دانشکده علوم

گروه ریاضی

مدولهای با کوهمولوژی های کوزین متناهی و پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما :

دکتر ناصر زمانی

اساتید مشاور :

دکتر محمد باقر مقیمی

دکتر احمد خوجالی

پژوهشگر :

مهشید زارع

بهار ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

قدردانی

بدینوسیله از استاد گرانقدر و دلسوزم جناب آقای دکتر ناصر زمانی که در طول تحصیل از لحاظ علمی و اخلاقی بالاترین فداکاریها را در حق اینجانب مبذول داشته و زحمات مضاعف جهت پیشرفت تحصیلی‌ام بر خود هموار نموده‌اند، نهایت تشکر و سپاس را دارم. از خداوند مهربان برای ایشان سلامتی، سربلندی و سعادت آرزومندم و همواره به شاگردی آن استاد بزرگوار بر خود می‌بالم.

همچنین از دوست خوبم سرکار خانم نرگس پوررستمی که در طول مدت تحصیل از راهنماییهای ارزنده ایشان بهره‌مند بوده‌ام، قدردانی می‌شود.

مهشید زارع

بهار ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر، مادر و تنها برادرم مهیار

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری باشد. دراین پایان‌نامه ثابت می‌شود هر R—مدول متناهی از بعد کرول متناهی با همبافت‌های کوهمولوژی کوزین متناهی، دارای پوچسازهای یکنواخت کوهمولوژی موضعی است.

بعلاوه اگر R موضعی با فرمال فایبرهای کوهن—مکوئلی باشد آنگاه عکس مطلب بالا برای مدولهای متناهی مولد صادق در شرط (S_2) برقرار است.

واژه‌های کلیدی : همبافت کوزین، کوهمولوژی موضعی.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه

دراین فصل، برای سهولت در مراجعه، تعاریف و مفاهیمی که در فصلهای آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده می‌شوند. در طول پایاننامه منظور از N اعداد طبیعی و N_0 اعداد صحیح مثبت است.

در سراسر این پایاننامه، R حلقه‌ای یکدار جابجایی و نوتری و M یک $R-$ مدول مولد متناهی است و رادیکال ایده‌آل a را بانماد $r(a)$ نشان می‌دهیم. طبق معمول $Spec(R)$ مجموعه تمام ایده‌آلهای اول R را نشان می‌دهد. محمل[۱] M را با نماد $Supp(M)$ نشان خواهیم داد که عبارت است از$\{p \in Spec(R) \ : \ M_p \neq 0\}$.

قابل ذکراست که چون M مولد متناهی است،

$$Supp(M) = \{p \in Spec(R) \ ; \ 0 :_R M \subseteq p\}.$$

منظور از بعد (بعد کرول) حلقه R، عبارت است از سوپریمم طول‌های زنجیرهای از عناصر $Spec(R)$. بعد R را با $dimR$ نشان می‌دهیم. اگر این سوپریمم موجود نباشد، قرار می‌دهیم $dim(R) = +\infty$.

در صورتیکه (R, m) حلقه‌ای موضعی باشد، آنگاه با توجه به قضیه تعمیم ایده‌آل اصلی کرول داریم $dimR < \infty$.

به طور مشابه بعد $R-$مدول X عبارت است از سوپریمم طول‌های زنجیرهای از ایده‌آلهای اول که همگی در $Supp(X)$ واقع‌اند. اگر این سوپریمم طول موجود نباشد، قرار می‌دهیم $dim(X) = +\infty$.

توجه می‌کنیم که برای $R-$مدول مولد متناهی M داریم $dim_R M = dim \frac{R}{(0:_R M)}$.

ایده‌آل اول p را وابسته به M گوییم هرگاه $x \in M$ یافت شود که $p = (0 :_R x)$. تمام چنین عناصر را با $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم.

---

[۱] $Support$

این مطلب شناخته شده است که $p \in \mathrm{Ass}_R(M)$، اگر و فقط اگر در تجزیه مینیمال زیرمدول صفراز M به صورت مقطع زیرمدول‌های اولیه، زیرمدول اولیه‌ای مانند Q موجود باشد که $\sqrt{Q :_R M} = p$.

عناصر مینیمال $Ass_R(M)$ را با نماد $Min_R(M)$ نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم

$$Assh_R(M) = \{p \in \mathrm{Ass}_R(M) : dim\frac{R}{p} = dim_R M\}.$$

$R-$ مدول M را همبعد[۲] گوییم هرگاه $Min_R(M) = Assh_R(M)$ و M را موضعاً همبعد[۳] گوییم هرگاه به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال m از $Supp_R(M)$، R_m-مدول M_m، همبعد باشد.

