وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر

دانشکده علوم پایه — گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

کاربردهایی موثر از روش آشفتگی هموتوپی در معادلات دیفرانسیل کسری

به وسیله ی:

نورالدین دالوند

استاد راهنما:

دکتر خسرو سایوند

استاد مشاور:

دکتر فرشید میرزائی

آبان ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر عزیزم و مادر مهربانم

و به دستهای پر از مهر آنان که درخت جوانی ام را شکوفا نمودند

واینک به پاس آن همه ایثار ثمره تلاشم را به قلبهای مهربانشان تقدیم می کنم.

تقدیر و تشکر

سپاس و شکر روز افزون به درگاه خداوند متعال که توفیق علم آموزی و کسب دانش را به ما عنایت فرمود.
در ابتدا از زحمات و راهنمایی دلسوزانه و بی دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای **دکتر خسرو سایوند** که بی شک بدون هدایت و ارائه راهکارها و پیشنهاد های ایشان موفقیت در نگارش این پایان نامه حاصل نمی شد، کمال تشکر را دارم.
سپس از اساتید محترم آقایان دکتر فرشید میرزائی ، مشاور این پایان نامه، دکتر پری پور و دکتر اسماعیل بیگی که داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، سپاسگزاری می نمایم .
در انتها بر خود لازم می دانم از کلیه دوستان و عزیزانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری کردند، تشکر کنم.

نورالدین دالوند
آبان ماه ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: دالوند	نام: نورالدین
عنوان پایان نامه: کاربردهایی موثر از روش آشفتگی هموتوپی در معادلات دیفرانسیل کسری	
استاد راهنما: دکتر خسرو سایوند	
استاد مشاور: دکتر فرشید میرزائی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی کاربردی
گرایش: آنالیز عددی	دانشگاه ملایر— گروه ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: آبان ماه ۱۳۹۱	تعداد صفحات: ۹۸
کلید واژه: حسابان کسری ، معادلات دیفرانیسل کسری ؛ روشهای تحلیلی؛ وجود یکتایی و پایداری جواب معادلات دیفرانسیل کسری ..	

چکیده:

در این پایان نامه به ارایه تاریخچه ای از حسابان کسری می پردازیم ، سپس روابط موثر در حسابان کسری را مورد بررسی قرار می دهیم و با بکار گیری روش های تحلیلی مانند روش آشفتگی هموتوپی به بحث پیرامون وجود ، یکتایی و پایداری این معادلات می پردازیم .در ادامه روش آشفتگی هموتوپی را بر روی ردهای ازمعادلات دیفرانسیل کسری که از اهمیت بالایی در صنعت ؛ مهندسی وفیزیک بر خوردارند، مانند معادلات زاخاروف کزنتسوف و معادلات مرتبه چهارم موج انتشار به کار می بریم و جواب های دقیق و عددی را مورد بحث وبررسی قرار میدهیم

مقدمه

حسابان کسری[1] شاخه ای از ریاضیات است که تعاریفی از مشتق و انتگرال از هر مرتبه دلخواه ارایه می‌دهد، که نسبت به تعاریف مربوط به مشتق وانتگرال های متداول کامل‌تراست. گرچه مشتقات کسری تاریخچه طولانی در تاریخ ریاضیات دارند[۵]، اما برای مدت طولانی این گونه تئوریها در علوم فیزیکی قابل استفاده نبودند. یک دلیل می تواند این باشد که تعاریف هم ارزی از مشتقات کسری وجود ندارد و مشکل دیگر این است که تعبیر هندسی معلومی برای مشتقات کسری وجود نداشت[۵]. به هرحال در دهه اخیر توسعه بسیار سریعی در علوم غیر خطی اتفاق افتاده است و این علوم به صورت گسترده توسعه یافته‌اند و پژوهشگران زیادی با انتگرال ها و مشتق های از مرتبه ناصحیح مواجه شده‌اند.

به عنوان مثال می توان به کاربرده های گسترده حسابان کسری در فیزیک، شیمی، اقتصاد، سیستم‌های دینامیکی، مهندسی پزشکی، علوم زیستی و... اشاره کرد.به منظور توضیحات بیشتر و کسب اطلاعات جامع‌تر در این خصوص می‌توان به منابع [۳۴−۱]مراجعه نمود.

