بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی گرایش آنالیز

موضوع:کاربرد تکنیک های دوگانی برای ستاره گونی تبدیلات انتگرالی وزن دار

استاد راهنما: دکتر سعید شمس

نگارش : زهرا اسمی پور

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به پدرم

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

تقدیم به برادر و خواهرانم

که وجودشان گرما بخش زندگی من است

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است، و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم: بسی شایسته است از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر شمس که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و از اساتید بزرگوار آقای دکتر آقالاری و آقای دکتر استادباشی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، و از خانواده ام که حمایت گر من در این مسیر بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گویم...

چکیده

فرض کنید A کلاسی از توابع تحلیلی نرمالیزه در دیسک واحد U باشد .و فرض کنید $p_{\gamma}(\alpha,\beta)$ کلاسی از همه توابع $f \in A$ باشد که در شرط زیر صدق می کند .

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, Re\left\{e^{i\eta}\left[(1-\gamma)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}+\gamma\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}-\beta\right]\right\}>0$$

در این پایان نامه تبدیل انتگرالی $V_{\lambda,\alpha}(z)=\left\{\int_0^1 \lambda(t)\left(\frac{f(tz)}{t}\right)^{\alpha}dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$ را بررسی می کنیم بطوریکه λ یک تابع وزنی حقیقی مقدار نامنفی و نرمالیزه شده توسط $\int_0^1 \lambda(t)dt=1$ است .
هدف اصلی ما یافتن شرایطی روی پارامتر های α,β,γ,μ است بطوریکه به ازای هر $f \in p_{\gamma}(\alpha,\beta)$ تابع $V_{\lambda,\alpha}(f)$ ستاره گون از مرتبه μ باشد .
همچنین فرم های مختلفی از $\lambda(t)$ را در رابطه با تبدیلات انتگرالی وزن دار بعنوان کاربردهایی از موضوع مورد مطالعه و بررسی قرار می دهیم .

واژگان کلیدی

پیچش ، توابع تک ارز ، تابع فوق هندسی ، تکنیک دوگانی ، توابع ستاره گون

فهرست مطالب

پیشگفتار

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- A .Ebadian ,R.Aghalary and S. Shams . *Application of duality techniques to starlikeness of weighted integral transforms ,Bull .Belg.Math. Soc.Simon Stevin17(2010) , 275-285*

و مشتمل بر سه فصل می باشد . در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در فصول بعدی آورده شده است . در این فصل به موضوع توابع تک ارز و ستاره گون ، توابع فوق هندسی و ضرب پیچشی و نیز کلاس توابع $p_\gamma(\alpha,\beta)$ و از همه مهم تر به قضیه اصل دوگان خواهیم پرداخت . در فصل دوم قضایای اصلی آورده شده و در نهایت در فصل آخر به کاربرد هایی از موضوع می پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. اگر $r > 0$ و a یک عدد مختلط باشد . مجموعه $D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$ یک قرص مستدیر به مرکز a و شعاع r است و داریم

$$\overline{D}(a,r) = \{z : |z-a| \leq r\}$$

و $D'(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ قرص سفته به مرکز a و شعاع r نامیده می شود .

تعریف ۲.۱.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد گوئیم مجموعه E در فضای توپولوژیک X همبند نیست هر گاه اجتماع دو مجموعه ناتهی مانند A و B باشد که

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$$

یک مجموعه را در فضای توپولوژیک X همبند گوئیم هر گاه نا همبند نباشد .

به عبارت دیگر مجموعه E را ناهمبند گوئیم هر گاه دو مجموعه باز غیر تهی مانند A و B موجود باشد که

$$E \cap B \neq \varnothing, \quad E \cap A \neq \varnothing, \quad E \cap A \cap B = \varnothing, E \subset A \cup B$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد که در آن Ω یک مجموعه باز می باشد در این صورت گوئیم f در نقطه $a \in \Omega$ مشتق پذیر است هر گاه

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

موجود باشد و آن را با $f'(a)$ نشان می دهیم .