به ازای هرایده‌آل اول $p \in \mathrm{Supp}_R(M)$، بلندی p در M[۴] عبارت است از $dim_{R_p}M_p$ که با نماد $ht_M p$ نشان داده می‌شود و طبق تعریف اگر a ایده‌آل دلخواهی از R باشد،

$$ht_M a = inf\{ht_M p \ : \ a \subset p \in Supp(M)\}.$$

بدیهی است اگر $M \neq aM$ آنگاه $ht_M a \geq 0$.

توجه داریم که برای $R-$ مدول مولد متناهی M، $ht_M a = ht(\frac{a+(0:_R M)}{(0:_R M)})$.

حلقه R را کاتنری[۵] گوییم هرگاه به ازای هر دو ایده‌آل اول p و p' از R که $p \subset p'$، یک زنجیر اشباع شده از ایده‌آلهای اول از p به p' به صورت $p \subset p_0 \subset ... \subset p'$ موجود باشد و همه چنین زنجیرهایی نیز از طول متناهی بوده و این طولها با هم برابر باشند.

حلقه R را کاتنری جهانی[۶] گوییم هرگاه R نوتری بوده و هر $R-$جبر مولد متناهی کاتنری باشد. توجه داریم که S به عنوان $R-$جبر مولد متناهی است هرگاه S تصویر همریختی $R[X_1, ..., X_n]$ باشد که در آن $X_1, ..., X_n$ متغیرهای مستقل هستند. چون هر خارج‌قسمتی از یک حلقه کاتنری، خود کاتنری است، بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه حلقه R کاتنری جهانی باشد، آنستکه

---

[۲] $equidimensional$

[۳] $locally\ equidimensional$

[۴] $M - height\ of\ p$

[۵] $catenary$

[۶] $universallycatenary$

به ازای هر n، حلقه چندجمله‌ایهای $R[X_۱, ..., X_n]$ کاتنری باشد.

$R-$ مدول M را یکدست وفادار[۷] گوییم هر گاه به ازای هر همبافت S، S دقیق است اگر و فقط اگر $M \otimes_R S$ دقیق باشد.

گزاره ۱.۱.۱. فرض کنیم R حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول مولد متناهی باشد. گزاره‌های زیر معادلند

۱) مدول خارج‌قسمتی مانند M/L از M وجود دارد که $p \in Ass_R(M/L)$.

۲) $p \in Supp(M)$.

۳) $(\circ :_R M) \subseteq p$

۴) $q \in Ass_R(M)$ وجود دارد به طوریکه $p \supseteq q$.

مجموعه ایده‌آلهای اول p را که در شرایط معادل فوق صدق می‌کنند، با نماد $V_R(M)$ نشان می‌دهیم. توجه داریم که چون M مولد متناهی است، $V_R(M) = Supp_R(M)$.

۲.۱ مدولهای کوهمولوژی موضعی

فرض کنیم a ایده‌آلی از R باشد. به ازای هر $R-$ مدول X قرار می‌دهیم

$$\Gamma_a(X) = \cup_{n=۱}^{\infty}(\circ :_X a^n) = \{x \in \mathrm{X} : \exists\ n \in N \ \ ; \ \ a^n x = \circ\}.$$

$\Gamma_a(-)$ یک فانکتور دقیق چپ از کاتگوری $R-$مدولها به کاتگوری $R-$مدولهاست. $i-$امین فانکتور مشتق‌شده راست $\Gamma_a(-)$ را با نماد $H_a^i(-)$ نشان می‌دهیم و به آن $i-$امین فانکتور کوهمولوژی با محمل در a می‌گوییم. $R-$مدول X را $a-$آزادتاب[۸] گوییم هرگاه $\Gamma_a(X) = \circ$. X، $a-$ تابدار[۹] است هرگاه $\Gamma_a(X) = X$.

