بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

تقدیم به:

نبی‌اکرم(ص) اول آموزگار بشریت و حضرت علی(ع) اعلاء مقام کاتب وحی الهی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز

عنوان

قضیه‌های نقطه ثابت زوج برای انقباض‌های غیرخطی در فضاهای متریک مخروطی

استاد راهنما
دکتر عزیزاله عزیزی

استاد مشاور
دکتر علی آبکار

دانشجو
لیلا رحیمی ملکی

۱۳۹۱

تشکر و قدرداني

سپاس و ستايش شايسته پروردگاريست که کرامتش نامحدود و رحمتش بی‌پايان است، اوست که بشريت را بياموخت و با قلم آشنا ساخت. پروردگارا، مرا از شاکران درگاهت و حقيقت جويان راهت قرار ده و ياريم کن تا در آموختن نلغزم و آنچه را که آموختم به شايستگي عرضه نمايم. در اينجا بر خود وظيفه مي‌دانم تا از استاد گرانقدر جناب آقاي دکتر عزيزاله عزيزی که مرا در تهيه و تدوين اين پايان‌نامه راهنمايي فرمودند، تشکر و قدرداني نمايم. هم چنين از استاد مشاورم جناب آقای دکتر علی آبکار که از راهنمايی‌های ايشان بهره برده‌ام تشکر می‌کنم. از اساتيد محترم مدعو جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی و خانم دکتر الهه نحوی فرد که زحمت مطالعه پايان‌نامه را متقبل شدند قدرداني و تشکر می‌نمايم.

ليلا رحيمی ملکی

دی ماه ۱۳۹۱

فهرست نمادها

فضای باناخ حقیقی	E
نرم	$\|\|.\|\|$
ترتیب جزئی	$\leq$
مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت T	F(T)
مجموعه‌ی نقاط انطباق دو نگاشت T, S	C(S,T)
درونP	intP
فضای متریک	(X,d)
ثابت نرمال	K
توپولوژی	τ
نقطه ثابت زوج	(x,y)
گوی باز به مرکز صفر	$B_\delta(\circ)$
مجموعه‌ی مرتب جزئی	$(X, \leq)$

چکیده

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و E یک فضای باناخ حقیقی مرتب و P یک زیر مجموعه‌ی بسته و ناتهی از E باشد. در اینجا با جای‌گزین کردن فضای باناخ حقیقی مرتب با اعداد حقیقی، متریک مخروطی را معرفی می‌کنیم .

در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که هر فضای متریک مخروطی یک فضای توپولوژیک شمارای اول است و خلاصه‌ای از نگاشت‌های یکنوای آمیخته را مطرح می‌کنیم و هم چنین انطباق زوج‌ها و قضیه‌های نقطه ثابت مشترک زوج برای برخی نگاشت‌های انقباضی غیر خطی در فضاهای متریک مخروطی را اثبات می‌کنیم.

کلمات کلیدی

فضای متریک مخروطی، نظریه‌ی نقطه ثابت

پیشگفتار

مطالعات گسترده‌ای روی قضیه‌های نقطه ثابت و کاربردهای آن صورت گرفته شده است. قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ اولین و مشهورترین قضیه در نظریه نقطه ثابت است.

در سال ۱۹۲۲ باناخ [۱۰] [۱] قضیه‌ای را برای وجود و یکتایی نقطه ثابت توابع انقباضی روی فضاهای متریک کامل بیان و با استفاده از آن وجود و یکتایی جواب معادله‌ی دیفرانسیل کشی را نتیجه گرفت که این قضیه به اصل انقباض باناخ معروف است. بعد از آن مطالعات وسیعی روی قضیه‌های نقطه ثابت و کاربردهای آن صورت گرفت و بعدها شکل‌های مختلفی از قضیه نقطه ثابت باناخ ارائه شد.

کنان [۱۷] [۲] درسال ۱۹۶۸ یک نوع جدید و اساسی از شرط‌های انقباضی را مورد بررسی قرار داد. رهودس [۲۷] [۳] در سال ۱۹۷۷ نگاشت‌های انقباضی را تعریف کرد. در سال ۱۹۸۰ بوقدان زپکی [۲۹] [۴] قضیه‌های نقطه ثابت را تعمیم داد. در سال ۱۹۸۷شای در لین [۱۳] [۵] نظریه‌ای از فضاهای متریکی با جای‌گزین کردن مخروط با اعداد حقیقی را مطرح کرد، که برخی نتایج از خان و امداد [۲۱] [۶] در سال ۱۹۸۳ روی قضیه‌های نقطه ثابت برای فضاهای متریک مطرح شده بود. در سال ۲۰۰۶ قضیه‌های نقطه ثابت زوج و کاربردهایش برای نگاشت‌های زوجی توسط باسکار و

---

[۱] S.Banach
[۲] R.Kannan
[۳] B.E.Rhoades
[۴] Boghdan Rzepecki
[۵] Shy- Derlin
[۶] M.S.Khan and M.A.Imdad

لکش میکاندام [۱۲] ۷ مطرح شد.