تعریف ۴.۱.۱. اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه پیوسته است .

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه باز و f نگاشتی از Ω بتوی $\mathbb{C}$ باشد f را در Ω تحلیلی گوئیم هر گاه f در هر نقطه از Ω مشتق پذیر باشد و همچنین گوئیم f در نقطه $a \in \Omega$ تحلیلی است هر گاه f در یک همسایگی از a مشتق پذیر باشد .

تعریف ۶.۱.۱. دیسک واحد باز صفحه مختلط را با U نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$U = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

تعریف ۷.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند ناتهی در میدان $\mathbb{C}$ را یک ناحیه گوئیم .

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه تمام توابع تحلیلی [۱] در دیسک واحد U را با $H(U)$ نشان می دهیم .

تعریف ۹.۱.۱. تابع تعریف شده مانند f در Ω بوسیله سری توانی قابل نمایش است هر گاه برای هر قرص $D(a,r) \subset \Omega$یک سری مانند $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر شود که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد .

نکته ۱۰.۱.۱ . هر گاه f بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد آنگاه $f \in H(\Omega)$ و f' نیز با سری توانی قابل نمایش است (منظوراز$H(\Omega)$ مجموعه توابع تحلیلی درΩ) در واقع به ازای هر $z \in D(a,r)$ ،اگر$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n(z-a)^n$ آن گاه داریم

$$f'(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-۱}$$

تعریف ۱۱.۱.۱. تابع $f \in H(U)$ را یک تابع شوارتز [۲] گوئیم هر گاه :

۱) $z \in U \quad |f(z)| \leq ۱$ ،

۲) $f(۰) = ۰$ ،

Analytic[۱]
Schwarz Function[۲]

لم ۱.۱.۱۲. *(شوارتز) فرض می کنیم f یک تابع شوارتز باشد در این صورت برای هر $z \in U$ داریم $|f(z)| \leq |z|$ و $|f'(\circ)| \leq ۱$ و همچنین، اگر $|f'(\circ)| = ۱$ یا برای $z \neq \circ$ ی در D داشته باشیم $|f(z)| = |z|$ آنگاه عدد ثابت c ای موجود است بطوریکه $|c| = ۱$ و برای هر $z \in U$ ، $f(z) = cz$*

برهان : به مرجع [۱۳] ، قضیه ۲.۱۲ مراجعه کنید.

۲.۱ توابع تک ارز ، محدب و ستاره گون

تعریف ۱.۲.۱. تابع مختلط f بر U را تک ارز [1] گوئیم هر گاه به ازای هر دو نقطه متمایز z_1 و z_2 از U داشته باشیم

$$f(z_1) \neq f(z_2)$$

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک ارز f که در دیسک واحد U تعریف شده و در شرایط $f'(\circ) = ۱$ و $f(\circ) = \circ$ صدق می کند را با S نمایش می دهیم . می توان دید که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر می باشد .

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad |z| < 1$$

درنتیجه کلاس S تحت جمع یا ضرب بسته نیست لذا فضای برداری نمی باشد .

تعریف ۳.۲.۱. تابع $f(z)$ رادر نقطه $z_\circ \in U$ موضعا تک ارز[2] گوئیم هر گاه f در یک همسایگی از $z_\circ$ تک ارز باشد.

مثال ۴.۲.۱. تابع کوبه $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \cdots$ را در نظر می گیریم واضح است که این تابع در U تحلیلی و تک ارز است همچنین می توان دید که با نوشتن تابع K بصورت $K(z) = \frac{1}{4}(\frac{1+z}{1-z})^2 - \frac{1}{4}$ این نگاشت U را به کل صفحه $\mathbb{C}$ بجز قسمت منفی اعداد حقیقی از $\frac{-1}{4}$ تا $-\infty$ تصویرمی کند این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد که به تابع کوبه [3] معروف است .