[۷] $faithfully\ flat$

[۸] $a - torsionfree$

[۹] $a - torsion$

برای محاسبه $H^i_a(X)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

تحلیل انژکتیو

$$E^{\bullet} : \circ \longrightarrow \mathrm{X} \longrightarrow^{\alpha} E^{\circ} \longrightarrow^{d^{\circ}} \mathrm{E}^{1} \longrightarrow^{d^{1}} \ldots \longrightarrow^{d^{i-1}} \mathrm{E}^{i} \longrightarrow^{d^{i}} \ldots$$

را برای X درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$E^{\bullet}_X : \circ \longrightarrow \ E^{\circ} \longrightarrow^{d^{\circ}} \mathrm{E}^{1} \longrightarrow^{d^{1}} \ldots \longrightarrow^{d^{i-1}} \mathrm{E}^{i} \longrightarrow^{d^{i}} \ldots$$

همبافت حاصل از حذف X از $E^{\bullet}$ باشد. با اعمال فانکتور $\Gamma_a(-)$ به همبافت فوق همبافت زیر حاصل می‌شود.

$$\Gamma_a(E^{\bullet}_X) : 0 \longrightarrow \Gamma_a(E^{\circ}) \longrightarrow^{\Gamma_a(d^{\circ})} \Gamma_a(E^{1}) \longrightarrow^{\Gamma_a(d1)} \ldots \longrightarrow^{\Gamma_a(d^{i-1})} \mathrm{E}^{i} \longrightarrow^{\Gamma_a(d^{i})} \ldots$$

طبق تعریف داریم

$$H^i_a(X) := R^i(\Gamma_a(E^{\bullet}_X)) = ker\Gamma_a(d^i)/im\Gamma_a(d^{i-1})$$

چون $\Gamma_a(-)$ فانکتور R–خطی و همورد است، لذا به ازای هر $i \in \mathrm{N}_{\circ}$، $H^i_a(-)$ نیز فانکتوری R–خطی و همورد بوده و بعلاوه $H^{\circ}_a(-)$ به طور طبیعی با $\Gamma_a(-)$ هم‌ارز است.

فرض کنیم $\circ \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \circ$ یک رشته دقیق از R–مدولها باشد. با اعمال فانکتورهای $H^i_a(-)$، رشته دقیق طولانی زیر حاصل می‌شود

$$\circ \longrightarrow H^{\circ}_a(L) \longrightarrow H^{\circ}_a(M) \longrightarrow H^{\circ}_a(N) \longrightarrow^{\delta} H^{1}_a(L) \longrightarrow \ldots$$

که در آن δ همریختی رابط است.

همچنین $(H^i_a(-))_{i\in N_{\circ}}$ دنباله مرتبط قوی منفی از فانکتورهاست و داریم

$$(H^i_a(-))_{i\in N_{\circ}} \cong (\mathrm{Lim}_{\longrightarrow n\in N}\ Ext^i_R(R/a^n,-))_{i\in N_{\circ}}.$$

تعریف ۱.۲.۱. $a\in R$ را روی R–مدول X منظم[۱۰] گوییم هرگاه $x \in X$ و $ax = \circ$ نتیجه بدهد $x = \circ$. به عبارتی $a \notin Z_R(X)$.

---

[۱۰] *Regular*

عناصر $a_1, ..., a_n \in R$ را یک X–رشته[11] گوییم هرگاه به‌ازای هر $i = 1, ..., n$، a_i روی $\frac{X}{(a_1,...,a_{i-1})X}$ منظم باشد. یعنی $a_i \notin Z_R(\frac{X}{(a_1,...,a_{i-1})X})$. به طور معادل اگر $x \in X$ و $a_i x \in (a_1, ..., a_{i-1})X$، آنگاه $x \in (a_1, ..., a_{i-1})X$.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنیم (R, m) حلقه‌ای نوتری و $M \neq 0$ یک R–مدول مولد متناهی از بعد n باشد. اگر $a_1, ..., a_r \in m$ یک M–رشته باشند، آنگاه $dim\frac{M}{(a_1,...,a_r)M} = n - r$.

اثبات: قرار می‌دهیم $M' = \frac{M}{(a_1,...,a_r)M}$. ابتدا به استقرا روی $r \geq 1$ نشان می‌دهیم $dimM' \leq dimM - r$.

در حالت $r = 1$ داریم $a_1 \notin Z_R(M) = \cup_{p \in Ass_R(M)} p$. پس $a_1 \notin Min_R(M)$.

از اینکه $dimM = n$، $p_0, ..., p_n = m \in Supp_R(M)$ وجود دارند به‌طوریکه

$$(0 :_R M) \subseteq p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_n = m.$$

لذا $p_0 \in Min_R(M)$ و چون $a_1 \notin p_0$ نتیجه می‌شود $dimM' \leq dimM - 1$. حال به استقرا از اینکه $a_r \notin Z(\frac{M}{(a_1,...,a_{r-1})M})$ داریم $dimM' \leq dimM - r$.

