعلق به H، داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$.

1-33 **مثال**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. خانواده‌ی تمام زیر مجموعه‌های X یعنی $P(X)$، یک توده روی X است که p–توده نمی‌باشد.

1-34 **مثال**: فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک و u_x یک دستگاه همسایگی روی $x \in X$ باشد (تعریف 7). u_x یک p–توده روی X است. به این دلیل که اولاً طبق خاصیت N4، نسبت به عناصر بالادست بسته است و نیز اشتراک هر دو عضو u_x، حداقل شامل x است؛ پس اشتراک دو عضو هم نمی‌تواند تهی باشد.

[1] m-family

[2] finer

[3] stack

[4] p-stack

1-35 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و C یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد. می‌گوییم C دارای خاصیت اشتراک متناهی[1] است، هرگاه اشتراک هر تعداد متناهی از عناصر C ناتهی باشد.

1-36 **تذکر**: با توجه به تعریف 31، یک توده وقتی $p-$توده است که اشتراک هر دو عضو آن ناتهی باشد. این خاصیت ضعیف‌تر از خاصیت اشتراک متناهی می‌باشد. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را می‌آوریم:

1-37 **مثال**: فرض می‌کنیم $X=\{a,b,c\}$ و $H=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},X\}$. خانواده‌ی H، یک $p-$توده روی X است، زیرا نسبت به عناصر بالادست بسته و اشتراک هر دو عضو آن ناتهی می‌باشد. اما تعداد اعضای H متناهی و $\bigcap H=\varnothing$. پس H دارای خاصیت اشتراک متناهی نمی‌باشد.

1-38 **نمادگذاری و تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $x\in X$. در این صورت:

$$\dot{x}=\left\{A\subseteq X \,\middle|\, \{x\}\subseteq A\right\}.$$

1-39 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد و $x\in X$. هر زیرمجموعه‌ی $\dot{x}$ مانند $g(x)$ که تشکیل $p-$توده بدهد، $g-$توده همسایگی[2] x نامیده می‌شود.

1-40 **تعریف**: گیریم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. اگر به ازای هر $x\in X$، $g(x)$ یک $g-$توده همسایگی x باشد، آن‌گاه $g=\{g(x):x\in X\}$ را یک ساختار همسایگی[3] روی X و زوج (X,g) را یک فضای همسایگی[4] روی X می‌گوییم.

---

[1] finite intersection property

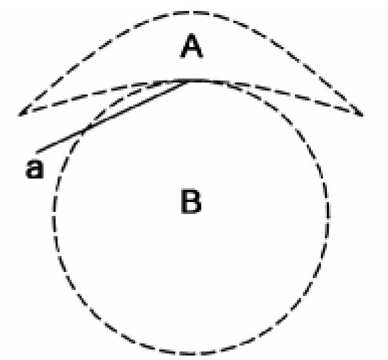
[2] $g-$neighborhood stack

[3] neighborhood structure

[4] neighborhood space

41-1 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$. خانواده‌ی T_x از زیرمجموعه‌های X را یک مجموعه از همسایگی‌های ضعیف[1] x می‌گوییم، هرگاه هر عضو T_x، شامل x باشد، اشتراک دو عضو T_x، عضوی از T_x باشد و این شرط برقرار باشد که اگر $b = \bigcup\{T_x \mid x\in X\}$؛ در این صورت $U \subseteq X$ در X باز است، اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in U$، $B \in T_x$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $B \subseteq U$.

42-1 **مثال**: فرض می‌کنیم X صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ باشد. به ازای هر $x\in \mathbb{R}^2$، T_x را مجموعه‌ی تمام به‌علاوه‌های باز به مرکز x در نظر می‌گیریم. در حقیقت هر عضو T_x، از اجتماع دو بازه‌ی باز عمودی و افقی با طول یکسان به مرکز x تشکیل شده است. واضح است که هر T_x یک مجموعه از همسایگی‌های ضعیف x است. اکنون ادعا می‌کنیم توپولوژی ساخته شده توسط $b=\{T_x \mid x\in \mathbb{R}^2\}$، ظریف‌تر از توپولوژی معمولی[2] $\mathbb{R}^2$ است. اگر توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^2$ را t و توپولوژی ساخته شده توسط b را t' بنامیم، ثابت می‌کنیم: $t \subset t'$. واضح است که هر گوی باز در $\mathbb{R}^2$ متعلق به t' نیز می‌باشد. بنابراین $t \subseteq t'$. اکنون مجموعه‌ی G را که به شکل زیر تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم:



[1] weak neighborhood

[2] general topology

G از اجتماع کلاهک باز A، گوی باز B و نقطه‌ی a تشکیل شده که A بر B در نقطه a مماس است. در حقیقت $G = A \cup B \cup \{a\}$. مجموعه‌ی G در t' باز است. زیرا برای هر $x \in G$، به‌علاوه‌ای باز به مرکز x وجود دارد که درون G قرار می‌گیرد. اما G در t باز نیست. زیرا هیچ گوی بازی به مرکز a نمی‌توان یافت که درون G قرار گیرد. به عبارت دیگر a در توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^2$، نقطه‌ی درونی G نیست. بنابراین $t' \not\subseteq t$.

1-43 **تعریف**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه و $I : 2^X \to 2^X$ یک تابع باشد که در 3 شرط زیر صدق کند:

C_1- به ازای هر $A \in 2^X$: $I(A) \subseteq A$.