تعریف ۵.۲.۱. مجموعه همه توابع تحلیلی در دیسک واحد U با شرایط نرمالیزه معمولی $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$ را با A نمایش می دهیم که در این صورت داریم .

$$A = \{f \in H(U) : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\}$$

[1] Univalent
[2] Locally Univalent
[3] Kobe function

همچنین کلاس $A_\circ$ را بصورت زیر تعریف می کنیم
$$A_\circ = \{\frac{f(z)}{z}, f \in A\}$$

به ازای هر $n \geq 1$ زیر کلاس A_nاز A بفرم
$$A_n = \{f \in A : f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1}\}$$

تعریف می شود.

تعریف ۶.۲.۱. دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ را نسبت به $z_\circ$ ستاره گون [1]گوییم هر گاه پاره خط مستقیمی که نقاط D را به $z_\circ$ وصل می کند بطور کامل در داخل D قرارگیرد .

تعریف ۷.۲.۱. تابع $f \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره گون (یا بطور خلاصه ستاره گون) گوییم اگر چنانچه قرص واحد باز، با f بر دامنه ای نگاشته شود که نسبت به$z_\circ = \circ$ ستاره گون است .مجموعه تمام توابع ستاره گون نسبت به مبدأ در A را با S^* نشان می دهیم .

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم $f \in S$ آنگاه $f \in S^*$ اگر وفقط اگر*
$$Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)} > \circ\}, \qquad (z \in U)$$

برهان: *به مرجع[۶] ، قضیه ۲.۱ مراجعه کنید .*

نکته ۹.۲.۱. طبق قضیه (۸.۲.۱) S^* ر ا می توان بصورت زیر نوشت .
$$S^* = \{f \in S : Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)} > \circ\}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید α یک عدد حقیقی باشد که $\circ \leq \alpha < 1$ تابع $f \in S$ را ستاره گون از مرتبه α گوئیم هر گاه
$$Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \alpha, \qquad (z \in U)$$

مجموعه این توابع را با$S^*(\alpha)$ نشان می دهیم بنابراین
$$S^*(\alpha) = \{f \in S : Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > \alpha\}$$

قرار می دهیم
$$S^*(\circ) = S^*$$

[1] starlike

نکته ۱۱.۲.۱. براحتی می توان دید که :

$$S^*(\alpha) \subseteq S^*(\circ) = S^* \qquad \circ \leq \alpha < ۱$$

مثال ۱۲.۲.۱. تابع $f(z) = \frac{z}{(۱-z)^{۲-۲\alpha}}$ ستاره گون از مرتبه $\circ \leq \alpha < ۱$ می باشد چون طبق تعریف داریم . $Re\frac{zf'(z)}{f(z)} = Re\frac{۱+(۱-۲\alpha)z}{۱-z}$ حال با فرض $w = \frac{۱+(۱-۲\alpha)}{۱-z}$ خواهیم داشت $z = \frac{w-۱}{w+(۱-۲\alpha)}$ ازطرفین رابطه قدر مطلق می گیریم .چون $|z| < ۱$ لذا

$$|z| = \frac{|w-۱|}{|w+(۱-۲\alpha)|} < ۱$$

$$|w-۱| < |w+(۱-۲\alpha)|$$

حال با فرض $w = u + iv$ خواهیم داشت .

$$|u+iv-۱| < |u+iv+(۱-۲\alpha)|$$

$$|(u-۱)+iv|^۲ < |u+(۱-۲\alpha)+iv|^۲$$

$$۴u + ۴\alpha^۲ - ۴\alpha u - ۴\alpha > \circ$$

در نتیجه $u(۱-\alpha) > \alpha(۱-\alpha)$ و چون $\circ \leq \alpha < ۱$ پس $Rew = u > \alpha$

تعریف ۱۳.۲.۱. دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ را محدب [1] گوئیم هر گاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می کند بطور کامل داخل D قرار گیرد .