برعکس فرض می‌کنیم $dimM' = t$. لذا برای M' داریم

$$t = min\{0 \leq s \in Z \ ; \ \exists \ y_1, ..., y_s \in m \ , \ l(\frac{M'}{(y_1,...,y_s)M'}) < \infty\}$$
$$= min\{0 \leq s \in Z \ ; \ l(\frac{M}{(y_1,...,y_s,a_1,...,a_r)M}) < \infty\}.$$

بنابراین $dimM \leq t + r = dimM' + r$. در نتیجه $dimM' = dimM - r$.

قضیه (ریز) ۳.۲.۱. اگر R حلقه نوتری و M یک R–مدول مولد متناهی باشد و $a \leq R$ به طوری که $aM \neq M$ آنگاه برای هر $n \geq 1$ گزاره‌های زیر هم‌ارزند

۱) برای هر $i < n$ و هر R–مدول مولد متناهی G که $Supp(G) \subseteq V(a)$ داریم $Ext^i_R(G, M) = 0$.

۲) برای هر $i < n$، $Ext^i_R(R/a, M) = 0$.

[11] $X - sequence$

۳) R—مدول مولد متناهی مانند G وجود دارد که $Supp(G) = V(a)$ و برای هر $i < n$ داریم $Ext^i_R(G, M) = 0$.

۴) یک M—رشته به طول n مشمول در a وجود دارد.

اثبات: به قضیه ۱۶.٦ از مرجع [۱۴] مراجعه شود.

با توجه به قضیه ریز نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و $a \leq R$ و M یک R—مدول مولد متناهی باشد به طوری که $aM \neq M$. اگر n طول یک M رشته ماکسیمال در a باشد، آنگاه برای هر $i < n$، $Ext^i_R(R/a, M) = 0$ و $Ext^n_R(R/a, M) \neq 0$ و برعکس.

با توجه به قضیه فوق، M—رشته‌های ماکسیمال مشمول در ایده‌آل a، دارای طولهای مساوی هستند. این طول را با نماد $grade_M\ a$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنیم M یک R—مدول مولد متناهی باشد و $a \leq R$ به طوری که $aM \neq M$. در اینصورت

$$grade_M a = inf\ \{i\ :\ H^i_a(M) \neq 0\}.$$

اثبات: به قضیه ٦.۲.۷ از مرجع [۱] مراجعه شود.

با توجه به مطالب بالا می‌توان تعریف زیر را ارائه کرد.

تعریف ٦.۲.۱. اگر M یک R—مدول مولد متناهی و$a \leq R$ به طوری که $aM \neq M$، آنگاه

$$grad_M a = inf\ \{i\ :\ Ext^i_R(R/a, M) \neq 0\ \} = inf\ \{\ i\ :\ H^i_a(M) \neq 0\ \}.$$

اگر (R, m) حلقه‌ای موضعی باشد، قرارمی‌دهیم $grad_M m = depth\ M$.

فرض کنیم (R, m) حلقه‌ای موضعی باشد. R—مدول مولد متناهی M را کوهن —مکوئلی[۱۲] می‌نامیم هرگاه $M = 0$ یا $depth\ M = dim M$.

[۱۲] $Cohen - Macaulay$

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنیم M یک R−مدول از بعد متناهی باشد. در اینصورت برای هر $i > dim_R M$، $H_a^i(M) = \circ$ و در نتیجه اگر (R,m) حلقه‌ای نوتری و موضعی و M یک R−مدول مولد متناهی باشد، برای هر i که $H_a^i(M) \neq \circ$ داریم $depthM \leq i \leq dimM$.

اثبات: از قضیه صفرشدن گروتندیک[۱۳] برای هر $i > dimM$ داریم $H_a^i(M) = \circ$ وطبق تعریف ۶.۲.۱ به ازای هر $i < depth\ M$، $H_a^i(M) = \circ$. بنابراین نتیجه می‌شود برای هر i که $H_a^i(M) \neq \circ$، $depthM \leq i \leq dimM$.

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنیم G یک R−مدول باشد که توسط حاصلضرب تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال که لزوماً متمایز نیستند، صفر می‌شود. دراینصورت G نوتری است اگر و فقط اگر آرتینی باشد.

اثبات: به قضیه ۷.۳۰ از مرجع [۱۸] مراجعه شود.

قضیه ۹.۲.۱. فرض کنیم $a \leq R$ و M یک R−مدول a− تابدار باشد به طوریکه $(\circ :_M a)$ آرتینی است. دراینصورت M نیز آرتینی است.