[1] Fractional calculus

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم بنیادی

در این فصل برخی از قضایای اساسی که در فصل های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارایه می‌گردند. همچنین اطلاعاتی نیز درباره خواص توابع گاما،[۱] بتا[۲] و میتاگ لفلر[۳] ارایه می‌گردد. شایان ذکراست این توابع نقش مهمی را در مشتق گیری وانتگرال گیری از مرتبه دلخواه ایفا می کنند.

۱–۱ تابع گاما

یکی از توابع پایه‌ای برای حسابان کسری تابع گاما اویلر $\Gamma(z)$ است.

۱–۱–۱تعریف تابع گاما

تابع گاما در حالت کلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \qquad ; z \in C, \tag{1.1}$$

این انتگرال برای همه اعداد مختلط همگرا است به شرطی که $Re(z) > 0$ برقرار باشد. به‌عبارت دیگر

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b u^{z-1} e^{-u} du, \tag{2.1}$$

۱ Gamma
۲ Beta
۳ Mittag leffler

موجود باشد.

۱–۱–۲برخی خواص از توابع گاما

یکی از خواص اساسی تابع گاما به صورت زیر ارایه می شود:

$$\Gamma(z+۱)=z\Gamma(z), \qquad (۳.۱)$$

که به آسانی با استفاده از انتگرال گیری جز به جز اثبات می شود:

$$\Gamma(z+۱)=\int_{\circ}^{\infty}e^{-u}u^{z}du=-e^{-u}u^{z}\mid_{\circ}^{\infty}+z\int_{\circ}^{\infty}e^{-u}u^{z-۱}du=z\Gamma(z),$$

بوضوح اگر $\Gamma(۱)=۱$ آنگاه با استفاده از رابطه (۳.۱) خواهیم داشت:

$$\Gamma(n+۱)=n.\Gamma(n)=n.(n-۱)!=n!,\ \ z=۱,۲,۳,....$$

حال برای $z>\circ$ تابع گاما را می توان به صورت زیردر نظر گرفت و با استفاده از رابطه (۳.۱) خواهیم داشت:

$$\Gamma(z+۲)=(z+۱)\Gamma(z+۱)=(z+۱)z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+۳)=(z+۲)\Gamma(z+۲)=(z+۱)(z+۲)z\Gamma(z),$$

با استدلال مشابه می توان نشان داد که اگر $z>\circ$ و n عدد صحیح نامنفی باشدآنگاه

$$z(z+۱)(z+۲)....(z+n)=\frac{\Gamma(z+n+۱)}{\Gamma(z)}, \qquad (۴.۱)$$

برای $z<\circ$ وناصحیح، تابع گاما را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+۱)}{z}, \qquad (۵.۱)$$

حال اگر $z+۱>\circ$ آنگاه سمت راست رابطه (۵.۱) را می توان محاسبه نمود، و لذا می توان مقدار $\Gamma(z)$، را برای $z<\circ$ بدست آورد.

مثال:

$$\Gamma(\frac{-۱}{۲})=\frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{\frac{-۱}{۲}},$$

می دانیم که $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ و لذا $\Gamma(\frac{-1}{2})=-2\sqrt{\pi}$.
اکنون وضعیت تابع گاما را درنزدیکی نقطه $z=0$ ونقاط صحیح ومنفی در نظر می گیریم. با توجه به روابط(۳.۱)و(۵.۱) خواهیم داشت:

$$\lim_{z\to 0^+}\Gamma(z)=+\infty, \tag{۶.۱}$$

$$\lim_{z\to 0^-}\Gamma(z)=-\infty, \tag{۷.۱}$$

$$\lim_{z\to(-1)^+}\Gamma(z)=-\infty, \tag{۸.۱}$$

$$\lim_{z\to(-1)^-}\Gamma(z)=+\infty. \tag{۹.۱}$$

تذکر:چون $\Gamma(z)$ به ازای هیچ مقدار z صفر نمی‌شود پس $\frac{1}{\Gamma(z)}$ را برای هرz می توان تعریف کرد.

