بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۹۰۷

دانشگاه ارومیه

نمایش‌های گرافی یک ماترویید دو—دوری

مهدیه نعمتی
دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

تیر ۱۳۸۸

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

پایان نامه با عنوان **نمایش های گراف یک متروید دو-دوری** به تاریخ **1388/4/20** و

شماره ی ۲-۹۸/۳ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ قرار

گرفت.

صحیح است

1) استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: **دکتر حبیب اذانچیلر**

2) داور خارجي: **دکتر قدرت اله آزادی**

3) داور داخلي: **دکتر علی عبادیان**

4) نماینده تحصیلات تکمیلي: **دکتر سعید استاد باشی**

تقدیم به دو معلم بزرگ زندگی ام:

پدر بزرگوارم

و

مادر مهربانم

خدایم سپاس، تو را سپاس برای همه چیز، سپاس بر آنچه به من دادی، سپاس بر آنچه از من گرفتی. در میان این نعمت‌ها، تو را شکر می‌کنم به سبب نعمت زیبای علم و دانایی. نوری ارزشمند که بر زندگی‌ام تاباندی تا مرا از ظلمات جهل و نادانی رهایی بخشی و چشم دل و جانم را به زیبایی‌های خلقت گشودی.

تو خود می‌دانی که تنها پناهم تو بودی، تو هستی. هرگز زندگی‌ام را بی‌نور نفرما و مشعل علم و دانشی را که خود به من عطا نمودی، به فروغ ایمان و اخلاق فروزان‌تر فرما و توفیق بندگی خالصانه و عبادتی با معرفت و شناخت، به من عطا کن.

قطره‌ای دانش که بخشیدی ز پیش   متصل گردان به دانش‌های خویش

اینک که به لطف پروردگار با کوله‌باری از تجربه به پایان این مقطع از تحصیلاتم نزدیک می‌شوم، به حکم ادب و وظیفه بر خود لازم می‌دانم مراتب قدردانی و تشکّر خود را نسبت به تمام عزیزانی که به نحوی مرا یاری نمودند، هر چند خیلی کوتاه ابراز دارم.

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکترحبیب اذانچیلر که خالصانه مرا از گنجینه گهربار علم و تجربیات خود بهره‌مند ساخته و در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نمودند، تشکّر می‌کنم.

از اساتید محترم و گرانقدر آقایان دکتر قدرت اله آزادی و دکتر علی عبادیان که زحمت داوری پایان‌نامه را به عهده گرفته و مرا راهنمایی فرمودند، سپاسگزاری می‌نمایم.

ازپدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی با من همدل و همراه بودند و پشتوانه عاطفی محکمی برای من بوده و همیشه از دعای خیرشان بهره‌مند بودم، تشکّر و قدردانی می‌نمایم.

از همه‌ی دوستان عزیز که مرا در نگارش این پایان‌نامه کمک کردند و در نهایت صداقت و مهربانی در حل مشکلات، به من یاری رساندند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه، گراف‌هایی را بررسی می‌کنیم که باعث ایجاد ماترویدهای دو—دوری یکسان می‌شوند. سپس نشان می‌دهیم که چگونه با توجه به یک نمایش ارائه شده‌ی ماتروید دو—دوری، گراف نمایش‌دهنده‌ی این ماتروید را به‌دست آوریم. در برخی موارد، بیش از یک گراف از این دسته گراف‌ها وجود دارد. بعد از پیدا کردن گراف، با استفاده از روش‌های ارائه شده در مرجع [۴]، می‌توانیم نمایش‌های مینیمال دیگر و آن‌گاه دیگر گراف‌های نمایش‌دهنده‌ی این ماتروید دو—دوری را پیدا کنیم. ثابت می‌کنیم که یک نمایش با خاصیت اشتراک سه‌گانه، نمایش طبیعی گرافی مانند G' است که آن هم $B(G)$ را نمایش می‌دهد. با یافتن همه‌ی این نمایش‌ها، نشان می‌دهیم که می‌توانیم تمام گراف‌های نمایش‌دهنده‌ی یک ماتروید دو—دوری را پیدا کنیم. در پایان، با در نظر گرفتن گراف‌های مختلفی که می‌توانند ماتروید دو—دوری یکسانی را نمایش دهند، به بررسی ارتباط میان این گراف‌ها می‌پردازیم.