اثبات: به قضیه ۷.۲.۱ از مرجع [۱] مراجعه شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید (R,m) حلقه‌ای موضعی و M یک R−مدول مولد متناهی باشد. در اینصورت به‌ازای هر $i \in N_\circ$، R−مدول $H_m^i(M)$ آرتینی است.

اثبات: به استقرا روی i انجام می‌دهیم. در حالت $i = \circ$، چون R نوتری و M مولد متناهی پس M نوتری است. بنابراین $\Gamma_m(M)$ به عنوان زیرمدولی از M مولد متناهی است. پس طبق قضیه ۸.۲.۱، $\Gamma_m(M)$ آرتینی است و لذا از طول متناهی است.

فرض کنیم (فرض استقرا) به ازای هر $i > \circ$ و هر R−مدول مولد متناهی M_1، $H_m^{i-1}(M_1)$ آرتینی باشد.

می‌دانیم به ازای هر R−مدول N نگاشت طبیعی $\pi : N \longrightarrow \frac{N}{\Gamma_a(N)}$، ایزومورفیسم $H_a^i(\pi) : H_a^i(N) \longrightarrow H_a^i(\frac{N}{\Gamma_a(N)})$ را به ازای هر $i \geq 1$ القا می‌کند. در نتیجه به ازای

[۱۳] $Grothendieck`s\ Vanishing\ Theorem$

هر $i \geq 1$ داریم $H_a^i(M) \cong H_a^i(\frac{M}{\Gamma_a\ (M)})$. چون $\frac{M}{\Gamma_m\ (M)}$، R—مدول m—آزاد تاب است، با توجه به یکریختی فوق می‌توان M را m—آزاد تاب فرض کرد. از طرفی M مولد متناهی است و $\Gamma_m(M) = 0$، لذا m دارای مقسوم‌علیه غیر صفر مانند r روی M است. رشته دقیق $0 \longrightarrow M \longrightarrow^r M \longrightarrow \frac{M}{rM} \longrightarrow 0$ را درنظر می‌گیریم که از آن رشته دقیق طولانی

$$... \longrightarrow H_m^{i-1}(\frac{M}{rM}) \longrightarrow H_m^i(M) \longrightarrow^r H_m^i(M) \longrightarrow ...$$

حاصل می‌شود. چون $\frac{M}{rM}$ مولد متناهی است، طبق فرض استقرا $H_m^{i-1}(\frac{M}{rM})$ آرتینی است و از رشته دقیق فوق داریم $(0 :_{H_m^i(M)} r) = \frac{H_m^{i-1}(\frac{M}{rM})}{K}$ و در نتیجه $(0 :_{H_m^i(M)} r)$ آرتینی است.
از طرفی $H_m^i(M)$، m— تابدار است و لذا rR تابدار است. حال از قضیه ۹.۲.۱ نتیجه می‌شود $H_m^i(M)$ آرتینی است.

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید (R, m) حلقه‌ای موضعی و M یک R—مدول غیر صفر مولد متناهی از بعد n باشد. دراینصورت R—مدول $H_a^n(M)$ آرتینی است.

اثبات: به استقرا روی $n \geq 0$. در حالت $n = 0$، داریم $dimM = 0$. بنابراین m، اول می‌نیمال $(0 :_R M)$ است. لذا $r(0 :_R M) = m$ یعنی M توسط توانی از m صفر می‌شود و در نتیجه آرتینی است. از اینجا $\Gamma_a(M)$ به عنوان زیرمدولی از M آرتینی است.
فرض کنیم (فرض استقرا) $n > 0$ و حکم برای کمتر از n برقرار باشد. داریم $H_a^n(M) \cong H_a^n(\frac{M}{\Gamma_a(M)})$. اگر $dim(\frac{M}{\Gamma_a(M)}) < n$، آنگاه $H_a^n(M) = 0$ و حکم برقرار است. چون $(\frac{M}{\Gamma_a(M)})$، a—آزادتاب است با توجه به یکریختی بالا می‌توان فرض کرد M، a—آزادتاب باشد. درنتیجه a دارای یک مقسوم‌علیه غیر صفر مانند r روی M است. رشته دقیق زیر را در نظر می‌گیریم

$0 \longrightarrow M \longrightarrow^r M \longrightarrow \frac{M}{rM} \longrightarrow 0$ که از آن رشته دقیق طولانی زیر حاصل می‌شود

$$... \longrightarrow H_a^{n-1}(\frac{M}{rM}) \longrightarrow H_a^n(M) \longrightarrow^r H_a^n(M) \longrightarrow ....$$

طبق قضیه ۲.۲.۱ ، $dim(\frac{M}{rM}) = n - ۱$. و لذا $H_a^{n-۱}(\frac{M}{rM}) \neq ۰$ و طبق فرض استقرا آرتینی خواهد بود.