تعریف ۱۴.۲.۱. تابع $f \in S$ را محدب گوئیم اگر چنانچه U تحت f بر یک دامنه ی محدب نگاشته شود .این زیر رده از S را با K نشان می دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز در Uباشد که $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$ در این صورت $f \in K$ اگر وفقط اگر

$$Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > \circ, \qquad (z \in U)$$

برهان : به مرجع [۲] ، مراجعه کنید .

تعریف ۱۶.۲.۱. گوئیم تابع $f \in S$ محدب از مرتبه α $(\circ \leq \alpha < ۱)$ است هر گاه

$$Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > \alpha, \qquad (z \in U)$$

---

[1] Convex

مجموعه این توابع را با $K(\alpha)$ نشان می دهیم لذا

$$K(\alpha) = \{f \in S : Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} > \alpha\}$$

قضیه ۱.۲.۱۷. (*قضیه الکساندر)* [۱] *فرض کنیم* f *یک تابع تحلیلی در* U *باشد که* $f(\circ) = \circ$ *و* $f'(\circ) = ۱$ *آنگاه* $f \in K$ *اگر وفقط اگر*

$$zf'(z) \in S^*$$

برهان : به مرجع [۴]، *قضیه ۲.۱۴ مراجعه کنید .*

قضیه ۱.۲.۱۸. (*نوشیرو - وارچوسکی*) [۲] *اگر* f *یک تابع تحلیلی در دامنه محدب* D *بوده و* $Re\{f'(z)\} > \circ$ *آنگاه* f *در* D *تک ارز است .*

برهان : به مرجع [۴]، *قضیه ۲.۱۶ مراجعه کنید .*

تعریف ۱.۲.۱۹. کوچکترین مجموعه محدب شامل E را در صفحه مختلط غلاف محدب [۳] (پوسته محدب) مجموعه E می گویند و با $CO(E)$ نشان می دهند و بستار آن را با $\overline{CO}(E)$ نشان می دهند .

تعریف ۱.۲.۲۰. تابع دو متغیره حقیقی مقدار $u(x,y)$ همساز نامیده می شود هر گاه u دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در Ω بوده و در معادله زیر صدق کند .

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \circ$$

این معادله را معادله لاپلاس می گوئیم .

قضیه ۱.۲.۲۱. (*مقدار میانگین*) [۴] *اگر* $u : \Omega \longrightarrow R$ *یک تابع همساز باشد و* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ *آنگاه*

$$u(a) = \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$$

برهان : به مرجع[۱۳] ، *قضیه ۱۳.۱۱ مراجعه کنید .*

تعریف ۱.۲.۲۲. گوئیم تابع پیوسته $u : \Omega \longrightarrow R$ خاصیت مقدار میانگین دارد هر گاه

$$u(a) = \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$$

تعریف ۱.۲.۲۳. (اصل ماکزیمم) فرض می کنیم Ω یک ناحیه و u یک تابع پیوسته حقیقی مقدار روی Ω با خاصیت مقدار میانگین باشد اگر نقطه ای چون $a \in \Omega$ موجود باشد بطوریکه برای هر

[۱] Alexander Theorem
[۲] Noshiro-warschawski
[۳] convex hull
[۴] Mean value

$z \in \Omega$ $u(z) \leq u(a)$ آنگاه u یک تابع ثابت است .

برهان : به مرجع[۲] ، قضیه ۱.۸ مراجعه کنید .

قضیه ۲۴.۲.۱. *(قضیه اصل منیمم برای توابع همساز) فرض کنیم Ω یک ناحیه و u یک تابع پیوسته ی حقیقی مقدار روی Ω با خاصیت مقدار میانگین باشد . اگر نقطه ای چون $a \in \Omega$ موجود باشد بطوریکه برای هر $z \in \Omega$ $u(a) \leq u(z)$آنگاه u ثابت است .*

برهان : به مرجع [۲] ، قضیه ۱.۱۰ مراجعه کنید .