برای اولین بار در سال ۲۰۰۷ هانگ و ژانگ [۱۶] ۸ فضای متریک مخروطی را معرفی و بعضی از قضایای نقاط ثابت برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متریک مخروطی نرمال را بیان و اثبات کردند. در سال ۲۰۰۸ رضاپور و همل بارانی [۲۵] ۹ فضای متریک و قضایای نقطه ثابت را مورد مطالعه قرار دادند و با حذف شرط نرمال بودن مخروط، نتایج جدیدتری را به دست آوردند. در سال ۲۰۰۹ لکش میکاندام و سیریک [۲۲] ۱۰ چندین انطباق زوج و قضیه‌های نقطه ثابت مشترک زوج را برای نگاشت‌های غیرخطی در فضای متریک کامل مرتب جزئی اثبات کردند. در سال ۲۰۱۰ اردال کاراپینار [۱۹] ۱۱ برخی نتایج از لکش میکاندام و سیریک را به فضای متریک مخروطی گسترش داد. در سال ۲۰۱۰ تورکوقلو و ابولوها [۳۲] ۱۲ مجدداً فضای متریک مخروطی و قضایای نقطه ثابت در این فضا را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که هر فضای متریک مخروطی یک فضای توپولوژیکی نیز هست.

در سال ۲۰۰۷ که فضای متریک مخروطی برای اولین بار تعریف شده بود بعضی از اشخاص نیز قضایای نقاط ثابت و نگاشت‌های انقباضی را در این فضا مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۰۹ عباس و رهودس [۲] ۱۳ نتایج نقاط ثابت را در فضای متریک مخروطی مورد بررسی قرار دادند.

این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل می باشد که شامل سه فصل و هر فصلی شامل بخش‌هایی می‌باشد ترتیب نوشتن هر قضیه هم به طور مثال به صورت (۱.۲.۳) یعنی فصل ۳ قضیه‌ی ۲ و بخش ۱ می‌باشد.

[۷] T.G.Bhaskar and V.Lakshimikantham
[۸] Long-Guang Huang and Xian Zhang
[۹] Sh.Rezapour and R.Hamlbarani
[۱۰] V.Lakshmikantham and L.Ciric
[۱۱] Erdal Karapinar
[۱۲] D.Turkoghlu and M.Abuloha
[۱۳] M.Abbas and B.E.Rhoades

در فصل اول در دو بخش مجزا به بیان تعریف، لم‌های مقدماتی که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌شود می‌پردازیم. فصل دوم شامل دو بخش است، در بخش اول فضای متریک مخروطی نرمال را معرفی و قضایای نقاط ثابت را در این فضا بیان و اثبات می‌کنیم . در بخش دوم در فضاهای متریک مخروطی شرط نرمال بودن مخروط را حذف می‌کنیم و مجدداً قضایای نقاط ثابت را در این فضا بیان و اثبات می‌کنیم. فصل سوم شامل چهار بخش می‌باشد، در بخش اول همگرایی و پیوستگی دنباله‌های دوگانه و توپولوژیکی بودن فضای متریک مخروطی را بیان می‌کنیم و قضایای مربوط به آن را بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش دوم نتایج نقاط ثابت زوج انقباضی در فضاهای متریک مخروطی که توسط باسکار و لکش میکاندام به دست آمده بیان و مطرح می‌شود. در بخش سوم انطباق زوج‌ها را بررسی می‌کنیم و قضایای مربوط به آن را بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش چهارم یکتایی نقطه ثابت مشترک زوج در فضای متریک مخروطی را بیان و اثبات می‌کنیم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی زیر تهیه و تنظیم شده است:

[1] Erdal Karapinar, **Couple fixed point theorems for nonlinear contraction in cone metric spaces**, Comput and Math with Appl 59(2010)3656-3668.