می توان برخی از خصوصیات تابع گاما را به صورت معادلات تابعی به شکل زیر ارایه نمود:

$$\Gamma(2z)=(2\pi)^{\frac{-1}{2}}2^{2z-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}),\quad (z\in C), \tag{۱۰.۱}$$

به رابطه (۱۰.۱) فرمول دو برابری لژاندر گفته می شود[۴۶].
وهمچنین در حالت کلی قضیه مضارب گاوس– لژاندر در خصوص تابع گاما به صورت زیر تعریف می گردد[۴۶]:

$$\Gamma(mz)=\frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(m-1)}{2}}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m}),\quad (z\in C, m\in N-\{1\}), \tag{۱۱.۱}$$

۱–۲ تابع بتا

تابع بتا ارتباطمستقیم با حسابان کسری دارد. تابع بتا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$B(p,q)=\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{q-1}du=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(q,p),(p,q\neq -1,-2,...), \tag{۱۲.۱}$$

به عنوان مثال با استفاده از تابع بتا می توان مقدار$\Gamma(\frac{1}{2})$ را به دست آورد. برای این منظور داریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\quad (z\neq ۰,\pm۱,\pm۲,...),\qquad (۱۳.۱)$$

که با قرار دادن $z=\frac{۱}{۲}$ خواهیم داشت:

$$\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi},$$

وهمچنین:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{\pi}}{۲^{۲z-۱}}\Gamma(۲z),(۲z\neq ۰,-۱,-۲,...),\qquad (۱۴.۱)$$

که با قرار دادن $z=n+\frac{۱}{۲}$ به مقادیر خاصی از تابع گاما خواهیم رسید، به عنوان مثال:

$$\Gamma(n+\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(۲n+۱)}{۲^{۲n}n!}=\frac{\sqrt{\pi}(۲n)!}{۲^{۲n}n!}\,.\qquad (۱۵.۱)$$

۱–۳ تابع میتاگ – لفلر[۱]

در این بخش به معرفی یکی از توابع بنیادی که نقش مهمی را در حسابان کسری بازی می‌کند، می پردازیم . حال در ادامه به معرفی این تابع و خواص آن می پردازیم.

۱–۳–۱ تعریف تابع میتاگ – لفلر

تابع میتاگ – لفلر $E_\alpha(z)$[۵،۱۷،۴۶] به شکل زیر تعریف می شود:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+۱)},\quad z\in C.\qquad (۱۶.۱)$$

برخی از خواص اولیه این تابع به صورت زیر می باشد:

وقتی $\alpha=۱$ باشد،$E_۱(z)=e^z$ است وبه ازای $\alpha=۲$، $E_۲(z)=cosh(\sqrt{z})$است.

همچنین

$$(\frac{d}{dz})^nE_n(\lambda z^n)=\lambda E_n(\lambda z^n),\quad (n\in N,\lambda\in C),\qquad (۱۷.۱)$$

[۱] Mittag-Leffler function

و

$$(\frac{d}{dz})^n[z^{n-1}E_n(\frac{\lambda}{z^n})] = \frac{(-1)^n\lambda}{z^{n+1}}E_n(\frac{\lambda}{z^n}), (z \neq 0, n \in N, \lambda \in C), \quad (18.1)$$

هنگامی که $\alpha = \frac{1}{n}$ و$(n \in N - \{1\})$ تابع $E_{\frac{1}{n}}(z)$ به صورت زیر ارایه می شود:

$$E_{\frac{1}{n}}(z) = e^{z^n}\Big[1 + n\int_0^z e^{-t^n}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{k-1}}{\Gamma(\frac{k}{n})}\Big)dt\Big], \ (n \in N - \{1\}), \quad (19.1)$$

در حالت خاص برای $n = 2$ داریم:

$$E_{\frac{1}{2}}(z) = e^{z^2}\Big[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt\Big], \quad (20.1)$$

۱−۳−۲تابع دو پارامتری میتاگ − لفلر$E_{\alpha,\beta}(z)$ [5]

این تابع به عنوان تعمیمی از تابع میتاگ − لفلر یک پارامتری به شکل زیر تعریف می گردد:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (21.1)$$

برخی خواص تابع دو پارامتری میتاگ − لفلر به صورت زیر است:

لم ۱−۱. انتگرال تابع میتاگ − لفلر دو پارامتری:

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)t^{\beta-1}dt = Z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda Z^\alpha), \ \beta > 0. \quad (22.1)$$

لم ۱−۲. محاسبه مشتق مرتبه k ام تابع میتاگ − لفلر دو پارامتری

با استفاده از برخی خواص توابع جبری خواهیم داشت:

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\ \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{j(j-1)...(j-k)t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty}\frac{j(j-1)...(j-(k-1))t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)} = \sum_{j=k}^{\infty}\frac{j!t^{j-k}}{(j-k)!\Gamma(\alpha j+\beta)} \quad (23.1)$$

$$= k!\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}\frac{t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}.$$