۳.۱ ضرب پیچشی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n} z^n$ و $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2,n} z^n$ دو تابع تحلیلی وتک ارز باشند آنگاه ضرب پیچشی [1] یا هادامارد [2] f_1 و f_2 را با $f_1 * f_2$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n} a_{2,n} z^n = (f_2 * f_1)(z) \qquad (z \in U)$$

حال نشان می دهیم $(f_1 * f_2) \in H(U)$ برای این منظور کافی است ثابت کنیم که سری $\sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n} a_{2,n} z^n$ روی U همگرا ست . فرض کنیم z_0 نقطه ای دلخواه روی U و $0 < r < 1$ عددی باشد که $|z_0| < r$ در این صورت چون

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_{1,n} a_{2,n}| |z_0|^n \leq (\sum_{n=2}^{\infty} |a_{1,n}| r^n)(\sum_{n=2}^{\infty} |a_{2,n}| r^n)$$

پس سری $\sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n} a_{2,n} z^n$ بطور مطلق همگراست لذا همگرا نیز خواهد بود پس تحلیلی است . از اینرو $z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n} a_{2,n} z^n$ تحلیلی است و در نتیجه $(f_1 * f_2)(z)$ تحلیلی است و متعلق به $H(U)$ می شود .

خواص ضرب پیچشی

(۱) سری هندسی $L(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ نقش عنصر همانی را تحت ضرب پیچشی برای هر تابع تحلیلی و تک ارزf در U ایفا می کند یعنی $f * l = f$

(۲) فرض کنیم $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n} z^n$ و $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2,n} z^n$ توابع تحلیلی و تک ارز

[1] Convolution
[2] Hadamard product

در U بوده و α یک ثابت اختیاری باشد در این صورت داریم

$$f_۱ * [zf'_۲(z)] = z(f_۱ * f_۲)'(z)$$

و

$$(f_۱ * \alpha f_۲)(z) = \alpha(f_۱ * f_۲)(z)$$

(۳) فرض کنیم $f_۱(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_{۱,n}z^n$ و $f_۲(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_{۲,n}z^n$ و $f_۳(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_{۳,n}z^n$ سه تابع تحلیلی و تک ارز باشند در این صورت

$$(f_۱ * f_۲) * f_۳ = f_۱ * (f_۲ * f_۳)$$

۴.۱ دوگان ضرب پیچشی

در این بخش ابتدا دوگان ضرب پیچشی را معرفی و سپس به قضیه اصل دوگان اشاره خواهیم کرد که نقش مهمی در اثبات قضایای بعدی ایفا می کند . مطالب این بخش بر اساس مرجع [۱۲] نوشته شده است.

تعریف ۱.۴.۱. می دانیم $\mathbb{A} \subseteq H(U)$ و $\mathbb{A}_\circ = \{f \in \mathbb{A}, f(\circ) = ۱\}$ برای $V \subset \mathbb{A}_\circ$ دوگان را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V^* = \{g \in \mathbb{A}_\circ : \forall \quad f \in V \quad (f * g) \neq \circ \quad z \in U\}$$

و همچنین $V^{**} = (V^*)^*$ را دوگان دوم می نامیم .

تعریف ۲.۴.۱. مجموعه $V \subset \mathbb{A}_\circ$ را کامل گوئیم در صورتی که با فرض $f \in V$ و $|x| \leq ۱$ داشته باشیم :

$$f_x \in V$$

بطوریکه نگاشت f_x را با ضابطه $f_x(z) = f(xz)$ تعریف می کنیم .

قضیه ۳.۴.۱. *فرض کنیم Λ مجموعه تابعک های خطی پیوسته بر $\mathbb{A}$ باشد که $\mathbb{A} \subseteq H(U)$ در این صورت $\lambda \in \Lambda$ اگر و فقط اگر یک تابع تحلیلی g در $|z| \leq ۱$ موجود باشد بطوریکه برای هر $f \in \mathbb{A}$*

$$\lambda(f) = (g * f)$$

برهان : به مرجع [۱۲]، قضیه A مراجعه کنید .