فصل ۱
پیش‌نیازها

این فصل مشتمل بر دو بخش است که در آن مقدمات لازم برای فصل‌های بعدی آورده شده است در بخش اول فضاهای متریک، نگاشت لیپ شیتس و قضیه‌های مهم نقطه ثابت باناخ[۱] آورده شده است. در بخش دوم فضاهای برداری، فضاهای نرم دار و فضاهای باناخ معرفی شده اند. سراسر این پایان نامه E یک فضای باناخ حقیقی مرتب و P یک زیر مجموعه‌ی بسته و ناتهی از آن می‌باشد و $\leq$ یک ترتیب جزئی می‌باشد.

۱.۱ فضای متریک وخواص آن

تعریف ۱.۱.۱. اگر X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد تابع $d : X \times X \to R$ را یک متر روی X گویند هرگاه:

۱. $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) \geq 0$ و $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$،

۲. $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x)$،

---
[۱] Banach

۳. $\forall x, y, z \in X \qquad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

اگر d یک متر بر X باشد آن‌گاه (X,d) را یک فضای متریک[۲] (تابع فاصله)می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱. مهمترین فضاهای متری عبارتند از فضاهای اقلیدسی R^k و $R^۲$ صفحه‌ی مختلط [۳]

فاصله در R^k این طور تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = |x-y| \qquad x, y \in R^k.$$

تعریف ۳.۱.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را همگرا می‌گوییم هرگاه نقطه‌ای مانند $x \in X$ موجود باشد به طوری که:

$$\forall \epsilon > ۰ \qquad \exists N \qquad \forall n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x) < \epsilon,$$

در این حالت می‌گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به x می‌باشد و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

تعریف ۴.۱.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را کشی[۴] می‌نامیم هرگاه:

$$\forall \epsilon > ۰ \qquad \exists N \qquad \forall n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

در زیر قضیه‌ای در فضای متریک بیان شده است.

قضیه ۵.۱.۱. *در یک فضای متریک هر دنباله‌ی همگرا، کشی است ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست.*

برهان. برای اثبات به منبع [۳۰] مراجعه شود. □

مثال ۶.۱.۱. دنباله‌ی $\{\frac{۱}{n}\}$ در فضای $X = (۰, ۱]$ با متر اقلیدسی کشی است اما همگرا نیست.

تعریف ۷.۱.۱. فضای متریک (X,d) را کامل[۵] گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.

[۲] Metric space
[۳] Complex
[۴] Cauchy
[۵] Complete

مثال ۸.۱.۱. فضای متریک $X = (0, 1]$ با متر اقلیدسی کامل نیست زیرا دنباله‌ی $\{\frac{1}{n}\}$ در این فضا کشی است اما همگرا نیست. R با متر اقلیدسی، کامل است.

تعریف ۹.۱.۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را مطلقاً همگرا نامیم هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ همگرا باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فضای خطی نرم‌دار X کامل است اگر و فقط اگر هر سری به طور مطلق همگرا، در آن همگرا باشد.*

برهان. برای اثبات به منبع [۲۸] مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر (X, d) یک فضای متریک و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد آن‌گاه $x \in X$ نقطه ثابت[۶] T نامیده می‌شود هرگاه

$$Tx = x,$$

مجموع نقاط ثابت نگاشت T را با نماد $F(T)$ نمایش می‌دهند به عبارت دیگر

$$F(T) = \{x \in X : \quad Tx = x\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است نگاشت $T : X \to X$ را لیپ شیتس[۷] گوییم هرگاه $K > 0$ ای یافت شود به طوری که داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \qquad \forall x, y \in X,$$

اگر T لیپ شیتس با ضریب $K < 1$ باشد آن‌گاه T را یک انقباض[۸] می‌نامیم.

مثال ۱۳.۱.۱. هر تابع با مشتق مرتبه اول کران‌دار، یک تابع لیپ شیتس است.

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(c) \quad \text{و} \quad |f'(c)| \leq M \qquad \exists M > 0$$

[۶] Fixed point
[۷] Lipschitz
[۸] Contractive

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y)f'(c)| \leq M|x - y|.$$

مثال ۱۴.۱.۱. اگر $X = [۰, ۱]$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید و فرض کنید $T : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ با ضابطه‌ی $Tx = \frac{۱}{۵}x$ تعریف شده باشد در این صورت T یک انقباض است.

اولین نتیجه‌ی مهم در زمینه‌ی نقطه ثابت، قضیه معروف اصل انقباض باناخ است، این قضیه توسط باناخ اثبات شده است و برای حل معادله‌ی دیفرانسیل کشی استفاده شده است.