لم ۱ـ۳. برخی خواص دیگر، مانند آنچه در ادامه بیان می گردد:

$$
\begin{aligned}
&E_{1,1}(z) = e^z,\\
&E_{1,2}(z) = \tfrac{e^z-1}{z},\\
&E_{2,1}(z) = cosh(\sqrt{z}),\\
&E_{2,1}(-z^2) = cos(z),\\
&E_{\alpha,1}(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z).
\end{aligned}
\tag{۲۴.۱}
$$

فصل ۲

مقدمه ای بر حسابان کسری

دربارهٔ تاریخچه به وجود آمدن حسابان کسری نظرات مختلفی وجود دارد. در اواخر ۳۰سپتامبر ۱۹۶۵، هوپیتال [۱] از لایب نیز [۲] در خصوص نماد خاصی که او در نشریه‌اش برای مشتق خطی $f(x) = x$ ونماد $\frac{D^n x}{Dx^n}$, استفاده نموده بود،سوالاتی را مطرح کرد. هوپیتال از لایب نیز پرسید وقتی که $n = \frac{۱}{۲}$ باشد نتیجه کار چه خواهد شد؟

لایب نیز جواب داد که یک قیاس ضد و نقیض معلوم می کند که یک روز به طور عمیق به نتایج مهمی می رسیم. هوپیتال و لایب نیز در ابتدا به صورت مقدماتی به مطالعه حسابان کسری پرداختند و اطلاعات خوبی را برای دیگران که می خواهند در این زمینه کار کنند ارایه نمودند. فوریر، [۳] اویلر [۴] و لاپلاس [۵] ازجمله کسانی هستند که به طور تقریبی به مطالعه حسابان کسری پرداخته‌اند و آنها به نتایج خوبی در ریاضیات دست یافتند که عبارتند از نمادهای مشخص و اصول و تعاریفی که مناسب مفهوم مشتق و انتگرال از مرتبه ناصحیح است. مشهور ترین تعاریفی که در مورد حسابان کسری در جهان وجود دارد تعاریفی مربوط

---

[۱] Hospital
[۲] Leibniz
[۳] Fourier
[۴] Euler
[۵] Laplace

به ریمان—لیوویل [۱] و گرانوالد— لتینکوف [۲] هستند.
یکی دیگر از تعاریفی مربوط به حسابان کسری تعریف مشتق و انتگرال کاپوتو [۳] است، فرمول کاپوتو یک فرمول کلاسیک از تعریف مشتق کسری ریمان—لیوویل، به منظور حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری وصحیح است. حال در ادامه به معرفی مفاهیم مذکور می پردازیم.

۲—۱نام ونمادگذاریهای متداول درحسابان کسری

حسابان کسری نامی برای مبحث انتگرال و مشتق از مرتبه دلخواه است که مفهوم مشتق گیری و انتگرالگیری معمولی را تعمیم می دهد.
برای انتگرال ریمان—لیوویل از مرتبه α از نماد

$$I_x^\alpha f(x), \tag{۱.۲}$$

استفاده می شود که x کران مربوط به عمل انتگرال گیری است و نماد

$$D_x^\alpha f(x), \tag{۲.۲}$$

برای مشتق ازمرتبه α ریمان— لیوویل است که x کران مربوط به عمل مشتق گیری است و نماد

$$D_{*t}^\alpha f(t), \tag{۳.۲}$$

برای مشتق کاپوتو از مرتبه α است که t کران مربوط به عمل مشتق گیری است.

۲— ۲ تعاریف مقدماتی

تعریف ۲—۲—۱

تابع حقیقی $f(x)$، $x > 0$، به فضای C_α متعلق است، $\alpha \in R$، هرگاه عدد حقیقی $p > \alpha$ وجود داشته باشد بطوریکه $f(x) = x^p f_1(x)$ که $f_1(x) \in C[0,\infty)$. همچنین تابع حقیقی $f(x)$ به ازای $x > 0$، به فضای C_α^m متعلق است ،$m \in N \bigcup \{0\}$، اگر و فقط اگر $f^m(x) \in C_\alpha$ باشد [۵].