قضیه ۴.۴.۱. (قضیه اصل دوگان) *فرض کنیم $V \subset \mathbb{A}_\circ$ فشرده و کامل باشد و Λ فضای تمام تابعک های خطی پیوسته بر $\mathbb{A}$ باشد آنگاه :*

(۱) $\lambda \in \Lambda$ و $\lambda(V) = \lambda(V^{**})$

(۲) $\overline{Co}(V) = \overline{Co}(V^{**})$ ($\overline{Co}$غلاف محدب بسته است)

برهان : به مرجع [۱۲] ، قضیه ۱.۱ مراجعه کنید .

قضیه ۵.۴.۱. *فرض کنیم $V \subset \mathbb{A}_\circ$ با ضابطه زیر داده شده باشد :*

$$V = \{\mu + (۱-\mu)\frac{(۱+xz)}{(۱+yz)} : |x| = |y| = ۱ \quad \mu \neq ۱ \quad \mu \in \mathbb{R}\}$$

بطوریکه فشرده و کامل باشد . در این صورت داریم :

(۱)

$$V^{**} = \{g \in \mathbb{A}_\circ : \exists \eta \in \mathbb{R} : Re\{e^{i\eta}(g(z)-\mu)\} > \circ, z \in U\}$$

(۲) *در صورتیکه $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ تابعک های خطی پیوسته بر V باشد با شرط $\Gamma_۲(V) \neq \circ$ آنگاه به ازای هر $g \in V^{**}$ می توان $\nu \in V$ یی را چنان یافت بطوریکه*

$$\frac{\Gamma_۱(g)}{\Gamma_۲(g)} = \frac{\Gamma_۱(\nu)}{\Gamma_۲(\nu)}$$

برهان : به مرجع [۱۲] ، مراجعه کنید .

نتیجه ۶.۴.۱. *فرض کنیم $V = \{\frac{۱+xz}{۱+yz}, |x| = |y| = ۱, z \in U\}$ و $H = \{f \in \mathbb{A}_\circ, Re(e^{i\eta}f(z)) > \circ, \eta \in \mathbb{R}, z \in U\}$ در این صورت داریم : $V^{**} = H$*

تبصره ۷.۴.۱. در برهان قضیه فوق طبق مرجع [۱۲] داریم

$$(f * g) \neq \circ \longleftrightarrow Ref(z) > \tfrac{۱}{۲}, g \in V \quad \text{یا} \quad Ref(z) > \tfrac{۱}{۲} \longleftrightarrow f \in V^*$$

۵.۱ توابع فوق هندسی

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم a و b و c اعداد مختلط و $c \neq \circ, -۱, -۲, \cdots$ باشد تابع

$$_۲F_۱(a,b,c;z) = F(a,b,c;z) = ۱ + \frac{ab}{۱!c}z + \frac{a(a+۱)b(b+۱)}{۲!c(c+۱)}z^۲ + \cdots \qquad (۱.۱)$$

تابع فوق هندسی گاوس [۱] نام دارد . سری رابطه (۱.۱)به ازای هر $z \in U$ بطور مطلق همگراست . لذا تابع فوق هندسی گاوس در U تحلیلی است .

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنیم $0 < x < \infty$ در این صورت $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ که یک انتگرال همگراست را تابع گاما می نامیم .

قضیه ۳.۵.۱. (۱) *معادله تابعی* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *برقرار است اگر* $0 < x < \infty$

(۲) *به ازای* $n = 1, 2, \cdots$ $\Gamma(n+1) = n!$

برهان : *به مرجع [۱۱]،قضیه ۸.۱۸ مراجعه کنید .*

قضیه ۴.۵.۱. *هر گاه* $n > 0$ *و* $m > 0$ *آنگاه*

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m,n)$$

$B(m,n)$ *را تابع بتا می نامیم .*

برهان : *به مرجع [۱۱] ، قضیه۸.۲۰ مراجعه کنید .*

قضیه ۵.۵.۱. *نماد پوچهامر [۲] یا تغییر فاکتوریل را بصورت زیر تعریف می کنیم .*

$$(a,n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) & (n \in N) \end{cases}$$

نکته ۶.۵.۱. با توجه به نماد پوچهامر رابطه ی (۱.۱) را بصورت زیر می نویسیم .

