بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در

ریاضی محض، (گرایش جبر)

گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر حلقه جابجایی R

استاد راهنما:

دکتر لیلی شریفان

استاد مشاور:

دکتر علی اکبر استاجی

پژوهشگر:

زهره فرزی

شهریور ۱۳۹۲

سوگند نامه دانش‌آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره‌گیری از دانش استادان و سرمایه‌های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه‌ای از دانش و خرد گرد آورده‌ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می‌کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه رأست و درست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می‌گیرم که از همه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می‌بندم که همواره کرامت انسانی را درنظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می‌خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می‌بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم‌میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

تأییدیه صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب زهره فرزی به شماره دانشجویی ۹۰۲۳۱۲۳۰۳۸ رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مولفان و منصفان، قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی ضوابط و مقررات آموزشی پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن مسئولیت هرگونه پاسخ‌گویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: زهره فرزی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره برداری از این پایان‌نامه در چهار چوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود بلامانع است:

- بهره برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر لیلی شریفان

تاریخ:

امضا:

تقدیم به

رهبر عزیزم

امام خامنه ای

حقا که تو از سلاله فاطمه ای
با خنده خود به درد ما خاتمه ای
زیباتر از این نام ندیدم به جهان
سید علی الحسینی الخامنه ای

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که توفیق دوباره تحصیل علم را به من عطا نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

سرکار خانم دکتر لیلی شریفان

که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علی اکبر استاجی که زحمت مشاوره این رساله را تقبل کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر احسان استاجی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از رئیس محترم دانشکده ریاضی جناب آقای دکتر مقدسی سپاسگزارم و آرزوی موفقیت و سلامتی ایشان را از خدای متعال خواهانم.

زهره فرزی

شهریور ۹۲

فرم چکیده پایان نامه دوره تحصیلات تکمیلی
دفتر تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی: فرزی	**نام:** زهره	**ش دانشجویی:** ۹۰۲۳۱۲۳۰۳۸
استاد راهنما: دکتر لیلی شریفان	**استاد مشاور:**دکتر علی اکبر استاجی	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** جبر جابجایی
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۹۲/۶/۱۸	**تعداد صفحه:** ۷۰

عنوان پایان‌نامه: گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر حلقه جابجایی R

کلید واژه‌ها: ایده آل پوچ ساز، ایده آل اول وابسته، گراف مقسوم علیه صفر، گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر

چکیده:
در این پایان نامه، گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه جابجایی R را که با نماد $\Gamma_E(R)$ نشان داده می‌شود، مطالعه می‌کنیم .
در ادامه چگونگی دریافت اطلاعاتی درباره حلقه R از این ساختار را نشان می‌دهیم. به ویژه چگونگی شناسایی اول وابسته‌های حلقه R را به کمک $\Gamma_E(R)$، تعیین می‌کنیم.
ایده اصلی این پایان نامه از مقاله

Spiroff S., Wickham C., A zero divisor graph determined by equivalence classes of zero divisor, Comm. Algebra 2011; 39: 2338–2348.

گرفته شده است .

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

پیشگفتار

نظریه حلقه‌ها بخشی از جبر می‌باشد که به بررسی خواص حلقه‌ها به عنوان یک ساختار مهم جبری می‌پردازد. علاوه بر قضایای بنیادی زیادی که در این نظریه وجود دارند و حلقه‌ها را به صورت رده‌ای بررسی می‌کنند، قضایایی نیز وجود دارند که حلقه‌ها را با توجه به خواص عناصر آن‌ها بررسی می‌کنند، به‌طور مثال خواص حلقه‌ها با توجه به مقسوم علیه‌های صفر، پوچ توان‌ها، خود توان‌ها و وارون‌پذیرها. بررسی خواص حلقه‌ها با توجه به مقسوم علیه‌های صفر در آن‌ها، توسط افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته، که تکنیک اصلی آن‌ها برای این منظور استفاده از نظریه گراف‌هاست. اولین بار آی . بک [۱] در [۸] در سال ۱۹۸۸ به یک حلقه‌ی یکدار و جابجایی، یک گراف نسبت داد. وی با استفاده از مفاهیم نظریه گراف‌ها، خواص جالبی از حلقه‌ها را بدست آورد. بعدها اندرسون [۲] و لیونگستون [۳] در [۷] به این موضوع علاقمند شدند و به طور جدی نظریه گراف مقسوم علیه‌های صفر را با ارائه یک تعریف دقیق و بررسی خواص گرافی و مقایسه کردن آن‌ها با خواص حلقه‌ای پایه گذاری کردند. آن‌ها گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ی یکدار و جابجایی R را با نماد $\Gamma(R)$ نشان دادند، که رأس‌های آن‌ها مقسوم علیه‌های صفر R است.