قضیه ۱۵.۱.۱ (نقطه ثابت باناخ). *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل است و نگاشت $T : X \to X$ یک انقباض باشد در این صورت T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد است و به ازای هر $x_۰ \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x_۰\}$ به این نقطه ثابت همگراست. به عبارت دیگر:*

$$d(T^n(x_۰), x) \leq \frac{k^n}{۱ - k} d(T(x_۰), x_۰) \qquad \forall x \in X$$

برهان. برای اثبات به منبع [۳۰] مراجعه شود. □

بعدها شکل‌های مختلفی از قضیه‌های نقطه ثابت باناخ ارائه شد.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید S, T دو نگاشت روی مجموعه‌ی ناتهی X باشند $x \in X$ نقطه‌ی انطباق[۹] S, T نامیده می‌شود هرگاه:

$$Tx = Sx$$

مجموعه‌ی نقاط انطباق دو نگاشت S, T را با نماد $C(S, T)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. نقطه‌ی $x \in X$ نقطه ثابت مشترک[۱۰] S, T نامیده می‌شود هرگاه:

$$Tx = Sx = x.$$

[۹] Coincidence point
[۱۰] Common fixed point

مثال ۱۸.۱.۱. مجموعه‌ی $X = (-\infty, \infty)$ را با متر معمولی در نظر می‌گیریم اگر نگاشت‌های $S, T : X \to X$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Tx = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in (-\infty, -1] \\ x & ; \quad x \in (-1, 1) \\ -1 & ; \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & ; \quad x \in (-1, 0] \\ \frac{1-x}{2} & ; \quad x \in (0, 1) \\ 0 & ; \quad x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty) \end{cases}$$

در این صورت $x = \frac{1}{3}$ نقطه ثابت مشترک دو نگاشت S, T است.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. اگر V یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد V روی میدان R همراه با یک عمل دوتایی (+) به نام عمل جمع و یک ضرب اسکالر که (α, x) در $R \times V$ را به αx در V می‌نگارد و برای هر $x, y, z \in V$ و هر $\alpha, \beta \in R$ در شرایط زیر صدق کند یک فضای برداری[۱۱] است:

۱. $\forall x, y \in V \qquad x + y = y + x$،

۲. $\forall x, y, z \in V \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$،

۳. $\forall x, y \in V \qquad \forall \alpha \in R \qquad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$،

۴. $\forall x \in V \qquad \forall \alpha, \beta \in R \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$،

۵. $\forall x \in V \qquad 0 + x = x$ و $0.x = 0 \qquad 1x = x$،

[۱۱] Vector space

۶. $x \in V \quad \alpha, \beta \in R \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

تعریف ۲.۲.۱. اگر X یک فضای برداری روی میدان R باشد تابع $||.|| : X \to R^+$ را یک نرم روی X گویند هرگاه:

۱. $\forall x \in X \quad ||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

۲. $\forall x \in X \quad \forall \alpha \in R \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$،

۳. $\forall x, y \in X \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

هرگاه بتوان روی فضای برداری X یک نرم تعریف کرد آن‌گاه X را یک فضای برداری نرم‌دار گویند. اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد برای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = ||x - y||$ یک متر روی X است که آن را متر القایی از نرم می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد، X را یک فضای باناخ[۱۲] نامیم هرگاه X به همراه متریک القایی توسط نرم یک فضای متریک کامل باشد.

تعریف ۴.۲.۱. رابطه‌ی $\leq$ روی مجموعه‌ی A را یک رابطه‌ی ترتیب جزئی گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\forall x \in A \quad x \leq x$،

۲. $\forall x, y \in A \quad x \leq y, \quad y \leq x \Rightarrow x = y$،

۳. $\forall x, y, z \in A \quad x \leq y, \quad y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

[۱۲] Banach space

اگر $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی A باشد به زوج مرتب $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌گویند.

تعریف ۵.۲.۱. رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ بر A را یک رابطه‌ی ترتیب کلی گویند هرگاه برای هر دو عنصر x, y در A حداقل یکی از روابط $x \leq y$ یا $y \leq x$ برقرار باشد، به عبارتی هر دو عنصر A قابل مقایسه باشند که در این صورت به $(A, \leq)$ مجموعه‌ی مرتب کلی گوییم. هر مجموعه‌ی مرتب کلی یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است اما عکس آن برقرار نیست.

فصل ۲
فضاهای متریک مخروطی

این فصل مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول فضای متریک مخروطی نرمال را معرفی و قضایای نقاط ثابت را در این فضا بیان و اثبات می‌کنیم.
در بخش دوم در فضای متریک مخروطی شرط نرمال بودن مخروط را حذف می‌کنیم و مجدداً قضایا را در این فضا بیان و اثبات می‌کنیم.