مقدمه

فصل اول را با ارائه‌ی مفاهیم پایه‌ای از نظریه‌ی گراف و متروید آغاز می‌کنیم. مطالعه‌ی فصل اول، زمینه‌ی لازم را جهت ارائه‌ی بحث اصلی فراهم می‌سازد.

در فصل دوم، به معرفی متروید‌های دو—دوری، مجموعه‌های مستقل، دورها، رتبه و نمایش طبیعی این متروید‌ها می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که این نوع از متروید‌ها کلاسی از متروید‌های ترانسورسال می‌باشند.

در فصل سوم که با محوریت مرجع [۴] می‌باشد، نحوه‌ی به‌دست آوردن نمایش‌های مینیمال یک متروید دو—دوری را توضیح می‌دهیم. مطالب و قضایای این فصل در سایر فصل‌های پایان‌نامه نقش مهمی را در پیدا کردن نمایش‌های مینیمال متروید‌های دو—دوری ایفا می‌کنند.

در فصل چهارم، به بررسی خواص پایه‌ای متروید‌های دو—دوری می‌پردازیم. در این فصل با خاصیت اشتراک سه‌گانه‌ی نمایش‌های متروید دو—دوری و نحوه‌ی ساخت گراف نمایش‌دهنده‌ی این متروید‌ها با توجه به یک نمایش از آن آشنا می‌شویم.

در فصل پنجم که با محوریت مرجع [٦] می‌باشد، به معرفی عمل‌هایی روی گراف می‌پردازیم که اگر روی G اعمال شوند، گراف جدید به‌دست آمده، گراف نمایش‌دهنده‌ی $B(G)$ خواهد بود. این اعمال شامل غلتاندن، باز کردن، جابه‌جایی و دوران است. انجام این اعمال روی

گراف G تحت شرایطی که در قالب قضیه ثابت می‌شوند، ماتروید دو—دوری گراف متناظر را بدون تغییر حفظ می‌کند.

با توجه به این‌که در فصل دوم، ثابت شد که ماترویدهای دو—دوری، کلاسی از ماترویدهای ترانسورسال هستند، در فصل ششم به این نکته می‌پردازیم که با توجه به یک نمایش دلخواه از ماتروید ترانسورسال M، چگونه می‌توان مشخص کرد که آیا M دو—دوری نیز هست و اگر M دو—دوری باشد، با ارائه‌ی الگوریتمی، نحوه‌ی به‌دست آوردن گراف نمایش دهنده‌ی آن را توضیح می‌دهیم.

در فصل هفتم، نشان می‌دهیم که اگر روش‌های فصل سوم را برای پیدا کردن نمایش‌های مینیمال $B(G)$ با خاصیت اشتراک سه‌گانه به کار بریم، گراف‌های حاصل از این نمایش‌ها با گراف اصلی، به‌وسیله‌ی یک سری از اعمال مجاز که در فصل پنجم معرفی شدند، ارتباط پیدا می‌کند که در این فصل به توضیح این ارتباط می‌پردازیم.

مشخصات مقاله‌ای که این پایان‌نامه، بر اساس آن تهیه شده است عبارت است از:

N.A. Neudauer ,Graph representations of a bicircular matroid , Discrete Applied Mathematics 118 (2002) 249-262.

فصل ۱

مفاهیم مقدّماتی

در این فصل تعاریف و نتایج مقدّماتی، که در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده‌اند.

۱.۱ مباحثی از نظریه‌ی گراف

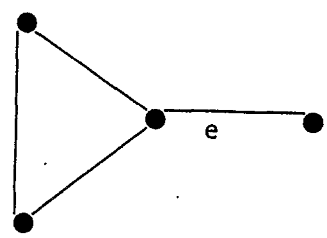
مفاهیم، تعاریف و قضایای این بخش از مرجع [۱۱] انتخاب شده است.

تعریف ۱.۱.۱ یک گراف[۱] سه‌تایی[۲] مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و ناتهی $V(G)$ که اعضای آن رأس[۳]های گراف و مجموعه‌ی $E(G)$ که اعضای آن یال[۴]های گراف G نامیده می‌شود و رابطه‌ی وقوع[۵] ψ_G که به هر عضو $E(G)$ مانند e دو عضو از $V(G)$ مانند u و v را به صورت $\psi_G(e) = uv$ وابسته می‌کند.

