بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه قم

دانشکده علوم

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل بوسیله چند جمله ای برنشتاین

نگارنده

ابراهیم پرهیزگاری

استاد راهنما

دکتر مهدی احمدی نیا

استاد مشاور

دکتر غلامحسن شیردل

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

رشته ریاضی کاربردی.

شهریور ۸۷

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه قم

« صورت جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد»

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر «عجل الله تعالی فرجه الشریف» جلسه دفاعیه پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **ابراهیم پرهیزگاری** رشته : **ریاضی**

تحت عنوان : **حل معادلات دیفرانسیل به وسیله چند جمله ای برنشتاین**

با حضور هیأت داوران در محل دانشگاه قم در تاریخ: ۲۵/ ۶/ ۱۳۸۷ تشکیل گردید.

دراین جلسه، پایان نامه با موفقیت مورد دفاع قرار گرفت و نامبرده نمره با عدد ۱۹ با حروف نوزده

با درجه : عالی ☒ بسیار خوب O خوب O قابل قبول O دریافت نمود.

نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
دکتر مهدی احمدی نیا	استاد راهنما	استادیار	
دکتر غلامحسن شیردل	استاد مشاور	استادیار	
دکتر علی‌اصغر فروغی	استاد ناظر	استادیار	
دکتراکبر نظری	استاد ناظر	استادیار	
دکتر علیرضا باقری ثالث	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی	استادیار	

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده

نام و امضاء: علیرضا باقری ثالث

مدیر امور آموزش و تحصیلات تکمیلی

نام و امضاء:

۱۳۸۷/ ۹/ ۲۳

نشانی:
قم، جاده قدیم اصفهان،
دانشگاه قم
کدپستی: ۳۷۱۶۵
تلفن: ۳ ـ ۲۹۳۱۷۷۱
دورنویس:
دفتر ریاست ۲۹۳۵۶۸۲
معاونت آموزشی ۲۹۳۵۶۸۴
معاونت اداری ۲۹۳۵۶۸۶
معاونت دانشجویی ۲۹۳۵۶۸۸

تقدیم به درخشانترین ستارگان پر فروغ آسمان زندگیم

به روح بزرگوار پدرم که وجودش مظهر مردانگی و شرف و استقامت بوده است ،

به مادر عزیزتر از جانم که وجودش مظهر مهربانی، ایمان و صداقت است ،

به تمامی استادان، دبیران وآموزگارانی که شمع وجود خویش را مشعل راهمان کرده و ما را از ظلمت جهل و نادانی به سوی علم و معرفت هدایت کرده اند.

تقدیر و تشکر:

شایسته است از زحمات و راهنمایی های استاد گرانقدر جناب آقای دکتر احمدی نیا که در تهیه و تدوین این پایان نامه مرا یاری رسانده اند، سپاسگذاری نمایم و همچنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر شیردل استاد مشاورم و جناب آقای دکتر فروغی و جناب آقای دکتر نظری که داوری این پایان نامه بر عهده ایشان بوده است قدردانی می نمایم.

همچنین از آقای مدرسی راد که مرا در تایپ و ویرایش این پایان نامه یاری رساند ، تشکر می نمایم.

ابراهیم پرهیزگاری

تابستان ۸۷

چکیده:

اهمیت و کاربرد معادلات دیفرانسیل در ریاضیات کاربردی و علوم مهندسی و در کنار آن سختی حل برخی از آنها مرا بر آن داشت تا تحقیق خود را روی حل تقریبی آنها متمرکز کنم . در این تحقیق با بهره گیری از یک نوع چند جمله ای با عنوان چند جمله ای برنشتاین و استفاده از روش گالرکین به حل معادلات دیفرانسل خطی و غیر خطی مرتبه دوم و همچنین یک نمونه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به نام معادلات kdv پرداختیم. این روش با توجه به اینکه با نرم افزارهای کامپیوتری موجود ریاضی به سادگی قابل اجرا می باشد موجب تسریع در حل معادلات دیفرانسیل می شود که ممکن است حل برخی از آنها طاقت فرسا یا حتی غیر ممکن باشد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل، چند جمله ای برنشتاین، روش گالرکین، معادله کورتوگ-دوریس.