از رشته دقیق طولانی فوق داریم $\frac{H_a^{n-۱}(\frac{M}{rM})}{K} \cong (۰ :_{H_a^n(M)} r)$ در نتیجه $(۰ :_{H_a^n(M)} r)$ آرتینی است. $H_a^n(M)$، a—تابدار است. به‌ویژه rR—تابداراست واز ۹.۲.۱ حکم بدست می آید.

تعریف ۱۲.۲.۱. R—مدول S را ثانویه[۱۴] گوییم هرگاه $S \neq ۰$ و به ازای هر $r \in R$، $rS = S$ و یا $n \in N$ موجود باشد به طوریکه $r^nS = ۰$.

اگر S یک R—مدول ثانویه باشد، $r(۰ :_R S)$ ایده‌آل اولی مانند p است. در واقع

$$ab \in r(۰ :_R S)\ ,\ a \notin r(۰ :_R S) \implies \forall\, t \in N\ ;\ a^tS \neq ۰ \implies a^tS = S\ .$$

$$ab \in r(۰ :_R S) \implies \exists\, k \in N\ ;\ a^kb^kS = ۰ \implies b^kS = ۰ \implies b \in r(۰ :_R S).$$

در این حالت S را یک R مدول p—ثانویه می‌گوییم.

یک نمایش ثانویه برای R—مدول M، مجموعی مانند $M = S_۱ + ... + S_n$ است که در آن هر S_i ، $۱ \leq i \leq n$، p_i—ثانویه است. R—مدول M را قابل نمایش[۱۵] گوییم هرگاه دارای نمایش ثانویه باشد. نمایش ثانویه را می‌نیمال گوییم هرگاه

۱) $p_۱\ , ...,\ p_n$ ایده‌آلهای اول متمایز از R باشند.

۲) به‌ازای هر $j = ۱, ..., n$، داشته باشیم $S_j \nsubseteq \Sigma_{i=۱_{j\neq i}}^{i=n} S_i$.

توجه داریم اگر M یک R—مدول p—ثانویه باشد هر تصویر هومومورفیکی از آن نیز p—ثانویه است و بعلاوه $(۰ :_R M)$، R—مدولی p—اولیه است. اگر M دارای نمایش ثانویه باشد، آنگاه دارای نمایش ثانویه می‌نیمال نیز است.

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنید M یک R—مدول دارای نمایش ثانویه باشد و $M = S_۱ + ... + S_n$ و $M = S'_۱ + ... + S'_{n'}$ که در آن S_i ها، $(۱ \leq i \leq n)$ و S'_i ها، $(۱ \leq i \leq n)$ به ترتیب p_i—ثانویه و p'_i—ثانویه‌اند، نمایش‌های ثانویه می‌نیمال از M باشند. دراینصورت $n = n'$

[۱۴] $Secondary$

[۱۵] $Representable$

و $\{p_1, ..., p_n\} = \{p'_1, ..., p'_n\}$.

اثبات: نشان می‌دهیم اگر $p \in Spec(R)$، آنگاه $p \in \{p_1, ..., p_n\}$ اگر و تنها اگر M دارای تصویری هومورفیکی باشد که p—ثانویه‌است. فرض کنیم $1 \leq i \leq n$ چنان باشد که $p = p_i$. قرار می‌دهیم $T_i = \Sigma_{j=1_{i\neq j}}^{j=n} S_j$. چون نمایش مذکور می‌نیمال است، لذا $M \neq T_i$ و $M = T_i + S_i$. داریم $\frac{S_i}{S_i \cap T_i} \cong \frac{T_i+S_i}{T_i} = \frac{M}{T_i} \neq 0$ که در آن $\frac{S_i}{S_i \cap T_i}$، p_i—ثانویه‌است. در نتیجه $\frac{M}{T_i}$، $p = p_i$ ثانویه است.

برعکس فرض می‌کنیم L زیرمدولی از M باشد که $\frac{M}{L} \neq 0$ و p—ثانویه باشد. قرار می‌دهیم

$$I = \{i \ : \ p \subseteq p_i \ , \ 1 \leq i \leq n\} \qquad , \qquad J = \{1, ..., n\} - I.$$

و نشان می‌دهیم $\Sigma_{j\in J} \ S_j \subseteq L$.