---

[۱] graph
[۲] triple
[۳] vertex
[۴] edge
[۵] incidence relation

اگر $e = uv$ یالی از گراف G باشد، آن‌گاه u و v رانقاط انتهایی[۶] یا رأس های انتهایی e و e را یال واقع بر u و v گویند. اگر $e = uu$ یال G باشد، e راطوقه[۷] و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آن‌ها را یال‌های موازی[۸] یا یال‌های چندگانه[۹] گویند. گراف ساده[۱۰] گراف فاقد طوقه[۱۱] و یال موازی می‌باشد. تعداد یال های واقع بر هر رأس را درجه‌ی[۱۲] آن رأس نامیده و با نماد $deg_G(v)$ نشان می‌دهند. کمترین درجه‌ی رئوس در یک گراف مانند G را با نماد $\delta(G)$ نشان می‌دهند. رأس v از گراف G را رأس آویخته[۱۳] گویند هرگاه $deg_G(v) = ۱$. یال e را یال آویخته[۱۴] گویند هرگاه e تنها یال واقع بر رأس آویخته باشد. مانند شکل زیر.



تعریف ۲.۱.۱ گراف H زیرگراف[۱۵] G است اگر:

(۱ $V(H)\subseteq V(G)$

(۲ $E(H)\subseteq E(G)$

در این صورت آن رابه صورت $H\subseteq G$ نشان داده و گوییم G شامل H است.

اگر $V(H) = V(G)$، آن‌گاه H را زیرگراف فراگیر[۱۶] G گویند.

[۶] endpoints
[۷] loop
[۸] parallel
[۹] multiple
[۱۰] simple graph
[۱۱] loopless
[۱۲] degree
[۱۳] pendant vertex
[۱۴] pendant edge
[۱۵] subgraph
[۱۶] spanning subgraph

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید G یک گراف و E مجموعه‌ی یال های آن و $E_1 \subseteq E$ باشد. زیرگراف تولید شده توسط E_1، گرافی است که E_1 مجموعه‌ی یال‌های آن و نقاط انتهایی یال‌های E_1 مجموعه‌ی رئوس آن می باشد. این زیرگراف را با نماد $G[E_1]$ نمایش می‌دهند.

زیرگراف $G[E_1]$ را زیرگراف القا شده[۱۷] توسط E_1 می‌گویند.

تعریف ۴.۱.۱ یک گشت[۱۸] در گراف G دنباله‌ای از رأس ها و یال های G به صورت زیر است.

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_n v_n$$

که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند.

اگر هیچ یالی در یک گشت تکرار نشود، آن را گذر[۱۹] گویند. یک مسیر[۲۰] گذری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشود. مسیر $v_0 e_1 v_1 \cdots e_n v_n$ را که در آن رابطه‌ی $v_0 = v_n$ برقرار باشد، دور[۲۱] گویند. گراف بی دور[۲۲] گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد.

گراف G را همبند گویند هرگاه برای هر $u, v \in V(G)$ مسیری شامل u و v وجود داشته باشد. همبندی یک رابطه‌ی هم‌ارزی درمجموعه رأس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی V_1 ، V_2 ، $\cdots$ ، V_w وجود دارد به طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف های $G[V_1]$، $G[V_2]$، $\cdots$، $G[V_w]$ را مؤلفه[۲۳]های G می‌نامند .

induced subgraph[۱۷]
walk[۱۸]
trail[۱۹]
path[۲۰]
cycle[۲۱]
acyclic[۲۲]
component[۲۳]

یک گراف بی‌دور را جنگل[۲۴] و گراف همبند[۲۵] بی‌دور را درخت[۲۶] گویند. هر زیرگراف فراگیر از گراف G که یک درخت باشد را درخت فراگیر[۲۷] گراف G گویند.

قضیه ۵.۱.۱ اگر G یک درخت باشد، آن گاه $E(G) = V(G) - 1$.

اثبات: به مرجع [۱۱]، قضیه‌ی ۲.۱.۴ مراجعه کنید. □

تعریف ۶.۱.۱ یک برش رأسی[۲۸] برای گراف G مجموعه‌ای از رئوس مانند S است به طوری که $S \subseteq V(G)$ و $G - S$ بیش از یک مؤلفه‌ی همبند داشته باشد. گراف G را k–همبند گویند هرگاه با حذف حداقل k رأس از G گراف ناهمبند شود.

رأس v از گراف G را رأس برشی[۲۹] گویند هرگاه $G - \{v\}$ بیش از یک مؤلفه داشته باشد. یک بلوک از G زیرگراف ماکسیمالی از G است که هیچ رأس برشی ندارد و هر دو یال آن در دوری از بلوک قرار دارند.