ردموند [۴] در [۱۲] گراف مقسوم علیه صفر را برای هر حلقه‌ی دلخواه، نه لزوما یکدار و جابجایی، تعریف کرد. وی به هر حلقه‌ی R یک گراف ساده جهت‌دار $\overline{\Gamma}(R)$ نسبت داد که البته بعضی از یال‌ها در آن ممکن است دو جهت داشته باشند.

گراف مقسوم علیه صفر، همچنین توسط افراد دیگری در زمینه‌های مختلفی مطالعه شده است، از جمله

[۱] I. Beck
[۲] Anderson
[۳] Livingston
[۴] S . Redmond

اکبری [۵] و محمدیان [۶] در [۶] ، اکبری و میمنی [۷] در [۵] ، میمنی و پورنکی [۸] در [۹]. مفهوم گراف مقسوم علیه صفر در واقع پلی بین نظریه گراف‌ها و نظریه حلقه‌هاست.

ما در این پایان نامه، گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه را مطالعه می‌کنیم که ایده اصلی آن، از نظریات مولی [۹] [۱۰] گرفته شده است. این گراف با نماد $\Gamma_E(R)$ نمایش داده می‌شود. مطالعه این گراف‌ها نسبت به گراف‌های مقسوم علیه‌های صفر مزیت‌هایی دارد. از جمله اینکه، در بسیاری از موارد $\Gamma_E(R)$ ، گراف متناهی است در حالیکه $\Gamma(R)$ نامتناهی است.

برای مثال، اگر $S = Z[X,Y]/(X^۳, XY)$ ، آن‌گاه $\Gamma(S)$ گراف نامتناهی است. در حالیکه $\Gamma_E(S)$ فقط چهار رأس دارد. به طور مثال در حالیکه $x^۲, ۲x^۲, ۳x^۲, \ldots$ مقسوم علیه‌های صفر مجزایی از S هستند (که $x = \overline{X}$)، تمام آن‌ها پوچ سازهای یکسانی دارند و تنها با یک رأس در $\Gamma_E(S)$ نمایش داده می‌شوند.
یک ویژگی مهم دیگر از گراف‌های کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر ارتباط آن با ایده آل‌های اول وابسته حلقه است. برای مثال، در حلقه S بالا، پوچ ساز $x^۲$ یک ایده آل اول وابسته است. در حالت کلی ایده آل‌های اول وابسته حلقه R با رأس‌های مجزایی در $\Gamma_E(R)$ متناظرند. به علاوه هر رأس در گراف $\Gamma_E(R)$ با یک اول وابسته متناظر است یا با یک اول وابسته مجاور است.

مرجع اصلی این پایان نامه، مقاله [۱۳] است. این پایان نامه شامل سه فصل می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایایی در مورد حلقه، حلقه چند جمله‌ای‌ها، نظریه گراف و گراف مقسوم علیه صفر می‌پردازیم که در فصل دوم به آن‌ها نیاز داریم.

در بخش اول از این فصل مفاهیمی مانند ایده آل، حلقه نوتری، مقسوم علیه صفر، پوچ ساز، تجزیه اولیه و مفاهیم دیگر به همراه قضایایی در این رابطه مطرح می‌شود.

در بخش دوم، مفاهیمی از حلقه چند جمله‌ای‌ها و چند قضیه مورد نیاز در این رابطه ارائه می‌شود.

در بخش سوم، مفاهیمی مانند گراف و انواع آن، زیرگراف، زیرگراف القایی، مسیر، دور، قطر گراف، کمر گراف و... معرفی می‌شوند و قضایایی در این رابطه مطرح می‌شوند.

[۵] S . Akbari
[۶] A . Mohammadian
[۷] R . Maimani
[۸] M . R . Pournaki
[۹] Mulay

در بخش چهارم، گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه معرفی و ویژگی‌های آن بررسی، و قضایایی مرتبط در این زمینه بیان می‌شود.

در فصل دوم به بیان تعاریف و قضایای مهمی درباره گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر می‌پردازیم.