---
۱ Rieman-Liouvill
۲ Grunwald-Letnikov
۳ kaputo

۲-۲-۲ تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل

انتگرال کسری ریمان لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ از یک تابع $f(x) \in C_\alpha$، $\alpha \geq -1$، به صورت زیر تعریف می‌شود[۵]:

$$I_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, & \alpha > 0, x > 0, \\ f(x), & \alpha = 0. \end{cases} \qquad (۴.۲)$$

همچنین

$$I_x^\alpha f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(s,t)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds, \qquad \alpha > 0, x > 0 \qquad (۵.۲)$$

Γ نماد تابع گاما [۱] است.

حال وقتی $\alpha = n \in N$ رابطه (۴.۲) با انتگرال گیری از مرتبه n ام به شکل زیر می‌باشد:

$$\int_0^t \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} ... \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 ... dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau. \qquad (۶.۲)$$

۳-۲-۲ تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل

مشتق کسری ریمان-لیوویل تابع وقتی $f(x)$، $f(x) \in C_{-1}^m$ که $m \in N \bigcup \{0\}$ از مرتبه α به صورت زیر تعریف می شود[۵]:

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} I_x^{m-\alpha} f(x), \qquad m - 1 < \alpha \leqslant m \quad , m \in N. \qquad (۷.۲)$$

لازم به ذکر است که:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha-m}} d\tau\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha-m}} d\tau. \end{aligned} \qquad (۸.۲)$$

رابطه (۸.۲) را برای $x > 0$ و $0 < \alpha < 1$ به صورت زیر نیز ارایه می‌گردد:

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^\alpha}, \qquad (۹.۲)$$

[۱] Gamma function

خاصیت ۲—۱. فرض کنیم $t > 0$، $\beta > -1$ و $\alpha > 0$ در این صورت:

$$D_t^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}, \qquad (۱۰.۲)$$

لازم به ذکر است که مشتق کسری ریمان —لیوویل برای یک تابع ثابت، صفر نمی باشد.
اگر $\alpha \notin N$ و $f(t) = 1$ آنگاه:

$$D_t^{\alpha} 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \alpha \geq 0, \quad t > 0, \qquad (۱۱.۲)$$

از طرف دیگر برای $j = 1, 2, ..., [Re(\alpha)] + 1$ خواهیم داشت:

$$D_t^{\alpha} t^{\alpha-j} = 0 \ . \qquad (۱۲.۲)$$

خاصیت ۲—۲.

$$I_t^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} t^{\beta+\alpha}, \alpha > 0, \beta > -1, t > 0. \qquad (۱۳.۲)$$

نتیجه ۲—۱. اگر $\alpha > 0$ و $m - 1 < \alpha < m$، آنگاه $D_a^{\alpha} f(x) = 0$ اگر و تنها اگر

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j}, \qquad (۱۴.۲)$$

جایی که $c_j \in R (j = 1, .., n)$ یک ثابت دلخواه است.

لم ۲—۱. عملگر های انتگرالی I_a^{α} و I_b^{α} در فضای $L_p(a,b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ کراندارند یعنی [۴۶]:

$$|| \ I_a^{\alpha} f \ ||_p \leqslant k \ || \ f \ ||_p, \quad || \ I_b^{\alpha} f \ ||_p \leqslant k \ || \ f \ ||_p, \qquad (۱۵.۲)$$

جایی که

$$k = \frac{(b-a)^{Re(\alpha)}}{Re(\alpha) \mid \Gamma(\alpha) \mid}, \ || \ f \ ||_p = \left(\int_a^b \mid f(x) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (۱۶.۲)$$

لم ۲—۲. برخی از خواص مقدماتی انتگرال ها و مشتق های کسری ریمان —لیوویل عبارتند از:

$$I^{\alpha} I^{\beta} f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x), \qquad (۱۷.۲)$$

$$D^{\beta}I^{\alpha}f(x)=I^{\alpha-\beta}f(x),\quad \alpha>\beta>0, \tag{۱۸.۲}$$

$$D^{k}I^{\alpha}f(x)=I^{\alpha-k}f(x),k\in N, \tag{۱۹.۲}$$

$$D^{m}D^{\alpha}f(x)=D^{\alpha+m}f(x),\ m\in N, \tag{۲۰.۲}$$

$$I^{n}D^{n}f(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}. \tag{۲۱.۲}$$

۲—۲—۱ مشتق کسری کاپوتو

با اند کی دقت در تعریف مشتق کسری ریمان —لیوویل می توان به وجود پاره ای کاستی در ساختار این مشتق پی برد. از این رو کاپوتو فیزیکدان برجسته ایتالیای با ارایه تعریف های زیرین توانست بهبود قابل ملاحظه ای در خصوص تعریف ریمان— لیوویل پدید آورد . خاطر نشان می سازیم شاید بهترین مزیت تعریف کاپوتو را نسبت به‌تعریف ریمان — لیوویل آن دانست که این تعریف اجازه می دهد شرایط کرانه ای و اولیه مسأ له در فرمول بندی مسایل لحاظ گردند [۵]،که این امر حاکی از رعایت اصول اولیه حل مسایل فیزیکی می‌باشد.