اگر $J = \emptyset$، آنگاه $\Sigma_{j\in\emptyset} S_j = \{0\}$ وچیزی برای اثبات نداریم. پس فرض می‌کنیم $J \neq \emptyset$ و $j \in J$. در نتیجه $p \not\subseteq p_j$ و $a_j \in p - p_j$ وجود دارد به طوریکه $a_j S_j = S_j$. در نتیجه برای هر $t \in N$، $a_j^t S_j = S_j$ و $a_j \in p = r(0 :_R \frac{M}{L}) = r(L :_R M)$. لذا $t'_j \in N$ وجود دارد به طوریکه $a_j^{t'_j} M \subseteq L$. قرار می‌دهیم $t'' = max \ \{t'_j \ : \ j \in J\}$. در اینصورت برای هر $j \in J$، $a_j^{t''} M \ \subseteq L$. بنابراین برای هر $j \in J$، $a_j^{t''} S_j \subseteq L$ و لذا از $S_j \subseteq L$ نتیجه می‌شود $\Sigma S_j \subseteq L$. پس داریم $I \neq \emptyset$ و $J \ \neq \ \{1, 2, ..., n\}$.

در ادامه فرض می‌کنیم p با هیچکدام از p_i ها مساوی نباشد، دراینصورت به ازای هر $i \in I$، $p \subset p_i$ و لذا $p \subset \cap_{i\in I} p_i$. فرض می‌کنیم $b \in \ \cap_{i\in I} p_i - p$. چون به ازای هر $i \in I$، $b \in p_i$، پس برای هر $i \in I$، t_i در N موجود است به طوریکه $b^{t_i} S_i = 0$. قرار می‌دهیم $t = max\{t_i\}_{i\in I}$. در اینصورت به ازای هر $i \in I$، $b^t S_i = 0$. حال داریم

$$b^t M = b^t(\Sigma_{i=1}^n S_i) = b^t(\Sigma_{i\in I} S_i + \Sigma_{j\in J} S_j) = b^t \Sigma_{j\in J} S_j = \Sigma_{j\in J} b^t S_j = \Sigma_{j\in J} S_j \ \subseteq L.$$

لذا $b^t M \subseteq L$ و $b \in r(L :_R M) = r(0_R \frac{M}{L}) = p$. در نتیجه $b \in p$ و این تناقض است.

حال p_i را در نظر می‌گیریم. دراینصورت با فرض $T_i = \Sigma_{j=1}^n S_j$، $\frac{M}{T_i}$، p_i—ثانویه است.

پس p'_i موجود است که $p_i = p'_i$. درنتیجه $\{p'_1, ..., p'_n\} \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$. به طور مشابه $\{p_1, ..., p_n\} \subseteq \{p'_1, ..., p'_n\}$ و حکم تمام می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید M یک R—مدول قابل نمایش باشد که نمایش ثانویه می‌نیمال آن به صورت $M = S_1 + ... + S_n$ است که درآن هر S_i، $1 \leq i \leq n$، p_i—ثانویه است. مجموعه $\{p_1, ..., p_n\}$ را که مستقل از انتخاب نمایش تجزیه ثانویه از M می‌باشد مجموعه ایده‌آلهای اول چسبیده به M[16] می‌نامیم و با نماد $Att_R(M)$ نشان می‌دهیم.

چون حلقه R نوتری فرض شده است، می‌توان شناسایی دیگری برای عناصر $Att_R(M)$ ارائه داد. به تبصره زیر توجه شود.

تبصره ۱.۲.۱۵. فرض کنید R—مدول M قابل نمایش باشد و $p \in Spec(R)$. از خاصیت نوتری بودن R استفاده می‌شود و ثابت می‌شود $p \in Att(M)$ اگر وفقط اگر تصویر هومورفیکی ازM موجود باشد که پوچساز آن p باشد.

اثبات: فرض کنیم $p = (0 :_R \frac{M}{N})$ و $M = N_1 + ... + N_r$ و برای هر i، N_i، p_i—ثانویه است. داریم $p = (0 :_R \frac{N_1+...+N_r}{N}) = 0 :_R (\frac{N_1+N}{N} + ... + \frac{N_r+N}{N}) = \cap_{i=1}^r (0 :_R \frac{N_i+N}{N}) = \cap_{i=1}^r p_i$.

در نتیجه i وجود دارد به طوریکه $p = p_i$ و لذا $p \in Att(M)$.

حال با استفاده از خاصیت نوتری R نشان می‌دهیم اگر M دارای یک خارج‌قسمت p—ثانویه باشد، آنگاه خارج قسمتی از M وجود دارد که پوچسازش برابر p است.