فهرست مطالب

مقدمه

چند جمله ایهای پیوسته ابزار مفیدی در محاسبات ریاضی می باشند چون آنها به طور دقیق تعریف شده و به راحتی بوسیله کامپیوتر محاسبه می شوند. در محاسبات با کامپیوتر بدون هیچ مشکلی وبا دقت، تمام چند جمله ایها مشتق گیری و انتگرال گیری می شوند و می توان دسته گسترده ای از توابع را با چند جمله ایها (با دقت دلخواه) تقریب زد و از تقریب آن در بسیاری از مسائل استفاده کرد.

چند جمله ایهای برنشتاین[۱] توابع اسپلاین ویژه ای می باشند که به خوبی برای عملیات عددی سازگار شده اند و به طور گسترده در تولید برنامه های عددی برای تقریب زدن مفروضات (داده ها) و ارائه توابع از هر درجه ای استفاده شده اند.

اغلب دانشمندان مثل بوتچر[۲] و استرایر[۳] از این اسپلاینها برا ی مسائل و ابسته به زمان [۶] و جانسون[۴] و همکارانش برای نظریه اختلال جسم [۱۴,۱۵] و فیشر[۵] و همکارانش برای محاسبات مربوط به مسائل فیزیک و مکانیک [۹] استفاده کردند. بهاتی[۶] و همکارانش از این چند جمله ایها در یک راه حل تقریبی از معادلات دیفرانسیل ناهمگن درجه دوم برای قطبیت های استاتیک حالات هیدروژنی [۵] استفاده کردند.

کویی[۷] و فیشر نیز یک انتگرال گیری را با الگوریتم جدیدی برای انتگرال ها بر پایه ی اسپلاین ها معرفی کردند که به طور قابل توجهی کارایی و دقت روی روش های قبلی را بهبود دادند[۲۰] در این تحقیق ما یک شکل جدید.چند جمله ایها معروف به چند جمله ایهای

---

[۱] .Bernstein.
[۲] .Bothcher.
[۳] Strayer.
[۴] .Johnson.
[۵] .Fischer.
[۶] .Bhatti.
[۷] .Qiu.

برنشتاین را مورد بحث قرار می دهیم که دارای مشخصه های مفیدی می باشند این الگوریتم روی یک مجموعه پایه از این چند جمله ایها در یک فاصله زمانی [۰,R] صورت می گیرد اولین عضو پایه ی چند جمله ایهای برنشتاین در x=۰ و آخرین عضو پایه در x=R مقداری یک می پذیرند که این خاصیت انعطاف پذیری الگوریتم را برای اعمال شرایط مرزی بهبود می دهد. در اغلب کاربردها با استفاده از روش گالرکین[۱] روی پایه ها به یک دستگاه خطی می رسیم که کارکردن با آن بسیار ساده می باشد. این تحقیق شامل شش فصل است که در فصل اول به تشریح مقدمات پرداخته ایم و در فصل دوم به بررسی کامل روی حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و غیر خطی مرتبه دوم با استفاده از چند جمله ای برنشتاین می پردازیم و در فصل سوم پس از توضیح مختصری در مورد امواج، یک معادله دیفرانسیل خاص با مشتقات جزئی معروف به kdv را با استفاده از این چند جمله ایها حل می نماییم. در فصل چهارم و پنجم سعی کردیم که معادله kdv را با روش های عددی دیگری حل کرده و نتایج عددی حاصل از این روشها را بیان نمائیم.

در فصل ششم مقادیر عددی بدست آمده از روش های عددی حل kdv در فصل چهارم و پنجم را با حل kdv با استفاده از چند جمله ایها ی برنشتاین را مقایسه می نماییم. در انتها نیز پیاده سازی کلیه الگوریتمها در مورد مثال های ارائه شده در فصول بیان می شوند.

---

[۱]. Galerkin's method.