تعریف ۲—۲—۴. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} D_{*t}^{\alpha}f(t)=I_{t}^{m-\alpha}f^{m}(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f^{m}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau, \quad m-1<\alpha<m, \quad m\in N,\\ \frac{d^{m}}{dt^{m}}f(t), \quad \alpha=m. \end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

حال وقتی که $1>\alpha>0$ است رابطه (۲۲.۲) در غالب زیر ارایه می گردد:

$$D_{*t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \quad (x\in R^{+}). \tag{۲۳.۲}$$

لم ۲—۳ . فرض کنیم $Re(\alpha)>0$ و $n=[Re(\alpha)]+1$ ([ ]نماد جزصحیح می‌باشد).اگر $f(t)\in C^{n}[a,b]$ آنگاه:

$$I^{\alpha}D_{*t}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0^{+})}{k!}t^{k},t>0. \tag{۲۴.۲}$$

در حالت خاص اگر $0<\alpha\leq 1$ و $f(t)\in C[a,b]$ آنگاه

$$I^{\alpha}D_{*t}^{\alpha}f(t)=f(t)-f(0). \tag{۲۵.۲}$$

اثبات .فرض می کنیم $\alpha \notin N$ حال اگر $f(t) \in C^{\,n}[a,b]$ آنگاه طبق رابطه(۲۲.۲)خواهیم داشت:

$$D_{*t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f^{m}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau,\ m-1<\alpha<m,\ m\in N,$$

آنگاه طبق رابطه (۱۷.۲)، به رابطه زیر می رسیم:

$$I^{\alpha}D_{*t}^{\alpha}f(t) = I^{\alpha}I^{n-\alpha}D^{n}f(t) = I^{n}D^{n}f(t), \tag{۲۶.۲}$$

حال بوسیله روابط(۲۱.۲)،(۲۶.۲)، به (۲۴.۲) خواهیم رسید.

بنابراین اگر $\alpha \in N$ آنگاه با توجه به رابطه (۲۱.۲)و(۲۲.۲) به رابطه (۲۴.۲) می رسیم.

لم ۲—۴. هرگاه $\mu \geqslant -1$ ، $m \in N$، $m-1<\alpha \leqslant m$ و $f \in C_{\mu}^{m}$ آنگاه

$$D_{*t}^{0}f(t) = f(t). \tag{۲۷.۲}$$

لم ۲—۵. فرض می کنیم $Re(\alpha) > 0$ وهمچنین $n = [Re(\alpha)] + 1$ همچنین فرض کنیم $Re(\beta) > 0$ آنگاه رابطه های زیر برقرار هستند:

$$D_{*t}^{\alpha}t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}t^{\beta-1}, \tag{۲۸.۲}$$

و

$$D_{*t}^{\alpha}t^{k} = 0, (k = 0, 1, ..., n-1), \tag{۲۹.۲}$$

و درحالت خاص خواهیم داشت:

$$D_{*t}^{\alpha}1 = 0. \tag{۳۰.۲}$$

لم ۲—۶. فرض کنیم تابع $f(t)$ پیوسته و مشتق پذیر از مرتبه α باشد.

الف)اگر $m-1<\alpha\leq m,\ m\in N$ آنگاه:

$$D_{*t}^{\alpha}I_{t}^{\alpha}f(t) = f(t), \tag{۳۱.۲}$$

ب) اگر $0<\alpha<1$ آنگاه:

$$D_{*t}^{\alpha}I_{t}^{\alpha}f(t) = I_{t}^{\alpha}D_{*t}^{\alpha}f(t) + f(0). \tag{۳۲.۲}$$

۲ـ ۲ـ ۲ رابطه بین مشتق کسری کاپوتو و ریمان ـ لیوویل

این رابطه می تواند در غالب زیر بیان گردد:

$$D^{\alpha}f(t)=D_{*t}^{\alpha}f(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0^{+}),m-1<\alpha<m,\ t>0, \qquad (۳۳.۲)$$