فرض کنیم $Q = \frac{M}{N}$ یک خارج قسمت p—ثانویه از M باشد. دراینصورت $(0 :_R Q)$ ایده‌آلی p—اولیه است. چون R نوتری است، در نتیجه $k \in N$ موجود است به طوریکه $p^k \subseteq (0 :_R Q)$ و بنابراین $p^kQ = 0$. از طرفی چون $Q \neq 0$، $pQ \neq Q$.

قرار می‌دهیم $T = \frac{Q}{pQ}$. T، p—ثانویه است و $T = \frac{Q}{pQ} = \frac{M/N}{p(M/N)} = \frac{M/N}{(pM+N)/N} = \frac{M}{pM+N}$.

داریم $p = r(0 :_R \frac{Q}{pQ}) \subseteq (0 :_R \frac{Q}{pQ}) \subseteq p$ و در نتیجه $(0 :_R \frac{Q}{pQ}) = p$.

حال اگر $p \in Att(M)$، دراینصورت $M < N$ موجود است که $\frac{M}{N}$، p—ثانویه است و

[16] $attached\ prime\ ideals$

$r(\circ :_R \frac{M}{N}) = p$. درنتیجه $\frac{M}{pM+N} \cong \frac{M/N}{p(M/N)}$، p—ثانویه است و داریم $p = (\circ :_R \frac{M}{pM+N})$.

تعریف ۱.۲.۱۶. R— مدول $N \neq \circ$ را تحویل ناپذیر جمعی گوییم هر گاه به صورت جمع دو زیر مدول اساسی خود نباشد. یعنی $N = N' + N''$ نتیجه دهد $N = N'$ یا $N = N''$.

ثابت می‌شود هر R—مدول آرتینی M، دارای نمایش ثانویه و در نتیجه نمایش ثانویه می‌نیمال است.

ابتدا نشان می‌دهیم هر R—مدول آرتینی M را می‌توان به صورت حاصل‌جمع تعداد متناهی از زیرمدولهای تحویل‌ناپذیر جمعی M نوشت. قرار می‌دهیم

$\Sigma = \{N \ : \ N \leq M\}$ که در آن N را نمی‌توان به صورت حاصل‌جمع تعداد متناهی از زیرمدولهای تحویل‌ناپذیر جمعی‌اش نوشت. اگر M را نتوان به صورت جمع تعداد متناهی از زیرمدولهای جمعی‌اش نوشت، آنگاه $\Sigma \neq \varnothing$. Σ با رابطه شمول مرتب جزیی است. M آرتینی است پس Σ دارای عضو می‌نیمال مانند N' است. چون $N' \in \Sigma$، پس N' تحویل‌ناپذیر جمعی نیست. بنابراین زیرمدولهای واقعی N'_1 و N'_2 از N' وجود دارند به طوریکه $N' = N'_1 + N'_2$.

درنتیجه $N'_1 \subset N'$ و $N'_2 \subset N'$ و لذا $N'_1, N'_2 \notin \Sigma$. بنابراین N'_1 و N'_2 را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع تعداد متناهی از زیرمدولهای تحویل‌ناپذیر جمعی خودشان نوشت و این تناقض است.

حال ثابت می‌کنیم اگر M یک R—مدول آرتینی و تحویل‌ناپذیر جمعی باشد، ثانویه است. چون M تحویل ناپذیر جمعی است، پس $M \neq \circ$. اگر به ازای هر $a \in R$، $aM = M$، در اینصورت M ثانویه است پس فرض کنیم $a \in R$ چنان باشد که $aM \neq M$. زنجیر نزولی $M \supseteq aM \supseteq a^{\text{۲}}M \supseteq \dots$ متوقف می‌شود لذا $n \in N$ وجود دارد که به‌ازای هر $i \geq \circ$، $a^nM = a^{n+i}M$. به ویژه $a^nM = a^{\text{۲}n}M$. فرض کنیم $x \in M$. در اینصورت $a^nx \in a^nM = a^{\text{۲}n}M$، درنتیجه $y \in M$ وجود دارد به طوریکه $a^nx = a^{\text{۲}n}y$ و لذا $a^n(x - a^ny) = \circ$، بنابراین $(x - a^ny) \in (\circ :_M a^n)$. داریم

$x = x - a^ny + a^ny \in (\circ :_M a^n) + a^nM$ و در نتیجه $M = (\circ :_M a^n) + a^nM$.

M تحویل‌ناپذیر جمعی است پس $a^nM = M$ یا $(\circ :_M a^n) = M$. چون $aM \neq M$ پس