فصل اول: پیش نیازها و مفاهیم اولیه

۱-۱ مقدمه

در این فصل سعی شده است تا کلیه پیش نیازها و نمادها و روش هایی که بیشتر در فصول استفاده شده اند به صورت مختصر بیان شود تا از تکرار در فصل های بعدی جلوگیری نمائیم. آنچه در این فصل می خوانیم عبارتند از: چند جمله ایهای اصلاح شده برنشتاین [۴] و روش گالرکین و چگونگی مینمم کردن خطای آن می باشد[۸] .

۱-۲ چند جمله ایهای برنشتاین و قضایای مربوط به آن

تعریف (۱-۱): شکل عمومی چند جمله ایهای برنشتاین مرتبه nام به صورت زیر روی فاصله [a,b] تعریف می شود.

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i}\frac{(x-a)^i(b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \qquad (۱-۱)$$

$$i = ۰,۱,\dots,n$$

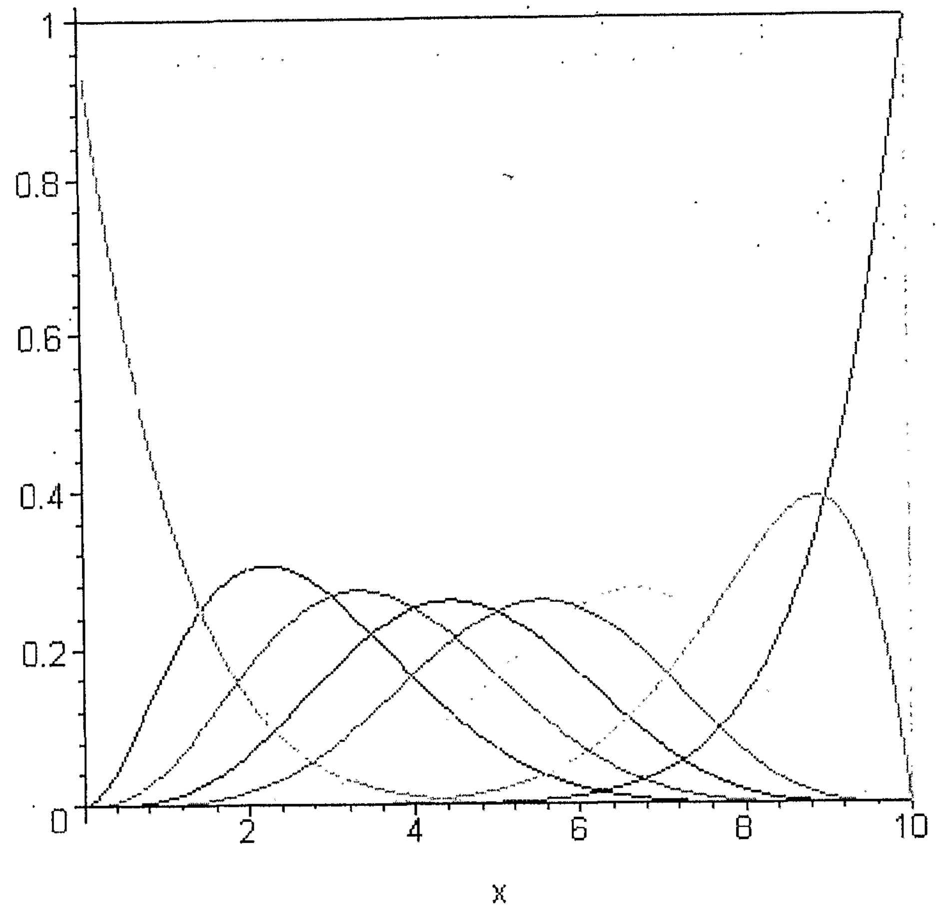
که در آن

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}, \qquad (۱-۲)$$

که $n!$ همان مفهوم معمول است.

نکته (۱-۱) : برای سادگی قرار می دهیم $B_{i,n}(x)=۰$ برای $i>n$ ، $i<۰$ در نتیجه $n+۱$ چند جمله از مرتبه n وجود دارد.

شکل (۱-۱) نمودار ۱۰-چند جمله ای از مرتبه ۹ را نمایش می دهد.