در بخش اول، گراف کلاس‌های هم ارزی مقسوم علیه‌های صفر یعنی $\Gamma_E(R)$ ، معرفی و ویژگی‌های آن را بیان کرده و آن را با گراف مقسوم علیه صفر، $\Gamma(R)$ ، مقایسه می‌کنیم.

در بخش دوم، گراف‌های نامتناهی و گراف‌های ستاره‌ای را در نظر می‌گیریم و به این سؤال که آیا شرط نوتری بودن حلقه R برای متناهی بودن گراف $\Gamma_E(R)$ کافیست یا خیر، پاسخ می‌دهیم.

در فصل سوم، به ارتباط بین ایده آل‌های وابسته حلقه R و رأس‌های گراف $\Gamma_E(R)$ می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این پایان نامه فرض می‌کنیم خواننده با حلقه‌های جابجایی و یکدار آشنایی دارد. در این فصل ابتدا مفاهیم مقدماتی در رابطه با حلقه و ایده آل‌ها بیان می‌شود و سپس حلقه چندجمله‌ای‌ها را معرفی، و ویژگی‌های مهم آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش آخر نیز مفاهیم اساسی، تعاریف و قضایای مورد نیاز از نظریه گراف ارائه می‌شود.

۱-۱ حلقه

در سراسر این پایان نامه حلقه‌ها را جابجایی و یکدار درنظر می‌گیریم.

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید I یک زیر مجموعه ناتهی از حلقه R باشد I را یک ایده آل[۱] از R گوییم اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $f, g \in I$، داشته باشیم: $f - g \in I$

۲) برای هر $f \in I$ و هر $h \in R$ ، داشته باشیم: $hf \in I$

همچنین اگر $\emptyset \neq S \subseteq R$ باشد آن‌گاه

$$< S >= \{\sum_{۱}^{s} r_i s_i; r_i \in R, s_i \in S\}$$

ایده آل تولید شده[۲] توسط S می‌نامیم و به عناصر S مولدهای ایده آل $< S >$ می‌گوییم. ایده آل I با

[۱] Ideal
[۲] Ideal generated

تولید متناهی[۳] نام دارد هرگاه مجموعه متناهی $I \subseteq S$ موجود باشد که $I =< S >$.

تعریف ۱-۱-۲. ایده آل $R \neq M$ در حلقه R را ایده آل ماکسیمال[۴] می‌نامیم، هرگاه به ازای هر ایده آل N که $R \subseteq N \subseteq M$، داشته باشیم $N = M$ یا $N = R$.

تعریف ۱-۱-۳. ایده آل $R \neq P$ از حلقه R را اول [۵] گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ داشته باشیم $a \in P$ یا $b \in P$.

مجموعه تمام ایده آل‌های اول حلقه R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۴. حلقه R در شرط زنجیر افزایشی[۶] بر ایده آل‌ها صدق می‌کند یا به‌طور معادل حلقه R نوتری [۷] است، اگر وفقط اگر به ازای هر زنجیر $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq ....$ از ایده آل‌های R، عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به ازای هر عدد طبیعی مانند i، $I_k = I_{k+i}$.

قضیه ۱-۱-۵. *حلقه R نوتری است، اگر وفقط اگر هر ایده آل R با تولید متناهی باشد.*

برهان. به مرجع [۴] صفحه ۵۸۳ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۶. حلقه R با دقیقا یک ایده آل ماکسیمال، حلقه موضعی[۸] نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۷. حلقه R در شرط زنجیر کاهشی[۹] بر ایده آل‌ها صدق می‌کند، یا به‌طور معادل حلقه R آرتینی[۱۰] است، اگر وفقط اگر به ازای هر زنجیر $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4...$ از ایده آل‌های R، عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به ازای هر عدد طبیعی iداشته باشیم $I_k = I_{k+i}$.

لم ۱-۱-۸. *در حلقه آرتینی R هر ایده آل اول، ماکسیمال است.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه ۱۷۵ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید R یک حلقه باشد، $x \in R$ را یک مقسوم علیه صفر[۱۱] حلقه R گوییم، هرگاه

[۳] Finitely generated
[۴] Maximal ideal
[۵] Prime ideal
[۶] Ascending chain
[۷] Noetherian ring
[۸] Local ring
[۹] Descending chain
[۱۰] Artinian
[۱۱] Zero-divisor

عنصر ناصفر $y \in R$ موجود باشد که $xy = \circ$. مجموعه مقسوم علیه‌های صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