گزاره ۷.۱.۱ فرض کنید G یک گراف بی‌طوقه و فاقد رأس تنها باشد. اگر G حداقل سه رأس داشته باشد آن گاه G، ۲–همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G، دوری از G شامل هر دو وجود داشته باشد.

اثبات: به مرجع [۱۱]، گزاره‌ی ۴.۲.۲ مراجعه کنید. □

تعریف ۸.۱.۱ خانواده‌ی مسیرها در گراف G را درونی–مجزا گویند اگر هیچ رأس G یک رأس درونی برای بیش از یک مسیر خانواده نباشد.

[۲۴] forest
[۲۵] connected
[۲۶] tree
[۲۷] spanning tree
[۲۸] vertex cut
[۲۹] cut vertex

قضیه ۹.۱.۱ (قضیه‌ی مِنجِر[۳۰]): گراف G با $|V(G)|\geq k+1$، k—همبند است اگر و تنها اگر هر دو رأس متمایز G به وسیله‌ی حداقل k مسیر درونی—مجزا به هم وصل شوند.

اثبات: به مرجع [۱۱]، قضیه‌ی ۴.۲.۱۷ مراجعه کنید. □

تعریف ۱۰.۱.۱ چرخ[۳۱]، گرافی است که از یک دور با اضافه کردن رأس جدید مانند v و یال‌هایی که آن راس را به همه‌ی رئوس دور وصل می‌کند ، به دست می‌آید. یال‌های جدید را پرّه[۳۲]های چرخ، رأس v را مرکز[۳۳] چرخ و یال‌های واقع بر دور را یال‌های لبه‌ای[۳۴] چرخ می‌نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱ در یک گراف G، زیرتقسیم[۳۵] یال uv عمل جایگزینی یال uv با یک مسیر u,w,v است که رأس درونی w رأسی جدید است.

یک زیرتقسیم گراف G، گرافی است که می‌توان از G با دنباله‌ای از زیرتقسیم‌های یالی به دست آورد.

تعریف ۱۲.۱.۱ دو گراف G و H را مساوی گویند هرگاه $V(G)=V(H)$ و $E(G)=E(H)$ و $\psi_G=\psi_H$. اگر دو گراف مساوی باشند، آن ها را می‌توان به وسیله‌ی نمودارهای یکسان نشان داد.

دو گراف G و H را یکریخت[۳۶] گویند و با نماد $G\cong H$ نمایش می‌دهند هرگاه دوسویی[۳۷]های $\theta:V(G)\to V(H)$ و $\phi:E(G)\to E(H)$ موجود باشند به طوری که $\psi_G(e)=uv$ اگر و تنها اگر $\psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$. چنین جفت (θ,ϕ) از نگاشت ها را یک یکریختی بین G و H می نامند.

[۳۰] Menger's theorem
[۳۱] wheel
[۳۲] spoke
[۳۳] center
[۳۴] rim edges
[۳۵] subdivision
[۳۶] isomorph
[۳۷] bijection

۲.۱ مباحثی ازنظریه‌ی متروید

تعریف ۱.۲.۱ متروید[۳۸] M زوج مرتب $M=(E,\mathcal{I})$ است که در آن E مجموعه‌ای متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می کنند:

I1) $\varnothing\in\mathcal{I}$.

I2)اگر $I\in\mathcal{I}$ و $I'\subseteq I$، آن‌گاه $I'\in\mathcal{I}$.

I3) اگر $I_1,I_2\in\mathcal{I}$ و $|I_1|<|I_2|$، آن‌گاه‌عضوی مانند $e\in I_2-I_1$ وجود دارد که $I_1\cup\{e\}\in\mathcal{I}$.

اگر $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد، آن‌گاه M را متروید‌ی روی E و E را مجموعه‌ی زمینه‌ی[۳۹] آن گویند. هر عضو $\mathcal{I}$ یک مجموعه‌ی مستقل[۴۰] M نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ زیرمجموعه‌هایی از E که در $\mathcal{I}$ نیستند، مجموعه‌های وابسته‌ی[۴۱] متروید M نامیده می‌شوند. زیرمجموعه‌ی وابسته‌ی مینیمال M را یک دور[۴۲] گویند.

گردایه‌ی همه‌ی دورهای M را با $\mathcal{C}(M)$ و یا با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم. اعضای $\mathcal{I}$ آن زیرمجموعه‌هایی از $E(M)$ هستند که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(M)$ نیستند. بنابراین یک متروید با معلوم بودن دورهایش شناسایی می‌شود.