بنا بر این رابطه بالا را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$D_{*t}^{\alpha}f(t)=D^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{k}}{k!}f^{(k)}(0^{+})\right). \qquad (۳۴.۲)$$

در حالت خاص، وقتی که $0<Re(\alpha)<1$ آنگاه رابطه (۳۳.۲)به شکل زیر در می آید:

$$D_{*t}^{\alpha}f(t)=D^{\alpha}(f(t)-f(0)), \qquad (۳۵.۲)$$

وهمچنین رابطه (۳۴.۲) می تواند در غالب زیر ارایه گردد:

$$D_{*t}^{\alpha}f(t)=D^{\alpha}f(t)-\frac{f(0^{+})}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}. \qquad (۳۶.۲)$$

۲ـ ۲ـ ۳ مشتق کسری جومیری[۱]

در این بخش به معرفی تغییری دیگر از مشتقات کسری به نام مشتق جومیری می‌پردازیم. این مشتق تغییری از مشتقات ریمان—لیوویل می باشد. دانستن این نکته ضروری است که تعریف مشتق کسری ریمان —لیوویل درمورد مشتق یک عدد ثابت صدق نمی کند.

یعنی بر طبق تعریف، مشتق کسری یک عدد ثابت صفر نمی شود. شاید تعریف کاپوتو را به عنوان یک اصلاح کننده قابل قبول برای رفع این مشکل در تعریف ریمان ـ لیوویل بتوان برشمرد. اما با اندکی دقت در ساختار مشتق کاپوتو ملاحظه می گردد این تعریف برای توابعی مفید است که تابع مورد بحث دیفرانسیل پذیر باشد. اما در سال ۱۹۹۶ جومیری [۱،۲] با ارایه مباحثی پیشرفته در غالب آنالیز مختلط، به ارایه تعریفی دقیق در مبحث مشتقات کسری گردید. در این تعریف توابع لزوماً مشتق پذیر نیستند. این تغییر کاربرد موثری در محاسبه احتمال، مسائل لاپلاس ، معادلات ناپایداری کسری و بسیاری از معادلات مشتق پذیر غیر خطی کسری وبسیاری از معادلات خطی دارد. حال در ادامه به بیان برخی از ویژگی های این نوع مشتق و خواص حاکم بر آن ها می پردازیم.

[۱] Jumaries definition

تعریف مشتق جومیری ۲–۲–۵

فرض کنیم $f:R\to R$ و $x\to f(x)$ تابعی پیوسته و نه لزوماً دیفرانسیل پذیر باشد و فرض کنیم $h>0$ یک مثبت دلخواه باشد. عملگر پیشرو FW به صورت زیر تعریف می شود:

$$FW(h)f(x)=f(x+h). \tag{۳۷.۲}$$

حال در ادامه تفاضل کسری[1] از مرتبه α ($0<\alpha<1$، $\alpha\in R$) برای تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\triangle^{\alpha}f(x)=(FW-1)^{\alpha}f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}f[x+(\alpha-k)h)], \tag{۳۸.۲}$$

وبنابراین مشتق کسری جومیری به صورت زیر ارایه می گردد:

$$f^{\alpha}(x)=D_x^{\alpha}f(x)=\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}=\lim_{h\to 0}\frac{\triangle^{\alpha}[f(x)-f(0)]}{h^{\alpha}}. \tag{۳۹.۲}$$

۲–۲–۴ خصوصیات مشتق جومیری

فرض کنیم تابع $f(x)$ در تعریف مشتق جومیری ثابت نباشد، پس مشتقات کسری از مرتبه α به صورت زیر تعریف می شوند:

$$f^{\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x(x-\xi)^{-\alpha-1}f(\xi)d\xi, \qquad \alpha<0, \tag{۴۰.۲}$$

وبرای α مثبت خواهیم داشت:

$$f^{\alpha}(x)=(f^{\alpha-1}(x))'=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-\xi)^{-\alpha}(f(\xi)-f(0))d\xi\ ,\ 0<\alpha<1, \tag{۴۱.۲}$$

وهمچنین:

$$f^{\alpha}(x)=(f^{\alpha-n}(x))^{n}, n\leq\alpha<n+1, n\geq 1. \tag{۴۲.۲}$$

[1] Fractional difference