حلقه‌ای که هیچ مقسوم علیه صفری به جز صفر ندارد حوزه صحیح[۱۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۰. عنصر $x \in R$ را پوچ توان[۱۳] گویند، هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد که $x^n = \circ$. هر عنصر پوچ توان، یک مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۱-۱-۱۱. مجموعه A شامل تمام عناصر پوچ توان حلقه R ، پوچ رادیکال R نامیده می‌شود و با نماد $\sqrt{\circ}$ یا $Nil(R)$ نمایش داده می‌شود .

$$\sqrt{\circ} = Nil(R) = \{a \in R; \exists\, n \in \mathbb{N}, a^n = \circ\}$$

لم ۱-۱-۱۲. *پوچ رادیکال حلقه R ، یک ایده آل از R است.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه ۱۶ مراجعه شود. □

لم ۱-۱-۱۳. *پوچ رادیکال حلقه R ، اشتراک تمام ایده آل‌های اول R است.*

$$Nil(R) = \bigcap_{P \in spec(R)} P.$$

برهان. به مرجع [۳] صفحه ۱۷ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۱۴. کوچکترین عدد صحیح مثبت n، که به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $nx = \circ$، مشخصه حلقه R نام دارد و اگر چنین عددی موجود نباشد، حلقه R از مشخصه صفر نامیده می‌شود. مشخصه حلقه R را با نماد $char(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱-۱-۱۵. حلقه R را کاهشی[۱۴] گوییم، هرگاه صفر تنها عضو پوچ توان آن باشد.

تعریف ۱-۱-۱۶. اگر I و J ایده آل‌هایی در حلقه R باشند، آن‌گاه ایده آل کسر[۱۵] $(I:J)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(I:J) = \{x \in R; xJ \subseteq I\}$$

---

[۱۲] Integral domain
[۱۳] Nilpotent
[۱۴] Reduced ring
[۱۵] Colon ideal

که یک ایده آل است.

به ویژه $\{x \in R; xJ = \circ\} = \text{ann(J)} = (\circ : J)$ پوچساز J نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۷. اگر x عضوی از حلقه R باشد، ann(J) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{ann(J)} = \{a \in R; ax = o\}.$$

به ویژه:

$$Z(R) = \bigcup_{x \neq \circ} ann(x).$$

تعریف ۱-۱-۱۸. اگر I ایده آلی دلخواه از حلقه R باشد، آن‌گاه رادیکال[۱۶] I را که با Rad(I) یا $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Rad(I)} = \{r \in R; \exists\, n \in \mathbb{N}; r^n \in I\}$$

که Rad(I) ، خود یک ایده آل است.

لم ۱-۱-۱۹. *رادیکال ایده آل I ، اشتراک ایده آل‌های اول شامل I است یعنی*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P \in \text{Spec(R)}} P$$

برهان. به مرجع [۳] صفحه ۲۳ مراجعه شود. □

قضیه ۱-۱-۲۰. ***قضیه اجتناب از ایده آل‌های اول:*** *فرض کنید $P_\text{۱}, \ldots, P_n$ که $n \geq ۲$ ، ایده آل‌هایی از حلقه تعویض پذیر R باشند و حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند. فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است (مثلاً S ممکن است ایده آل R یا زیرحلقه R باشد). فرض کنید*

$$S \subseteq \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} P_i$$

در این صورت به ازای jای که $\text{۱} \leq j \leq n$ ، $S \subseteq P_j$.

برهان. به مرجع [۲] صفحه ۶۵ مراجعه شود. □

---
۱۶ Radical

تعریف ۱-۱-۲۱. $P \in \mathrm{Spec(R)}$ را ایده آل اول مینیمال روی ایده آل I می‌نامیم، اگر $I \subseteq P$ و برای هر $Q \in \mathrm{Spec(R)}$ اگر $I \subseteq Q \subseteq P$ ، آن‌گاه $P = Q$.

مجموعه ایده آل‌های اول مینیمال I را با $\mathrm{Min(I)}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنیم Q ایده آل سره از حلقه جابجایی R باشد. ایده آل Q ایده آل اولیه [۱۷] نامیده می‌شود، هرگاه

$$\forall\, a, b \in R; ab \in Q \Longrightarrow a \in Q \vee \exists\, n \in \mathbb{N};\ b^n \in Q.$$

لم ۱-۱-۲۳. *اگر Q یک ایده آل اولیه باشد آن‌گاه $P := \sqrt{Q}$ یک ایده آل اول R است و می‌گوییم Q ایده آل P - اولیه است.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه ۱۰۰ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۲۴. فرض کنیم I ایده آل سره از حلقه جابجایی R باشد و ایده آل‌های اولیه $Q_1, \ldots, Q_n$ چنان باشند که $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$، در این صورت نمایش فوق یک تجزیه اولیه [۱۸] I نام دارد.