شکل(۱-۱)

فرم تعریف شده(۱-۱) برای چند جمله ایهای برنشتاین یک پایه کامل روی [a,b] تعریف می کند که این چند جمله ایها از مرتبه n بوده و دارای خواص زیر می باشند.

نکته (۱-۲): برای پایه های چند جمله ای برنشتاین داریم:

$$\begin{cases} B_{0,n}(a) = 1 \\ B_{n,n}(b) = 1 \end{cases} \qquad , \qquad (۳-۱)$$

که برای اعمال شرایط مرزی روی معادله دیفرانسیل و در استفاده از روش گالرکین این خواص باعث ساده تر شدن محاسبات می گردد.

قضیه(۱-۱): برای چند جمله ایهای $0 \leq i \leq n, B_{i,n}(x)$ روی فاصله [۰,R] همواره خواص زیر را داریم.

$$B_{i,n}(x) = \frac{R-x}{R} B_{i,n-1}(x) + \frac{x}{R} B_{i-1,n-1}(x), \qquad (۴-۱)$$

$$\frac{d}{dx} B_{i,n}(x) = \frac{n}{R}\Big(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\Big), \qquad (۵-۱)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1, \qquad \forall x \epsilon [0, R]. \qquad (۶-۱)$$

اثبات:روابط(۱-۴) و (۱-۵) به طور مستقیم اثبات می شوند و از بیان آن خودداری می کنیم حال به اثبات (۱-۶) می پردازیم:

$$x = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(0) = B_{0,n}(0) = 1 \ ,$$

$$x = R \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} B_{i,n}(R) = B_{n,n}(R) = 1 \ .$$

فرض کنیم که $x \neq 0, R$ با استفاده از استقراء روی n این رابطه اثبات می شود.

$$n = \cdot \Rightarrow \sum_{i=\cdot}^{\cdot} B_{i,\cdot}(x) = B_{\cdot,\cdot}(x) = ۱ \ .$$

فرض کنیم که این رابطه برای n برقرار باشد یعنی $\sum_{i=\cdot}^{n} B_{i,n}(x) = ۱$ باید نشان دهیم که

$$\sum_{i=\cdot}^{n+۱} B_{i,n+۱}(x) = ۱$$

با توجه به رابطه (۱-۴) داریم

$$\sum_{i=\cdot}^{n+۱} B_{i,n+۱}(x) = \sum_{i=\cdot}^{n+۱}\left(\frac{R-x}{R}B_{i,n}(x) + \frac{x}{R}B_{i-۱,n}(x)\right)$$

$$= \frac{R-x}{R}\sum_{i=\cdot}^{n+۱} B_{i,n}(x) + \frac{x}{R}\sum_{i=\cdot}^{n+۱} B_{i-۱,n}(x)$$

$$= \frac{R-x}{R}\left(B_{n+۱,n}(x) + \sum_{i=\cdot}^{n} B_{i,n}(x)\right) + \frac{x}{R}\left(B_{-۱,n}(x) + \sum_{j=\cdot}^{n} B_{j,n}(x)\right)$$

$$= \frac{R-x}{R} + \frac{x}{R} = ۱ \ .$$

۱-۳ روش گالرکین برای حل معادلات دیفرانسیل

اگر X فضای توابع با خاصیت مشخص باشد و v_iها زیر فضایی از X باشندکه $\overline{\bigcup_{i=۱}^{\infty} v_i} = X$ و $\dim v_i = i$ و اگر برای یک معادله دیفرانسیل جوابی در فضای v_i پیدا کنیم

آنگاه دنباله ای از جواب ها داریم، چون $f_i \in V_i$ تحت شرایطی f_iها همگرا به جواب اصلی معادله دیفرانسیل اند.

متداول ترین و مهمترین نوع آن وقتی است که بتوان معادله دیفرانسیل را به شکل a- فرم دو خطی و تابعک خطی چون g نوشت، یعنی:

$$\forall\ y \in X\ , a < f, y >= g(y)\ . \qquad (۷-۱)$$

در این صورت f جواب معادله دیفرانسیل است.