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)} z^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)} z^n \tag{۲.۱}$$

به راحتی می توان دید که سری رابطه (۲.۱) به ازای z هایی که $|z| < 1$ بطور مطلق همگراست و به ازای $|z| > 1$ واگراست همچنین به ازای z هایی که $|z| = 1$ بطور مطلق همگراست هر گاه $c > a+b$ و برای $z = 1$ سری همگراست هر گاه $c > a+b-1$ پس تابع فوق هندسی در U تحلیلی است . حال اگر از طرفین رابطه (۲.۱) مشتق بگیریم داریم :

$$F'(a,b,c;z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n+1)(b,n+1)}{(c,n+1)n!} z^n$$

---

[۱] Gaussian hypergeometric function

[۲] Pochhammer symbol

اما چون $(a, n+1) = a(a+1, n)$ لذا داریم :

$$F'(a,b,c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1, b+1, c+1; z)$$

نکته ۷.۵.۱. با فرض $f \in A$ تعریف می کنیم

$$H(z) = H_{a,b,c}(f)(z) = z{}_2F_1(a,b,c;z) * f(z)$$

قضیه ۸.۵.۱. *(قضیه گاوس) فرض کنیم a و b و c اعداد مختلط باشد که $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ در این صورت*

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

برهان : به مرجع [۶] ، قضیه ۲.۱ مراجعه کنید .

نکته ۹.۵.۱. با جایگذاری فرمول بتا در رابطه (۲.۱) داریم

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt \tag{۳.۱}$$

که عبارت رابطه (۳.۱) به عبارت انتگرال اویلر معروف است . بعلاوه اگر $Rea > 0$ و $Reb > 0$ و $Re(c+1) > Re(a+b)$ آنگاه عبارت انتگرالی زیر را داریم :

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b+1)}\int_0^1 \lambda_1(t)\frac{1}{1-tz}dt \tag{۴.۱}$$

بطوریکه

$$\lambda_1 = t^{b-1}(1-t)^{c-a-b}F(c-a, 1-a, c-a-b+1; 1-t)$$

برهان : به مرجع [۶] ،مراجعه کنید .

لم ۱۰.۵.۱. *برای پارامترهای مختلط a و b و c داریم :*

$$F(a,b,c;z) = F(b,a,c;z) \quad (1)$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}F(a, c-b, c; \tfrac{z}{z-1}) \quad (2)$$

$$(a+1)F(1, a, a+1; z) = (a+1) + azF(1, a+1, a+2; z) \quad (3)$$

$$F(a,b,b;z) = (۱-z)^{-a} \quad (۴)$$

$$F(a,b,c;z) = (۱-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z)' \quad (۵)$$

$$cF'(a,b,c;z) = abF(a+۱,b+۱,c+۱;z) \quad (۶)$$

۶.۱ تبدیلات انتگرال وزن دار و کلاس $p_{\gamma(\alpha,\beta)}$

تعریف ۱.۶.۱. برای هر $f \in A$ و $\alpha \geq ۰$ تبدیل انتگرال وزنی $V_{\lambda,\alpha}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$V_{\lambda,\alpha}(f)(z) = \left(\int_۰^۱ \lambda(t)\left(\frac{f(tz)}{t}\right)^\alpha dt\right)^{\frac{۱}{\alpha}} \quad (۵.۱)$$

بطوریکه تابع $\lambda : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی نامنفی انتگرال پذیر که در شرایط نرمالیزه $\int_۰^۱ \lambda(t)dt = ۱$ صدق می کند در نظر گرفته می شود .

می دانیم که در برخی موارد عملگر $V_{\lambda,\alpha}$ عملگر های مشهوری چون لیبرا ، برناردی وکوماتو را نتیجه می دهد .