تعریف ۱-۱-۲۵. فرض کنیم $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ یک تجزیه اولیه ایده آل I باشد و به ازای هر $1 \leq i \leq n$ $\sqrt{Q_i} = P_i$ در این صورت تجزیه اولیه فوق، تجزیه اولیه مینیمال [۱۹] است، اگر دو شرط زیر برقرار باشد.

۱) برای هر $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ که $i \neq j$، داشته باشیم: $P_i \neq P_j$

۲) برای هر $1 \leq j \leq n$ ، داشته باشیم: $\bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i \nsubseteq Q_j$

اگر I تجزیه اولیه داشته باشد، می‌گوییم I ایده آل تجزیه پذیر [۲۰] است.

نکته ۱-۱-۲۶. *هر ایده آل تجزیه پذیر یک تجزیه اولیه مینیمال دارد.*

قضیه ۱-۱-۲۷. ***اولین قضیه یکتایی تجزیه اولیه:*** *فرض کنید I یک ایده آل تجزیه پذیر باشد و $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ یک تجزیه اولیه مینیمال I باشد و برای هر $1 \leq i \leq n$ فرض کنید $P_i = \sqrt{Q_i}$.*

---
[۱۷] Primary ideal
[۱۸] Primary decomposition
[۱۹] Minimal primary decomposition
[۲۰] Decomposable ideal

در این صورت

$$\{\sqrt{I:x} \mid x \in R\} \cap \mathrm{Spec(R)} = \{P_۱, \ldots, P_n\}$$

برهان. به منبع [۳] صفحه ۱۰۳ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۲۸. فرض کنیم I ایده آل تجزیه پذیر از حلقه جابجایی R باشد و

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \ \ , \ \ \sqrt{Q_i} = P_i \ (i = ۱, \ldots, n)$$

تجزیه اولیه مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه $\{P_۱, \ldots, P_n\}$ را مجموعه ایده آل‌های اول وابسته به I می‌گوییم و با $\mathrm{ass\ I}$ نشان می‌دهیم. عضو های $\mathrm{ass\ I}$ را ایده آل‌های اول وابسته [۲۱] به I می‌نامیم.

لم ۱-۱-۲۹. *فرض کنید I ایده آلی سره از حلقه جابجایی و نوتری R باشد و $P \in \mathrm{Spec(R)}$ در این صورت $P \in \mathrm{ass\ I}$، اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $(I : a) = P$ ، یعنی اگر و تنها اگر $\lambda \in R/I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که*

$$(\circ :_R \lambda) = \mathrm{ann}_R(\lambda) = P$$

برهان. به مرجع [۲] صفحه ۱۷۴ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۳۰. فرض کنید $R_۱, \ldots, R_n$ حلقه‌هایی دلخواه باشند، حاصلضرب مستقیم[۲۲] آن‌ها، یعنی $R = \prod_{i=۱}^{n} R_i$ مجموعه تمام دنباله‌های $x = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$ است که $(۱ \leq i \leq n) x_i \in R_i$ و همراه با جمع و ضرب مولفه‌ای در نظر گرفته می‌شود. در این صورت R حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی $(۱, ..., ۱)$ است.

قضیه ۱-۱-۳۱. *اگر $R = S \times T$ که S و T دو حلقه اند و I ایده آلی از R باشد. آن‌گاه ایده آل‌های $I_۱ \leq S$ و $I_۲ \leq T$ موجودند که $I = I_۱ \times I_۲$ و برعکس برای هر ایده آل $I_۱ \leq S$ و $I_۲ \leq T$، $I_۱ \times I_۲$ ایده آلی از R است.*

---
[۲۱] Associated prime ideal
[۲۲] Direct product

برهان. فرض کنید I ایده آلی از R باشد و قرار دهید

$$I_1 = \{x \in S; \exists\, y \in T; (x,y) \in I\}$$

$$I_2 = \{y \in T; \exists\, x \in S; (x,y) \in I\}$$

ثابت می‌کنیم I_1 و I_2 به ترتیب ایده آل‌هایی از S و T اند و به علاوه $I = I_1 \times I_2$.