۱.۲ معرفی فضاهای متریک مخروطی نرمال

دراین بخش ابتدا با جای‌گزینی فضای باناخ حقیقی مرتب به جای اعداد حقیقی مفهوم متر مخروطی و قضایای نقاط ثابت و همگرایی دنباله‌ها را برای فضای متریک مخروطی بیان می‌کنیم. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی[۱] مرتب و P زیرمجموعه E باشد.

تعریف ۱.۱.۲. P یک مخروط[۲] نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

۱. P بسته و $P \neq \phi$،

[۱] Real Banach space
[۲] Cone

۲. $a \geq 0 \Longrightarrow ax+by \in P$ و $b \geq 0$ و $\forall x,y \in P$ $\forall a,b \in R$،

۳. $P \cap (-P) = \{0\}$ و $P \neq \{0\}$.

مثال ۲.۱.۲. اگر V یک فضای برداری باشد آن‌گاه $P=V$ و $P=\{0\}$ مخروط هستند هر فضای برداری یک مخروط است. مخروط در R به فرم زیر می‌باشد:

$$a \in R \qquad s.t. \qquad P=\{a\lambda \quad |\lambda \geq 0\}$$

اگر $a=0$ آن‌گاه $P=\{0\}$ و اگر $a>0$ آن‌گاه $P=[0,+\infty)$ و اگر $a<0$ آن‌گاه $P=(-\infty,0]$.

تعریف ۳.۱.۲. رابطه‌ی ترتیب جزئی نسبت به مخروط P. فرض کنید $P \subseteq E$ یک مخروط باشد. رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ را روی E نسبت به P به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$x \leq y \Leftrightarrow y-x \in P,$$

اگر بنویسیم $x<y$ این بیان می‌کند که $x \leq y$ اما $x \neq y$. درون P را با $intP$ نمایش می‌دهیم و هرگاه $y-x \in intP$ می‌نویسیم $x \ll y$.

تعریف ۴.۱.۲. مخروط نرمال.[۳] مخروط P نرمال نامیده می‌شود اگر

$$\exists K \geq 1 \qquad \forall x,y \in E \qquad 0 \leq x \leq y \Rightarrow ||x|| \leq K||y||.$$

تعریف ۵.۱.۲. کوچکترین عدد K ای که در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند، ثابت نرمال P می‌نامیم. به عنوان مثال در R با نرم اقلیدسی $P=[0,+\infty)$ یک مخروط نرمال است.

تعریف ۶.۱.۲. دنباله‌ی حقیقی x_n را از بالا (پایین) کران‌دار می‌نامند اگر عدد مثبت M وجود داشته باشد که به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم:

$$x_n \leq M \quad (M \leq x_n).$$

[۳] Normal cone

تعریف ۷.۱.۲. مجموعه‌ی $E \subset R^k$ را محدب نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in E \qquad \exists \lambda \qquad 0 < \lambda < 1 \quad s.t. \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in E.$$

مثال ۸.۱.۲. هر گوی باز و بسته در R^n محدب است.

مثال ۹.۱.۲. مجموعه‌ی $\{x \in R^2 | \quad ||x|| < 1\}$ محدب است.

تعریف ۱۰.۱.۲. مخروط منظم .[4] مخروط P منظم است اگر هر دنباله‌ی صعودی از بالا کران‌دار، در آن همگرا شود به عبارتی اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد به طوری که

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq y$$

برای بعضی $y \in E$ آن‌گاه

$$\exists x \in E \qquad s.t. \qquad ||x_n - x|| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

لم ۱۱.۱.۲. [۱۸] *.مخروط P منظم است اگر و فقط اگر هر دنباله‌ی نزولی از پایین کران‌دار، در آن همگرا باشد.*

برهان. فرض کنید x_n یک دنباله‌ی نزولی از پایین کران‌دار باشد لذا $y \in E$ یافت می‌شود به طوری که

$$y \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq x_2 \leq x_1$$

از اینکه $x_n \leq x_{n-1}$ پس $x_{n-1} - x_n \in P$ و داریم $-x_n - (-x_{n-1}) = x_{n-1} - x_n \in P$ در نتیجه $-x_{n-1} \leq -x_n$ پس به وضوح

$$-x_1 \leq -x_2 \leq \ldots \leq -x_n \leq \ldots \leq -y$$

[4] Regular cone