تعریف(۱-۲):a- فرم دو خطی بصورت $a: X \times X \to C$ ، که :

$$\begin{cases} a < cx_1 + dx_2, y >= ca < x_1, y > +da < x_2, y > \\ a < x + cy_1, dy_2 >= ca < x, y_1 > +da < x, y_2 >, \end{cases} \qquad (۸-۱)$$

به طور خلاصه اگر α_i ها اعضای پایه فضای V_n باشند در این صورت $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \propto_i$ و فرم معادله بصورت زیر می باشد:

$$a < \sum_{i=1}^{n} c_i \propto_i\ , y >= g(y) \quad \forall y \in v_i \quad , \qquad (۹-۱)$$

که c_iها مجهولند. حال اگر روی پایه های فضای V_i این کار را انجام دهیم،

$$a < \sum_{i=1}^{n} c_i \propto_i\ , \propto_j >= g(\propto_j)\ \ ,\ j = 1, \dots, n \quad , \qquad (۱۰-۱)$$

در نتیجه :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a < \propto_i\ , \propto_j >= g(\propto_j)\ ,\ \ j = 1, \dots, n \quad , \qquad (۱۱-۱)$$

به یک دستگاه nمعادله و n مجهول بدست می رسیم که c_iها مجهولند و در این صورت f_n به جواب معادله میل می کنند[۱۱] .

۱-٤ تجزیه و تحلیل روش گالرکین

معادله دیفرانسیل DU=۰ را که D ترکیبی از عملگرهای مختلف مشتق گیری می باشد روی فاصله [a,b] در نظر می گیریم. فرض کنیم که , $U_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i Q_i(x)$ تقریبی از U باشد که $Q_i(x)$ اعضای پایه اند. هدف، یافتن δ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ است که U_n با آنها مشخص شود، اما این ضرائب باید به گونه ای در نظر گرفته شوند که خطای بدست آمده در جواب بدست آمده حداقل گردد یک مقدار از این خطا به صورت $E=DU_n$ تعریف می شود. واضح است که اگر U_n جواب واقعی باشد E=۰ است.

برای مینیمم کردن Eروش های گوناگونی وجود دارد که یکی از این روش ها ، روش مانده وزنی می باشد. در این روش هدف صفر کردن $\int_a^b Evdx$.است که vتابع وزن نامیده می شود که در روش گالرکین توابع پایه به عنوان تابع وزن در نظر گرفته می شوند و تقریب گالرکین برای محاسبه δ_jها به گونه ای محاسبه می شود که:

$$\int_a^b EQ_i dx = 0 \; , i = 1, \dots, n \; . \qquad (12-1)$$

مناسب ترین حالت در این روش این است که Q_iها در شرایط مرزی صدق کنند[۸].

فصل دوم: حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی
با استفاده از چند جمله ای برنشتاین

۲-۱ مقدمه

در این فصل با استفاده از پایه های چند جمله ای برنشتاین و تکیه برروش گالرکین به حل معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت خطی و غیر خطی مرتبه دوم می پردازیم [۴] و مثال ها و نتایج عددی را که با استفاده از نرم افزار میپل[۱] محاسبه شده اند ارائه می دهیم و در انتهای فصل جهت نمایش گستردگی کاربرد چند جمله ای برنشتاین برای حل معادلات ، به حل دو نوع از معادلات به عنوان معادله دیفرانسیل انتگرالی[۳] و معادله انتگرال نوع اول و دوم [۱۸] و حل مثال هایی در این زمینه می پردازیم.

۲-۲ حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

معادله دیفرانسیل با مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \propto y'' + \beta y' + \gamma y = f(x) \\ y(\cdot) = y(R) = \cdot \end{cases} \qquad , \qquad (۱-۲)$$

در این صورت

$$y(x) = \sum_{i=\cdot}^{n} a_i B_{i,n}(x) \qquad , \qquad (۲-۲)$$

را به عنوان جواب معادلات دیفرانسیل (۲-۱) روی فضای چند جمله ایهای برنشتاین مرتبه n در نظر می گیریم با جایگذاری (۲-۲) در (۲-۱) خواهیم داشت:

[۱]. Maple