مؤلفین در [۱، ۳، ۵، ۹، ۱۰] عملگر $V_{\lambda,\alpha}$ را برای انتخاب های مختلفی از $\lambda(t)$ مورد بررسی قرار داده اند و به نتایج جالبی دست یافته اند .که در این جا به معرفی برخی از عملگر های انتگرالی که از انتخاب خاص $\lambda(t)$ بدست آمده اند می پردازیم

نکته ۲.۶.۱. قرار می دهیم

$$F(z) = V_{\lambda,\alpha}(f)(z)$$

تعریف ۳.۶.۱. هر گاه در رابطه (۵.۱) قرار دهیم $\lambda(t) = ۱$ خواهیم داشت

$$V_{\lambda,\alpha}(f)(z) = \left(\int_۰^۱ \left(\frac{f(tz)}{t}\right)^\alpha dt\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

این عملگر به عملگر الکساندر معروف است .

تعریف ۴.۶.۱. هر گاه در رابطه (۵.۱) قرار دهیم $\lambda(t) = (۱+a)t^a$ و $a > -۱$ عملگر برناردی [۱]

[۱] Bernardi Operator

تعریف خواهد شد که آن را بصورت زیر نمایش می دهیم .

$$V_{\lambda,\alpha}(f)(z)=\{(1+a)\int_0^1(\frac{f(tz)}{t})^\alpha t^a dt\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

تعریف ۱.۶.۵. هر گاه در رابطه (۱.۵) قرار دهیم .

$$\lambda(t)=\frac{(1+a)}{\Gamma(p)}t^a(log\frac{1}{t})^{p-1}, \qquad p>0, \qquad a>-1$$

در این صورت عملگر کوماتو بدست می اید و بصورت زیر نشان داده می شود .

$$V_{\lambda,\alpha}(f)(z)=\{\frac{(1+a)}{\Gamma(p)}\int_0^1(\frac{f(tz)}{t})^\alpha t^a(log\frac{1}{t}))^{p-1}dt\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

با قرار دادن $p=1$ در عملگر کوماتو [1] در واقع همان عملگر برناردی بدست می آید .

کلاس $p_\gamma(\alpha,\beta)$

تعریف ۱.۶.۶. فرض کنیم $\beta<1$ و $\alpha\geq 0$ و $0\leq\gamma\leq 1$ و در این صورت برای هر $z\in U$ و $f\in A$ ، کلاس $p_\gamma(\alpha,\beta)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$p_\gamma(\alpha,\beta)=\{f\in A\,,\exists\eta\in\mathbb{R},\ Re\{e^{i\eta}[(1-\gamma)(\frac{f(z)}{z})^\alpha+\gamma z(\frac{f'(z)}{f(z)})(\frac{f(z)}{z})^\alpha-\beta]\}>0,\ (z\in U) \tag{۱.۶}$$

که در آن شاخه اصلی تابع توانی مورد نظر است .

اگر در رابطه (۱.۶) قرار دهیم $\eta=0$ آنگاه برای کلاس $p_\gamma(\alpha,\beta)$ یک معیار ظریف تری بصورت زیر خواهیم داشت

$$Re\{(1-\gamma)(\frac{f(z)}{z})^\alpha+\gamma z(\frac{f'(z)}{f(z)})(\frac{f(z)}{z})^\alpha-\beta\}>0, \qquad (z\in U)$$

از طرفی با قرار دادن $\alpha=1$ داریم

$$p_\gamma(\alpha,\beta)=\{f\in A,\exists\eta\in\mathbb{R}, \qquad Re\{e^{i\eta}(1-\gamma)\frac{f(z)}{z}+\gamma f'(z)-\beta\}>0$$

از طرف دیگر، اگر $f\in p_\gamma(1,\beta)$ مؤلفین در [۱، ۵، ۶، ۸] ستاره گونی عملگر انتگرالی $V_{\lambda,1}(f)$ را با

[1] Komatu Operator