فرض کنیم $x, x' \in I_1$. پس $y, y' \in T$ به قسمی موجودند که $(x,y) \in I$ و $(x', y') \in I$.

و چون I ایده آل است نتیجه می‌شود $(x,y) \pm (x', y') \in I$، بنابراین $x \pm x' \in I_1$، پس I_1 نسبت به جمع زیرگروه است.

حال فرض کنیم $x \in I_1$ و $r \in S$ دلخواه باشند در این صورت $y \in T$ به قسمی موجود است که $(x,y) \in I$.

طبق ایده آل بودن I نتیجه می‌شود $\overbrace{(r,1)}^{\in S\times T}.(x,y) \in I$ و این یعنی $(rx, y) \in I$، پس $rx \in I_1$ لذا $I_1 \leq S$. مشابها $I_2 \leq T$.حال ثابت می‌کنیم $I = I_1 \times I_2$.

فرض کنیم $(x,y) \in I$، پس طبق تعریف $x \in I_1, y \in I_2$. بنابراین $(x,y) \in I_1 \times I_2$، پس $I_1 \subseteq I_1 \times I_2$

حال فرض کنید $(x,y) \in I_1 \times I_2$ دلخواه باشد، پس $x' \in S$ و $y' \in T$ به قسمی موجودند که $(x, y') \in I$ و $(x', y) \in I$. بنابراین طبق ایده آل بودن I داریم:

$$\overbrace{(1,0)}^{\in S\times T}.(x,y') \in I \quad \text{و} \quad \overbrace{(0,1)}^{\in S\times T}(x',y) \in I$$

و این یعنی $(x,0) \in I \wedge (0,y) \in I$ و مجدد طبق ایده آل بودن I نتیجه می‌شود

$$(x,0) + (0,y) = (x,y) \in I$$

بنابراین $I_1 \times I_2 \subseteq I$. پس $I = I_1 \times I_2$.

برعکس اگر که I_1 و I_2 به ترتیب ایده آل‌های S و T باشند، حکم به وضوح برقرار است. □

قضیه ۱-۱-۳۲. *اگر $R = S \times T$ که S و T دو حلقه اند. هر ایده آل اول P از R به یکی از دو صورت زیر است. $P = S \times P_2$ که P_2 یک ایده آل اول T است یا $P = P_1 \times T$ که P_1 یک ایده آل اول S است.*

برهان. اگر P به یکی از صورت‌های فوق باشد که واضح است که P اول است.

برعکس: فرض کنیم P، ایده آل اول $S \times T$ باشد، در این صورت طبق قضیه قبل ایده آل‌های $I_1 \leq S$ و $I_2 \leq T$ موجودند که $P = I_1 \times I_2$.

چون P اول و در نتیجه اکید است پس $I_1 \neq S$ یا $I_2 \neq T$. فرض کنیم $I_1 \neq S$ ، ثابت می‌کنیم I_1 اول است و $I_2 = T$.

فرض کنید $ab \in I_1$ پس $(ab, 0) \in I_1 \times I_2$ بنابراین $(a, 0)(b, 0) \in P = I_1 \times I_2$ و از آنجا که p یک ایده آل اول است، داریم: $(a, 0) \in P$ یا $(b, 0) \in P$ و این یعنی $a \in I_1$ یا $b \in I_1$، لذا I_1 اول است.

چون $(0, 0) = (0, 1_T)(1_S, 0) \in P = I_1 \times I_2$ پس از آنجا که p ایده آل اول است نتیجه می‌شود $(0, 1_T) \in P$ یا $(1_S, 0) \in P$ لذا $1_S \in I_1$ یا $1_T \in I_2$ و چون $I_1 \neq S$ لذا $1_T \in I_2$ ، و این نتیجه می‌دهد $I_2 = T$. □

قضیه ۱-۱-۳۳. *فرض کنید $R = R_1 \times ... \times R_n$ یک حاصل ضرب از حلقه‌ها باشد آن‌گاه هر ایده آل اول P از R به صورت زیر است.*

$$P = R_1 \times ... \times R_{i-1} \times P_i \times R_{i+1} \times ... \times R_n$$

که P_i در آن ایده آل اولی از حلقه R_i است.

برهان. با کمک دو قضیه قبل و استقرا روی n ، تعداد حلقه‌ها، برهان واضح است. □

قضیه ۱-۱-۳۴. *حلقه آرتینی R به طور یکتایی (با تقریب یکریختی) حاصلضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های موضعی آرتینی است.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه ۱۷۸ مراجعه شود. □