مجموعه‌ی $\mathcal{C}$ از دورهای متروید M دارای خواص زیر است:

C1) $\varnothing\notin\mathcal{C}$.

C2) اگر $C_1,C_2\in\mathcal{C}$ و $C_1\subseteq C_2$، آن‌گاه $C_1=C_2$.

[۳۸] matroid
[۳۹] ground set
[۴۰] independent set
[۴۱] dependent set
[۴۲] circuit

C3) اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آن‌گاه عضوی مانند C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

دورهای تک عضوی را طوقه می‌گویند.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در سه شرط فوق صدق می‌کند.فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند. آن‌گاه $(E,\mathcal{I})$ یک مترويد است که $\mathcal{C}$ گردایه‌ی تمام دورهای آن است.

اثبات: به مرجع [۸]، قضیه‌ی ۱.۱.۴ مراجعه کنید. □

گزاره ۴.۲.۱ فرض کنید E مجموعه‌ی یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ مجموعه‌ی دورهای G باشد، آن‌گاه $\mathcal{C}$ مجموعه‌دورهای یک مترويد روی E است.

این مترويد را مترويد دوری[۴۳] گراف G گویند و با $M(G)$ نمایش می‌دهند.

اثبات: به مرجع [۸]، گزاره‌ی ۱.۱.۷ مراجعه کنید. □

تعریف ۵.۲.۱ دو مترويد M_1 و M_2 را یکریخت گویند و می‌نویسند $M_1 \cong M_2$ اگر تناظر یک‌به‌یک

$$\psi : E(M_1) \to E(M_2)$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $X \subseteq E$، $\psi(X)$ مجموعه‌ای مستقل در M_2 است اگر و تنها اگر X در M_1 مستقل باشد.

[۴۳] cycle matroid

تعریف ۶.۲.۱ هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال متروید M را یک پایه‌ی[۴۴] M گویند.

لم ۷.۲.۱ فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه از متروید M باشند. آن‌گاه $|B_۲| = |B_۱|$.

اثبات: به مرجع [۸]، لم ۱.۲.۱ مراجعه کنید. □

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد. آن‌گاه $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک متروید روی E است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(B1 $\mathcal{B}\neq\varnothing$.

(B2 اگر $B_۱, B_۲\in\mathcal{B}$ و $x\in B_۱ - B_۲$، آن‌گاه عضو $y\in B_۲ - B_۱$ وجود دارد به طوری‌که $(B_۱ - x)\cup y\in\mathcal{B}$.

اثبات: به مرجع [۸]، قضیه‌ی ۱.۲.۳ مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید و $X\subseteq E$ باشد. فرض کنید

$$\mathcal{I}|_X = \{I\subseteq X | I\in\mathcal{I}\}$$

می توان دید که $(X,\mathcal{I}|_X)$ یک متروید است. این متروید را تحدید M به X یا حذف $E - X$ از M گویند و با نماد $M|_X$ یا $M\backslash_{E-X}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید و $X\subseteq E$ باشد. تابع رتبه‌ی[۴۵] متروید M را به صورت

$$\rho(X) = max\{|I| : I\subseteq X, \text{یک مجموعه‌ی مستقل است } I\}$$

تعریف می‌کنیم.

[۴۴] base
[۴۵] rank function

تذکر ۱۱.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد. تابع $\rho : 2^E \to N \cup \{0\}$، تابع رتبه‌ی یک ماترویید روی E است اگر و تنها اگر ρ در شرایط زیر صدق کند:

R1) اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $0 \leq \rho(X) \leq |X|$.

R2) اگر $X \subseteq Y$، آن‌گاه $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

R3) اگر $X, Y \subseteq E$، آن‌گاه

$$\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $0 \leq m \leq n$. آن‌گاه $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک ماترویید روی E است. چنین مات‌رویدی را با $U_{m,n}$ نمایش داده و آن را ماترویید یکنواخت[۴۶] گوییم و داریم:

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq m\}$$

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \varnothing & \text{اگر } m = n، \\ \{X \subseteq E : |X| = m + 1\} & \text{اگر } m < n، \end{cases}$$

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی باشد. یک خانواده از زیرمجموعه‌های S دنباله‌ی متناهی $(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ است به طوری که برای هر $1 \leq j \leq m$، $A_j \subseteq S$. جملات دنباله الزاماً متمایز نیستند.

[۴۶] uniform matroid