C_2- به ازای هر $A، B \in 2^X$: $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$.

C_3- $I(X) = X$.

در این صورت I را یک عملگر جدید درون[1] روی X می‌نامیم. واضح است که هر عملگر درون یک عملگر جدید درون می‌باشد.

1-44 **قرارداد**: بعد از این تا انتهای نوشتار، هر کجا از واژه‌ی «عملگر درون» استفاده شده، منظور تعریف 43 می‌باشد و هر کجا تمایز تعریف 5 با تعریف 43 مورد نظر باشد، به طور صریح قید خواهد شد.

1-45 **گزاره**: فرض می‌کنیم X یک مجموعه و $I : 2^X \to 2^X$ یک عملگر درون روی X باشد. در این صورت برای هر A و $B \in 2^X$ که $A \subseteq B$، داریم $I(A) \subseteq I(B)$.

اثبات: با توجه به خاصیت C_2 از تعریف 43، $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$. از $A \subseteq B$ داریم $A \cap B = A$. پس $I(A) = I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$. از این رو $I(A) \subseteq I(B)$. +

[1] new interior operator

فصل دوم

دستگاه‌ها و فضاهای همسایگی ضعیف

2–1 **تعریف:** فرض می‌کنیم X یک مجموعه باشد و $\gamma : X \to \exp(\exp(X))$. در این صورت γ را یک دستگاه همسایگی ضعیف[1] روی X می‌نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

1– به ازای هر $V \in \gamma(x)$، داشته باشیم $x \in V$.

2– به ازای هر $V \in \gamma(x)$ و U، داشته باشیم $U \cap V \in \gamma(x)$.

3– به ازای هر $x \in X$، $\gamma(x) \neq \varnothing$.

هر $V \in \gamma(x)$ را یک همسایگی ضعیف[2] برای x و زوج (X, γ) را یک فضای همسایگی ضعیف[3] روی X می‌نامیم و آن را با WNS نمایش می‌دهیم.

2–2 **تعریف:** گیریم (X, γ) یک فضای همسایگی ضعیف روی X باشد. برای هر $A \subseteq X$، بستار و درون A را که به وسیله‌ی γ تولید می‌شود به ترتیب با $g_\gamma(A)$ و $l_\gamma(A)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_\gamma(A) = \{x \in X \mid \forall V \in \gamma(x) : V \cap A \neq \varnothing\},$$
$$l_\gamma(A) = \{x \in A \mid \exists V \in \gamma(x) \ni V \subseteq A\}.$$

---

[1] weak neighborhood system

[2] weak neighborhood

[3] weak neighborhood space

2–3 قضیه: فرض می‌کنیم (X,ψ) یک فضای همسایگی ضعیف روی X باشد. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

1– به ازای هر $A\subseteq X$، $\lambda_\psi(A)\subseteq A$.

2– به ازای هر $B\subseteq X$ و A، $\lambda_\psi(A\cap B)=\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)$.

3– $\lambda_\psi(X)=X$.

اثبات: 1– با توجه به تعریف λ_ψ واضح است.

۲– فرض می‌کنیم $A،B\subseteq X$ داده شده‌اند. ابتدا ثابت می‌کنیم $\lambda_\psi(A\cap B)\subseteq\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)$. اگر $x\in\lambda_\psi(A\cap B)$ دلخواه باشد، $V\in\psi(x)$ وجود دارد به طوری که $V\subseteq A\cap B$. چون $V\in\psi(x)$ و $V\subseteq A$، طبق تعریف λ_ψ، $x\in\lambda_\psi(A)$ و به همین ترتیب $x\in\lambda_\psi(B)$. بنابراین $x\in\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)$. در نتیجه $\lambda_\psi(A\cap B)\subseteq\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)$. به‌عکس ثابت می‌کنیم $\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)\subseteq\lambda_\psi(A\cap B)$. فرض می‌کنیم $x\in\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)$ دلخواه باشد. بنا به تعریف λ_ψ، $V\in\psi(x)$ و U وجود دارند به طوری که $V\subseteq B$ و $U\subseteq A$. چون $V\in\psi(x)$ و U، بنا به خاصیت 2 از تعریف 1 داریم $V\cap U\in\psi(x)$. اما $U\cap V\subseteq A\cap B$؛ بنابراین $x\in\lambda_\psi(A\cap B)$. در نتیجه $\lambda_\psi(A)\cap\lambda_\psi(B)\subseteq\lambda_\psi(A\cap B)$.

۳– از قسمت 1 همین قضیه داریم $\lambda_\psi(X)\subseteq X$. برای اثبات عکس این شمول، فرض می‌کنیم $x\in X$ دلخواه باشد. بنا به خاصیت 3 از تعریف 1، $\psi(x)\neq\varnothing$. پس $V\neq\varnothing$ وجود دارد به طوری که $V\in\psi(x)$. اما هر همسایگی ضعیف x، زیرمجموعه‌ی X می‌باشد، از این رو $x\in V\subseteq X$. اکنون بنا به تعریف λ_ψ داریم $x\in\lambda_\psi(X)$. درنتیجه $X\subseteq\lambda_\psi(X)$. +

۲–۴ مثال: فرض می‌کنیم $X=\{a,b,c,d\}$ و $\psi:X\to\exp(\exp(X))$ یک دستگاه همسایگی ضعیف روی X باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(a)=\{\{a,c\}\}$$
$$\psi(b)=\{\{b,c\}\}$$
$$\psi(c)=\psi(d)=X.$$